

## TD

### Exercice N°1

1. Calculer la transformée en  $z$  de la fonction causale suivante :

$k$	0	1	2	3	4	$5 \dots \infty$
$x(k)$	1	4	6	4	1	$0 \dots 0$

2. Calculer la transformée en  $z$  des fonctions suivantes.

$$x(k) = 8^k u(k)$$

### Solution

1.  $X(z) = 1 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + 4z^{-3} + 1z^{-4} = z^{-4}(z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z^1 + 1)$

$$X(z) = z^{-4}(z + 1)^4 = \left(\frac{z+1}{z}\right)^4$$

2.  $x(k) = 8^k u(k)$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} 8^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{8}{z}\right)^k \quad \text{pour } \left|\frac{8}{z}\right| < 1 \quad \text{on a} \quad X(z) = \frac{1}{1 - \frac{8}{z}}$$

$$X(z) = \frac{z}{z - 8}$$

### Exercice N°2

- Trouver la fonction  $f(k)$  l'origine de  $F(z)$  par la méthode de décomposition en éléments simples:

$$F_1(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{(z - 1)^2(z - 2)}$$

- Calculer la transformée en  $z$  inverse par la méthode de division des polynômes :

$$F_1(z) = \frac{-z + z^2}{2 + 3z + z^2}$$

### Solution

1.  $\frac{F_1(z)}{z} = \frac{z^2 - 2z + 2}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z-1}$

$$A = 2; B = -1; C = 3$$

$$F_1(z) = \frac{2z}{z-2} - \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{3z}{z-1}$$

$$f_1(k) = (2^{k+1} - k + 3)u(k)$$

$$2. F(z) = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots$$

$$f(0) = 1; f(1) = -4; f(2) = 10; f(3) = -24 \dots$$

### Exercice N°3

On considère un système échantillonné régi par la relation de récurrence suivante:

$$s_k = 0.5 e_{k-1} - 0.6s_{k-1}$$

1. Calculer la fonction de transfert en z de ce système.
2. Déterminer la valeur finale de l'échantillon de sortie, lorsque le signal d'entrée est un échelon unité.

### Solution

1. La fonction de transfert:

$$S(z) = 0.5z^{-1}E(z) - 0.6z^{-1}S(z)$$

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0.5}{z + 0.6}$$

2. La valeur finale de l'échantillon de sortie

$$e(k) = u(k) \Rightarrow E(z) = \frac{z}{z-1}$$

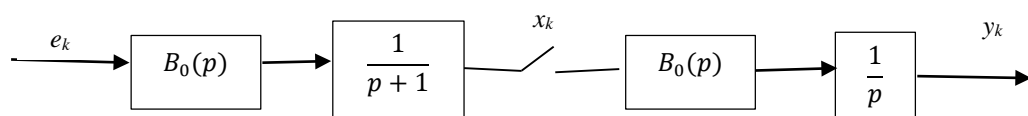
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{z-1}{z} \right) S(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{z-1}{z} \right) \times \left( \frac{0.5}{z+0.6} \right) \times \left( \frac{z}{z-1} \right)$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.5}{z+0.6} = 0.3125$$

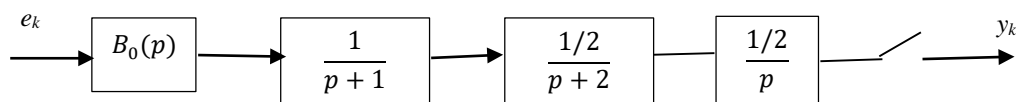
### Exercice N°4

Déterminer la fonction de transfert de ce système:

- 1.



- 2.



### Solution

- 1.

$$F(z) = F_1(z) \times F_2(z)$$

$$F_1(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) \times TZ \left(\frac{F_1(p)}{p}\right)$$

$$F_1(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) \times TZ \left(\frac{1}{p(p+1)}\right) = \left(\frac{z-1}{z}\right) \times TZ \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$$

$$F_1(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) \times \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}\right)$$

$$\text{Donc } F_1(z) = \left(1 - \frac{z-1}{z-e^{-T}}\right)$$

$$F_2(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) \times TZ \left(\frac{1}{p^2}\right)$$

$$F_2(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) \times TZ \left(\frac{Tz}{(z-1)^2}\right) = \frac{T}{z-1}$$

$$F(z) = F_1(z) \times F_2(z)$$

$$F(z) = \frac{T(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

2.

$$F_1(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) \times TZ \left(\frac{F_1(p)}{p}\right) = \left(\frac{z-1}{z}\right) \times TZ \left(\frac{1/4}{p^2(p+1)(p+2)}\right)$$

$$F_1(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) \times TZ \left(\frac{1/8}{p^2} - \frac{3}{16p} + \frac{1/4}{p+1} - \frac{1/16}{p+2}\right)$$

$$F_1(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right) \times \left(\frac{Tz}{8(z-1)^2} - \frac{3}{16} \times \frac{z}{z-1} + \frac{1}{4} \times \frac{z}{z-e^{-T}} - \frac{1}{16} \times \frac{z}{z-e^{-2T}}\right)$$

$$F_1(z) = \left(\frac{T}{8(z-1)} - \frac{3}{16} + \frac{1}{4} \times \frac{z-1}{z-e^{-T}} - \frac{1}{16} \times \frac{z-1}{z-e^{-2T}}\right)$$

### **Exercice N°5**

- Utiliser le critère de Jury et vérifier la stabilité des systèmes donnés par les équations caractéristiques suivantes :

1.  $D(z) = z^3 + 2z^2 + 0.1z + 0.5$

2.  $D(z) = z^4 + 2z^3 + 10z^2 + 5$

- Etudier la stabilité par critère de Routh:

$$D(z) = 2z^2 + 10z + 40$$

### **Solution**

La stabilité par critère de Jury:

1.  $D(z) = z^3 + 2z^2 + 0.1z + 0.5 \quad (n=3)$

$$D(1) = 3.6 > 0 \quad \text{vérifier}$$

$$D(-1) = 1.4 > 0 \quad \text{non vérifier}$$

Donc le système est instable .

$$2. \quad D(z) = z^4 + 2z^3 + 10z^2 + 5 \quad (n = 4)$$

$$D(1) = 18 > 0 \quad \text{vérifier}$$

$$D(-1) = 14 > 0 \quad \text{vérifier}$$

Dans le tableau il ya ( $2n - 3 = 5$  lignes)

5	0	10	2	1
1	2	10	0	5
24	-2	40	10	
10	40	-2	24	
476	-448	980		

- $5 < 1$  ( non vérifier)
- $24 > 10$  (vérifier)
- $476 > 980$  (non vérifier)

### La stabilité par critère de Routh:

$$D(z) = 2z^2 + 10z + 40$$

$$D'(W) = (1 - W)^2 \times D\left(\frac{1+W}{1-W}\right)$$

$$D'(W) = (1 - W)^2 \left[ 2 \left( \frac{1+W}{1-W} \right)^2 + 10 \left( \frac{1+W}{1-W} \right) + 40 \right]$$

$$D'(W) = 32W^2 - 76W + 52$$

32	52
-76	0
52	

il ya deux changement de signe dans la première colonne donc le système est instable.

### Exercice N°6

On considère un système échantillonné de fonction de transfert  $G(z)$  placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire, avec:

$$G(z) = \frac{K}{(z-0.4)(z-0.8)} \quad \text{avec } K > 0$$

- Calculer la fonction de transfert en boucle fermée et étudier les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée.

### **Solution**

La fonction de transfert en boucle fermée

$$H(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{K}{(z-0.4)(z-0.8)+K}$$

$$D(z) = z^2 - 1.2z + 0.32 + K$$

D'après le critère de Jury, le système est stable si et seulement si toutes les conditions suivantes sont respectées:

$$D(1) > 0 \Rightarrow 0.12 + K > 0$$

$$D(-1) > 0 \Rightarrow 2.52 + K > 0$$

$$1 > 0.32 + K \Rightarrow K < 0.68$$

La condition de stabilité :  $K < 0.68$

---

---