جامعة دمشق

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

محاضرات مقرر

الميكانيك الهندسي

ENGINEERING MECHANICS

لطلاب

السنة الأولى

الهندسة الالكترونية والاتصالات

مدرس المقرر

الدكتور : جمعة شحادة

الفصل الأول

1435–1436هـ

2014–2015م

الفهرس

المقدمة ..... Introduction

القسم الأول : علم السكون (Statics)

1– مبادئ علم السكون ..... Statics Principles

2– توازن القوى المستوية ..... Equilibrium of Coplanar Forces

3– تحليل الهياكل الشبكية ..... Analysis of Trusses

4– توازن القوى الفراغية ..... Equilibrium of Forces in Space

5– الاحتكاك ..... Friction

6– مراكز الثقل ..... Centers of Gravity

القسم الثاني : علم الحركة (Kinematics)

7– حركة الجسيمات (النقاط المادية) ..... Kinematics of Particles

8– حركة الأجسام الصلبة ..... Kinematics of Rigid Bodies

القسم الثالث : علم التحريك (Kinetics)

9– تحريك الجسيمات (النقاط المادية)..... Kinetics of Particles

10– تحريك الأجسام الصلبة..... Kinetics of Rigid Bodies

القسم الأول

علم السكوُن

STATICS

يتضمن هذا القسم :

- **الفصل الأول**: مبادئ علم السكون .

CHAPTER 1 Statics Principles

- **الفصل الثاني**: توازن القوى المستوية .

CHAPTER 2 Equilibrium of Coplanar Forces

- **الفصل الثالث**: تحليل الهياكل الشبكية .

CHAPTER 3 Analysis of Trusses

- **الفصل الرابع**: توازن القوى الفراغية .

CHAPTER 4 Equilibrium of Forces in Space

- **الفصل الخامس**: الاحتكاك .

CHAPTER 5 Friction

- **الفصل السادس**: مراكز الثقل .

CHAPTER 6 Centers of Gravity

المقدمة

يبحث هذا المقرر في حالة الأجسام الساكنة والمتحركة بتأثير القوى المطبقة عليها . ويعدّ علم الميكانيك أحد العلوم الأساسية في التعليم الهندسي ، إذ يشكل البوابة الرئيسية التي يدخل منها الطالب إلى العلوم الهندسية بكافة فروعها. لهذا السبب يجري تدريسه في كثير من جامعات العالم بما في ذلك جامعة دمشق . وتقوم كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية بتدريس هذا المقرر في كافة أقسامها الهندسية لأنها تدرك أن حاجة المجتمع الدائمة إلى كادر هندسي مؤهل تأهيلا عميقا في العلوم الأساسية ، تفوق الحاجة إلى كادر هندسي مُدرّب فقط في حقول الاختصاص الضيقة .

علم الميكانيك هو أقدم العلوم الفيزيائية . ويعود تاريخ نشأته مع النشأة الأولى للعلوم الهندسية ، وحظي باهتمام العرب القدامى وكانوا يسمونه بعلم الحيل لأنه يحتاج إلى فن وذكاء وبراعة . وتعتمد التطورات الحديثة في الاجهزة والآلات الميكانيكية والكهربائية والالكترونية وتصميم الصواريخ والمركبات الفضائية والتحكم الآلي ، وسلوك الجزيئات والذرات والالكترونات على القواعد الأساسية لعلم الميكانيك ، ويعتبر الفهم الشامل لهذا العلم هو مطلب أساسي لهذه المجالات وكثير غيرها . تعتمد مبادئ علم الميكانيك بصورة خاصة على علم الرياضيات ، ولهذا فان الغاية من الميكانيك الهندسي هي تطبيق هذه المبادئ في حل المسائل العلمية . ورغم أن القواعد الأساسية لعلم الميكانيك محدودة غير أن تطبيقاته تغطي حقولا كثيرة من العلوم الهندسية.

ينقسم علم الميكانيك الهندسي إلى ثلاثة أجزاء هي : علم السكون وعلم الحركة وعلم التحريك . يقوم علم السكون بدراسة توازن الأجسام تحت تأثير القوى المطبقة عليها، بينما يهتم كل من علم الحركة والتحريك بدراسة حركة الأجسام .

مدرس المقرر

الفصل الأول

مبادئ علم السكون

STATICS PRINCIPLES

1–1 تمهيد :

تعاريف أساسية :

الميكانيك الهندسي : علم يهتم بدراسة تأثيرات القوى المختلفة في الأجسام الصلبة في حالتي السكون والحركة . يتكون هذا الفرع من ثلاثة أقسام هي :

علم السكون (Statics): يبحث في توازن الأجسام الصلبة في حالتي السكون والحركة المنتظمة. والشرط الأساسي للاتزان هو توازن القوى بحيث لا يطرأ تغير على حالة الجسم الواقع تحت تأثيرها.

علم الحركة (Kinematics): يبحث في حركة الأجسام الصلبة دون الرجوع إلى القوى المسببة للحركة .

علم التحريك (Kinetics): يبحث في حركة الأجسام الصلبة مع الرجوع إلى القوى المسببة للحركة .

مفاهيم أساسية :

الجسم الصلب (Rigid body) : هو الجسم الذي تكون الأبعاد بن مختلف نقاطه ثابتة مهما كانت القوى والمؤثرات الخارجية . في الواقع ، جميع الأجسام الصلبة تتشوه تحت تأثير القوى المؤثرة عليها ، لكن عندما يكون التشوه في الشكل صغير جدا عندها يمكن استخدام فرضية الجسم الصلب دون الوقوع في أخطاء تذكر .

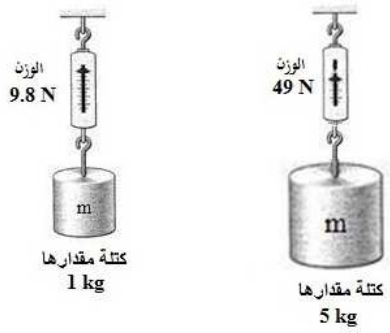
الجُسيم أو النقطة المادية (Particle) : هو جسم أهملت أبعاده وكتلته تتمركز في نقطة واحدة هي مركز ثقله . فعلى سبيل المثال يمكن اعتبار الأرض على أنها جُسيم في أثناء حركتها حول الشمس ، وكذلك الأمر بالنسبة للقمر في أثناء حركته حول الأرض.

الزمن (Time) : هو مقياس للفترة التي يستغرقها جسم ما في أثناء حركته أو خلال بقائه في حالة معينة .

الكتلة و الوزن (Mass &Weight) : لقد بينت التجربة أن كل جسم يكتسب عند سقوطه الحر على الأرض تسارعا وذلك تحت تأثير قوة تدعى قوة الجاذبية الأرضية ويرمز لها بالحرف **W** . وهذا التسارع المكتسب يسمى بتسارع الجاذبية الأرضية ويرمز له بالحرف g ، ومقداره يختلف باختلاف المكان على سطح الأرض وفي الحسابات التقريبية نعتبر $g = 9.8\ m/s^2$. وتُعرّف الكتلة بأنها مقدار المادة في جسم معين ، وتقدر عادة بوحدة الكيلوغرام Kg . أما الوزن **W** فيمثل قوة جذب الأرض للجسم ، ويقدر عادة بوحدة نيوتن N كما أنه يتحدد بالعلاقة الرياضية الشهيرة التالية :

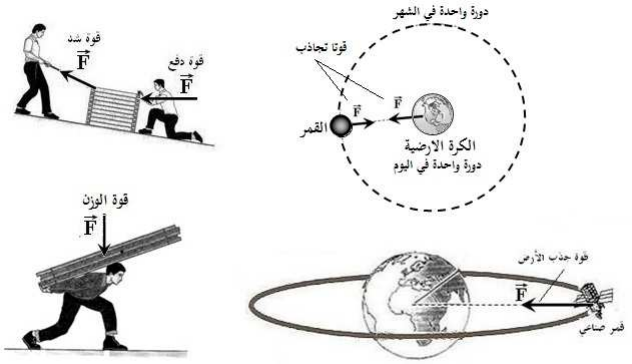
$$W = m\ g$$

حيث تمثل m كتلة الجسم ، وتمثل g تسارع الجاذبية الأرضية . الشكل (1-1) يعطي مثالا على العلاقة بين الكتلة والوزن ، حيث نلاحظ أن وزن كتلة مقدارها 1 kg يساوي 9.8 N بينما وزن كتلة مقدارها 5 kg يساوي 49 N .



الشكل(1-1)

القوة (Force) : هي تأثير جسم في جسم آخر . ويجري تمثيل هذه القوة هندسياً بشعاع ،كما يتعين تأثيرها بالمقدار (Magnitude) والاتجاه (Direction) بصورة أساسية . وهناك أنواع كثيرة من القوى كما هو مبين في الشكل (1–2)كقوة التجاذب بين كوكب الأرض الذي نعيش عليه والقمر، وقوى الوزن، وقوى الدفع، وقوى السحب، وقوى الشد، وقوى الضغط ،وقوة الجذب المغناطيسية ،وقوة مقاومة الرياح ،وقوى المقاومات الناتجة عن الاحتكاك بين السطوح المتلامسة.



الشكل(1–2)

الكميات العددية (Scalars) : هي كميات فيزيائية تتعين بقيمتها العددية فقط مثل الزمن والكتلة والمسافة والمساحة والحجم .

الكميات الشعاعية أو المتجهات (Vectors) : هي كميات فيزيائية تتعين بقيمتها العددية واتجاهها مثل القوة والموضع والسرعة والتسارع .

وحدات القياس :

في الوقت الحاضر ، يستخدم في معظم جامعات العالم وعلى نطاق واسع نظام الوحدات العالمي SI بدلا من النظام الانكليزي التقليدي. إلا أن الضرورة تقتضي الإلمام بالنظامين بسبب استخدامهما في الأسواق المحلية والعالمية. يبين الجدول التالي الكميات الأساسية المستعملة في علم الميكانيك.

جدول وحدات القياس المتداولة			
التسميات	**الرمز**	**وحدة القياس العالمية**	**وحدة القياس الانكليزية**
الطول Length	L	متر (m)	• قدم foot (ft) • بوصة inch (in.)
الكتلة Mass	M	كيلوغرام (kg)	رطل كتلي (lbm)
القوة Force	F	نيوتن (N)	رطل Pound (lb)
الزمن Time	T	ثانية (S)	ثانية (S)
عزم القوة Moment	M	نيوتن–متر (N-m)	• رطل–قدم (lb-ft) • رطل–بوصة (lb-in.)
السرعة Velocity	V	متر / ثانية (m/s)	قدم / ثانية (ft/s)
التسارع Acceleration	A	متر / مربع الثانية (m/s^2)	قدم / مربع الثانية (ft/s^2)
المساحة Area	A	متر مربع (m^2)	قدم مربع (ft^2)

التحويل من الوحدات الانكليزية إلى الوحدات العالمية :

$$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$$

$$1 \text{ in.} = 25.4 \text{ mm} = 0.0254 \text{ m}$$

$$1 \text{ lb mass} = 0.4536 \text{ kg}$$

$$1 \text{ lb} = 4.448 \text{ N}$$

$$1 \text{ ft/s} = 0.3048 \text{ m/s}$$

$$1 \text{ ft/s}^2 = 0.3048 \text{ m/s}^2$$

$$1 \text{ lb–ft} = 1.356 \text{ N–m}$$

$$1 \text{ ft}^2 = 0.0929 \text{ m}^2$$

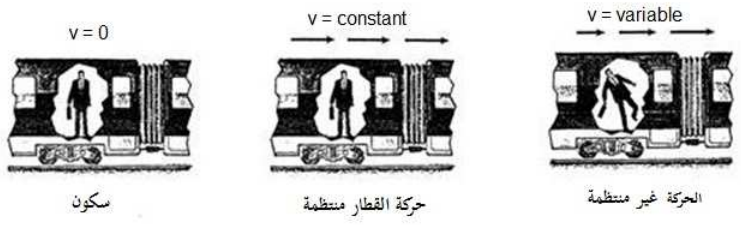
قوانين أساسية :

1- **مبدأ العطالة أو القصور الذاتي** : يعرف هذا المبدأ أيضا بقانون الحركة الأول (First law of motion) وهو يبين أن جميع الأجسام في الطبيعة عاجزة عن تحريك ذاتها إلا إذا خضعت لتأثير قوى خارجية. وينص : يبقى الجسم الساكن ساكنا ويحافظ الجسم المتحرك بانتظام على حالته ما لم تؤثر فيهما قوة تغير من حالتيهما الراهنة .

2- **القانون الأساسي في التحريك** : يعرف هذا المبدأ أيضا بقانون الحركة الثاني(Second law of motion) وينص :إذا أثرت قوة **F** في جسم كتلته m فانه يكتسب تسارعا a يتناسب تناسبا طرديا مع القوة ويؤثر بجهتها . ويعبر عن ذلك بالعلاقة الرياضية التالية :

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a} \quad \text{or} \quad \sum\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

وينتج من هذه العلاقة أنه إذا كانت القوة F أو محصلة القوى $\sum F$ المؤثرة في جسم ما تساوي صفرا فان التسارع يكون مساويا للصفر (a = 0) . وبناء على ذلك يكون الجسم إما ساكنا (v = 0) وإما متحركا بسرعة خطية ثابتة في المقدار والاتجاه (v = constant). وعلم السكون يهتم فقط بدراسة اتزان الأجسام في حالتي السكون والحركة المنتظمة في خط مستقيم . يظهر المثال المبين في الشكل(1-3) اتزان القطار عندما يكون في حالتي السكون والحركة المنتظمة ، بالإضافة إلى حالة فقد الاتزان عندما تكون حركة القطار غير منتظمة.



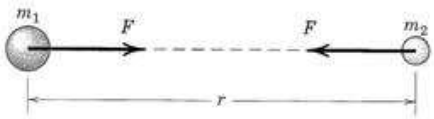
الشكل(1-3)

3- **مبدأ الفعل ورد الفعل** : يعرف هذا المبدأ أيضا بقانون الحركة الثالث (Third law of motion) وينص : كل فعل يقابله رد فعل يساويه بالمقدار ويعاكسه بالاتجاه ولهما نفس الحامل .

4- **قانون التجاذب** (Law of gravitation) وينص : إن قوة التجاذب بين أي جسمين في الطبيعة تتناسب طردا مع جداء كتلتيهما وعكسيا مع مربع المسافة بينهما .

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad ; \quad G = 6.673(10^{-11})\ m^3/(kg.s^2)$$

حيث G يمثل ثابت الجاذبية العام .

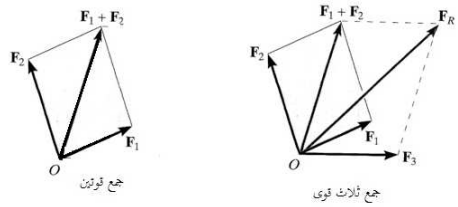


الشكل(1–4)

5- **مبدأ انزياح القوة** (Principle of Transmissibility of Force) : لا يتغير شرط التوازن لجسم صلب عند انزياح نقطة تأثير القوة على امتداد حامل تلك القوة.

الشكل(1–5)

6- **قانون متوازي الأضلاع لجمع القوى** (Law of parallelogram) : محصلة قوتين مؤثرتين في نقطة ما من جسم صلب تساوي بطولها قطر متوازي الأضلاع المنشأ على هاتين القوتين .ويوضح الشكل(1–6) كيفية جمع أكثر من قوتين.

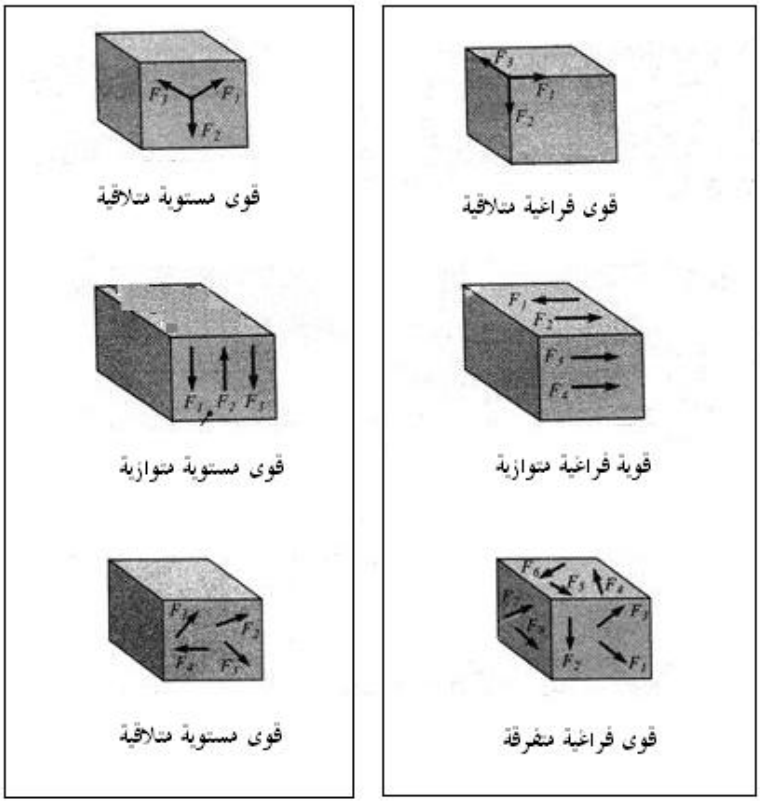


الشكل(1–6)

2–1 مجموعات القوى Force Systems:

مجموعة القوى : هي عدة قوى تؤثر في جسم صلب في آن واحد .وتصنف مجموعات القوى (الشكل 1–7) كما يلي :

- مجموعات القوى المستوية (Coplanar Force Systems): وتكون إما قوى متلاقية أو متوازية أو متفرقة .
- مجموعات القوى الفراغية (Non-coplanar Force Systems): وتكون إما قوى متلاقية أو متوازية أو متفرقة .



الشكل(1–7)

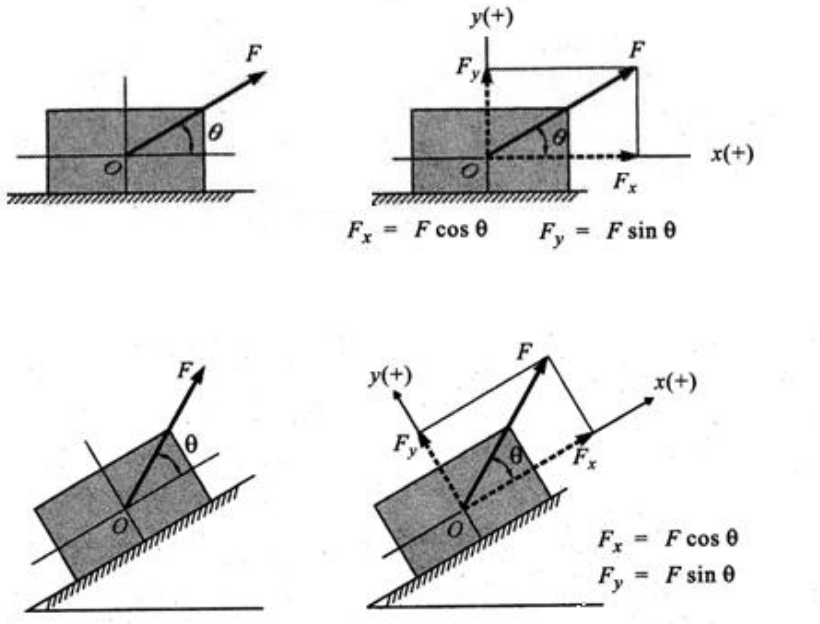
المركبات المتعامدة للقوة (Rectangular Components)

إن تحليل القوة **F** إلى مركبتين متعامدتين $\mathbf{F}_x$ و $\mathbf{F}_y$ كما هو واضح في الشكل (1-8) هو طريقة التحليل الشائعة . بعد تأمل الشكل نلاحظ أن :

$$F_x = F \cos \theta \qquad F_y = F \sin \theta$$

حيث تمثل F مقدار الشعاع **F** ويمثل كل من F_x و F_y قيم الشعاعين $\mathbf{F}_x$ و $\mathbf{F}_y$ ، وبالاستعانة بشعاعي الواحدة **i** و **j** يمكن كتابة معادلة القوة بالشكل الهندسي التالي :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$$

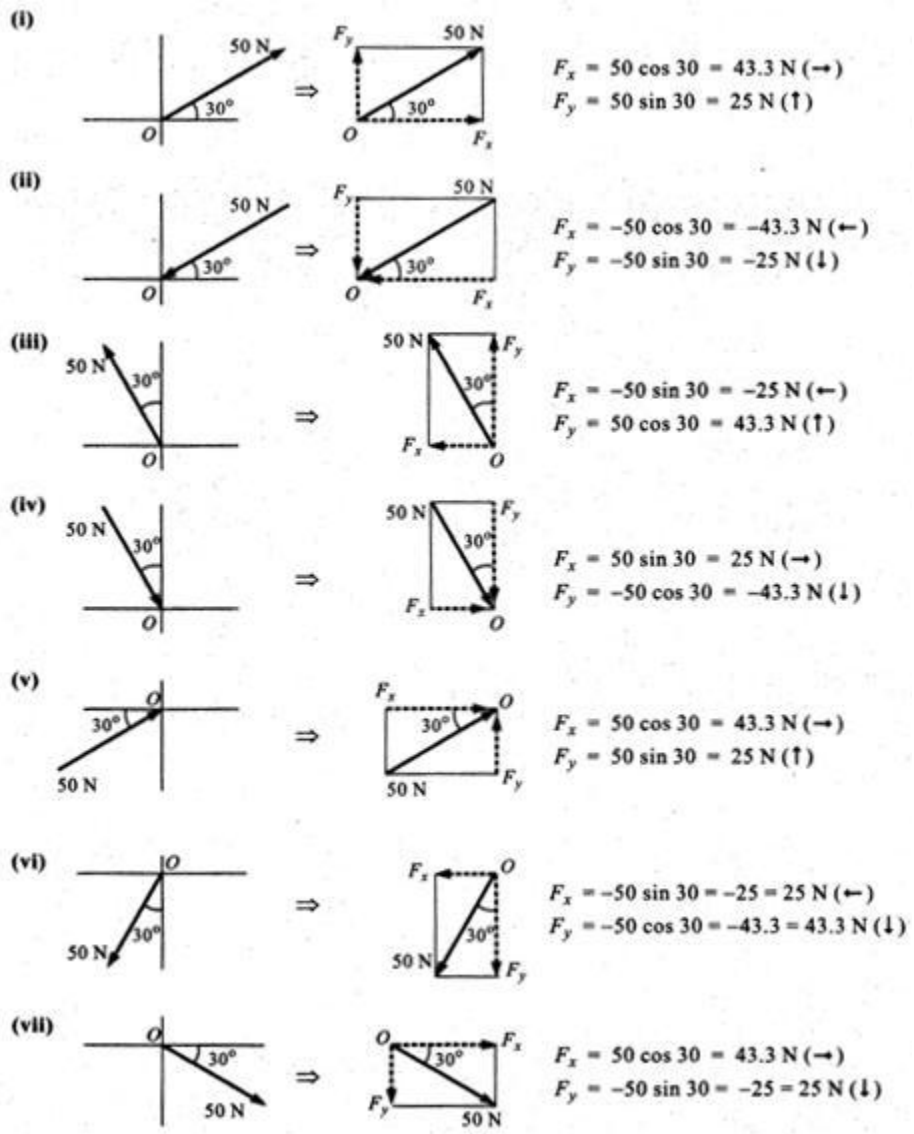


الشكل(1-8)

يختار الطالب في الغالب جملة الإحداثيات في المسائل حسب رغبته ، غير أن الاختيار المنطقي يعتمد على طبيعة وشكل المسالة المراد حلها . يقدم المثال (1-1) كيفية تحليل القوة المؤثرة في اتجاهات مختلفة .

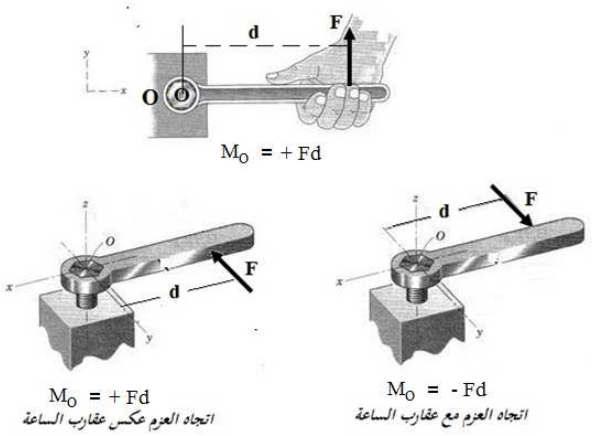
مثال (1–1)

المطلوب تحليل القوة المعلومة **F** إلى مركبتين متعامدتين إحداهما أفقية والأخرى شاقولية.



عزم القوة (Moment of a Force)

تبين التجربة أن الجسم الصلب يمكن أن يتحرك بتأثير قوة ما حركة دائرية حول محور لا يقطع المستقيم الحامل للقوة ولا يوازيه . ويدعى هذا التأثير بعزم القوة أو عزم الدوران . وعندما تكون جميع القوى التي يخضع لها الجسم واقعة في مستو واحد فمن المعتاد أن نقول العزم حول نقطة،والمقصود هو العزم حول محور يمر من تلك النقطة وعمودي على مستوي القوى.هذا وينعدم عزم قوة حول نقطة إذا وقعت النقطة على المستقيم الحامل للقوة .كما يبقى عزم قوة حول نقطة ما ثابتا مقدارا واتجاها إذا انزلقت القوة على خط عملها. وقد جرت العادة أن نعتبر العزم موجبا إذا كانت القوة تحاول تدوير الجسم حول نقطة ما في اتجاه معاكس لاتجاه دوران عقارب الساعة،وان نعتبره سالبا عندما تحاول القوة تدوير الجسم في اتجاه دوران عقارب الساعة.وهكذا يكون لعزم القوة F_1 بالنسبة إلى النقطة المبينة في الشكل(1-9) إشارة موجبة ،ولعزم القوة F_2 بالنسبة إلى النقطة نفسها إشارة سالبة.



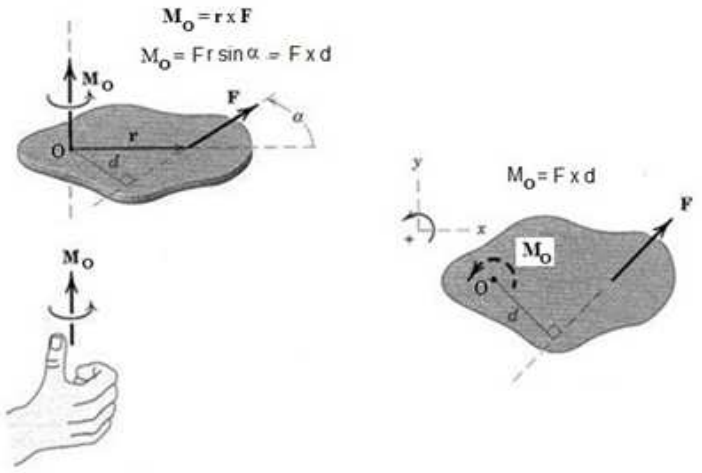
الشكل(1-9)

ويقاس هذا العزم بجداء مقدار القوة في البعد بين تلك النقطة وحامل القوة أي أن :

$$M_O = F \times d$$

إن الوحدة الأساسية للعزم في نظام الوحدات العالمي SI هي نيوتن–متر (N-m) وفي النظام الأمريكي هي رطل–قدم (lb-ft) .

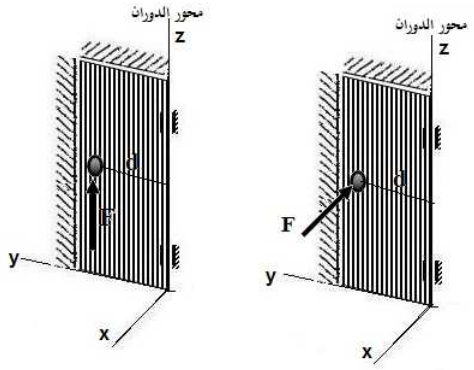
في التطبيقات الهندسية نمثّل عادة عزم قوة ما **F** بالشعاع **M** العمودي على مستوي الجسم والذي يتحدد اتجاهه بواسطة قاعدة اليد اليمنى ، حيث يشير الإبهام إلى اتجاه الشعاع وثني بقية الأصابع يدل على اتجاه الدوران كما هو مبين في الشكل(1–10).



الشكل(1–10)

وفي حالة القوى الواقعة في مستو واحد يمكن تمثيل العزم بسهم منحني فقط والاستغناء عن الشعاع المستقيم ، طالما أن الشعاع يكون خارجا من مستوي الرسم (الدوران بعكس عقارب الساعة) أو داخلا إليه (الدوران مع عقارب الساعة).

يجب أيضا أن نوضح بعجالة مفهوم عزم القوة حول محور حتى يتسنى لنا الانتقال إلى حل مسائل مجموعات القوى الفراغية .ليكن لدينا الباب المبين في الشكل(1–11) والمتمفصل حول المحور Z ولتكن F قوة ما تؤثر على مقبض الباب. من الملاحظ انه إذا كانت القوة واقعة في مستوي الباب فإنها لن تؤدي إلى فتحه بينما إذا كانت هذه القوة عمودية على مستوي الباب فإنها تستطيع فتح الباب بتدويره حول المحور Z . ينتج مما تقدم :



الشكل(1–11)

- إذا كانت القوة موازية للمحور فان عزمها حول هذا المحور يساوي صفرا.
- إذا كانت حامل القوة يقطع المحور فان عزمها حول هذا المحور يساوي صفرا أيضا.
- إذا كان اتجاه القوة عموديا على المحور فان عزمها حوله يساوي جداء مقدار القوة في البعد بين القوة والمحور .

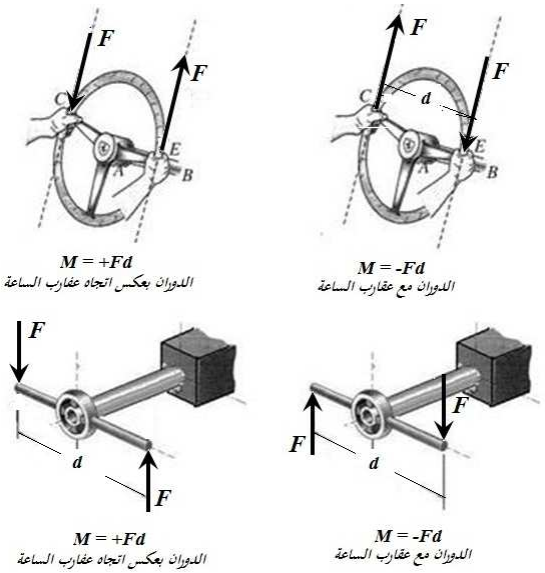
قاعدة العزوم : تعتبر قاعدة العزوم والمسماة مبرهنة فارغنون (Varignon Theorem) من أهم القواعد في علم السكون وتنص : إن عزم قوة ما حول نقطة ما يساوي مجموع عزوم مركبات تلك القوة حول نفس النقطة.

عزم المزدوجة (Moment of Couple)

المزدوجة عبارة عن قوتين متوازيتين ومتساويتين تعملان في اتجاهين متضادين . ويعرف مستوى القوتين المؤثرين في جسم ما بمستوى تأثير المزدوجة ، بينما تدعى المسافة العمودية الفاصلة بين القوتين بذراع المزدوجة.كما يسمى العزم الناتج عن جداء إحدى قوتي المزدوجة بطول ذراعها بعزم المزدوجة . ويعتبر عزم المزدوجة موجبا إذا عملت المزدوجة على تدوير الجسم بعكس دوران عقارب الساعة كما في الشكل(1–12) ، وسالبا إذا عملت على تدوير الجسم بنفس اتجاه دوران عقارب الساعة ،وعند ذلك يكون :

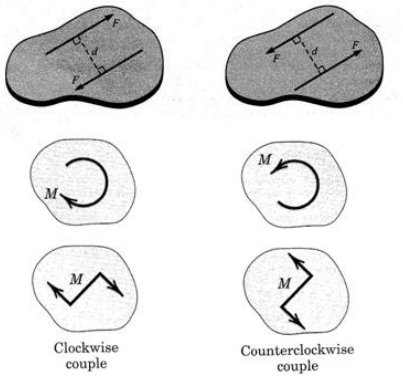
$$M = \pm F \times d$$

ويقاس عزم المزدوجة بنفس وحدات قياس عزم القوة أي بوحدة نيوتن–متر (N-m) والتي تمثل الوحدة الأساسية للعزم في النظام العالمي الخاص بوحدات القياس.



الشكل(1–12)

ويوضح الشكل(1–13) كيفية تمثيل المزدوجة في التطبيقات الهندسية ، وينبغي عدم الخلط بين مفهوم عزم القوة ومفهوم عزم المزدوجة .فمفهوم عزم القوة يتعلق بالنقطة التي يؤخذ بالنسبة لها العزم ، أما عزم المزدوجة فلا يتعلق مقداره بأية نقطة في المستوي .

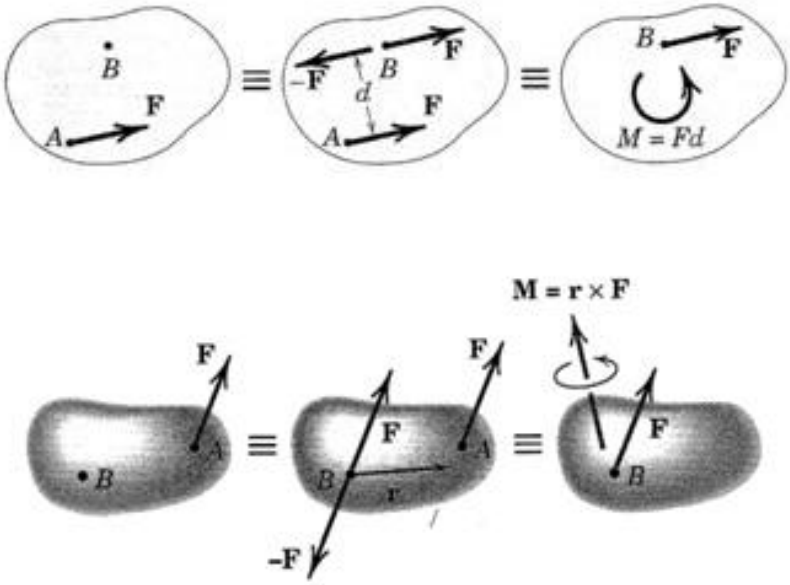


الشكل(1–13)

ومن الخصائص الهامة للمزدوجة انه يمكن نقلها من المستوي الواقعة فيه إلى أي مستو آخر يوازيه دون أن يغير ذلك من عزم المزدوجة. ومن القواعد الهامة كما واضح في الشكل(1-14) انه يمكن نقل أية قوة تؤثر في جسم ما نقلا موازيا إلى أية نقطة أخرى من الجسم دون إحداث إي تغيير في تأثيرها عليه ، شريطة إضافة مزدوجة عزمها يساوي عزم القوة المنقولة بالنسبة إلى النقطة التي نقلت إليها. ويتضح هذا من الشكل الأوسط الذي يتضمن إضافة قوتين متساويتين ومتعاكستين في الاتجاه في النقطة B .

إن القوة الأصلية في النقطة A والقوة المساوية لها والمعاكسة في الاتجاه في النقطة B تشكلان معا مزدوجة عزمها M=Fd وجهته بعكس عقارب الساعة.

وبناء على ما سبق يجوز تحويل جملة مؤلفة من قوة ومزدوجة إلى قوة واحدة فقط وذلك إذا عكسنا الخطوات السابقة .إن عملية الاستبدال هذه تتكرر بكثرة في التطبيقات الهندسية .

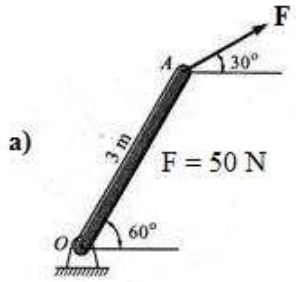


الشكل(1-14)

مثال (1–2)

أوجد عزم القوة المعلومة **F** المؤثرة في الذراع OB بالنسبة للنقطة O كما هو موضح في الشكل المرافق .

الحل : الطريقة الأولى :



نُسقط عمودا من النقطة O على حامل القوة **F** فنحصل على ذراع العزم d والذي يحسب كما يلي :

$$d = 3 \sin 30° = 1.5 \text{ m}$$

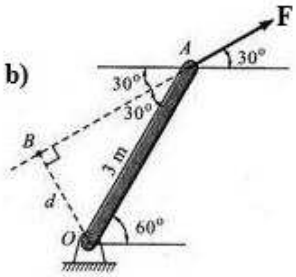
وبما أن :

$$m_o(\mathbf{F}) = F \times d$$

فإن :

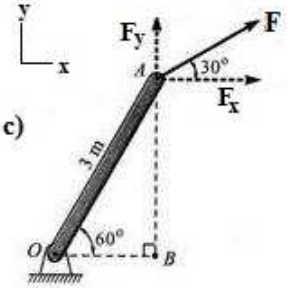
$$m_o(\mathbf{F}) = -50 \times 1.5 = -75 \text{ N-m}$$

تدل الإشارة السالبة على أن القوة تحاول إحداث دوران باتجاه عقارب الساعة.



الطريقة الثانية :

نحلل القوة **F** إلى مركبتين متعامدتين ثم نستخدم مبرهنة فارغنون فنجد:



$$m_o(\mathbf{F}_x) = 50 \cos 30 \times 3 \sin 60$$
$$m_o(\mathbf{F}_y) = -50 \sin 30 \times 3 \cos 60$$
$$m_o(\mathbf{F}) = m_o(\mathbf{F}_x) + m_o(\mathbf{F}_y)$$

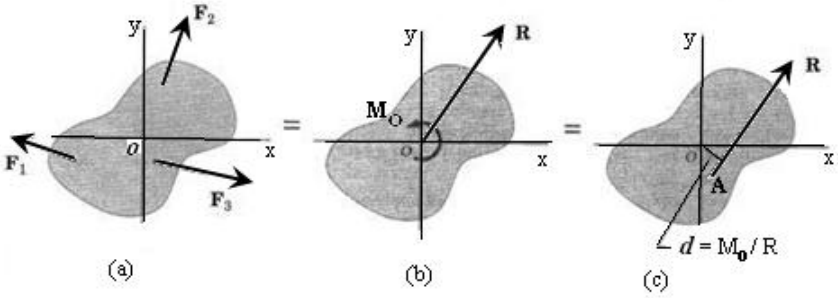
بالتعويض نحصل على :

$$m_o(\mathbf{F}) = -75 \text{ N-m}$$

وهي نفس النتيجة السابقة .

1–3 محصلات القوى المستوية (Resultants) :

كثيرا ما نحتاج إلى استبدال مجموعة القوى المؤثرة في جسم ما بجملة أخرى تكون مكافئة لها ولكن أبسط منها تسمى المحصلة . وبصورة عامة فان المحصلة هي عبارة قوة وحيدة (Single force) أو مزدوجة (Single Couple) فقط أو قوة ومزدوجة معا (Force-couple system) ، يمكن أن تحول إليها مجموعة من القوى المؤثرة في جسم ما دون إحداث أي تغيير في تأثيرها عليه. كما تدعى عملية الاستبدال المذكورة بعملية اختصار أو اختزال القوى وهي موضحة في الشكل (1–15) .



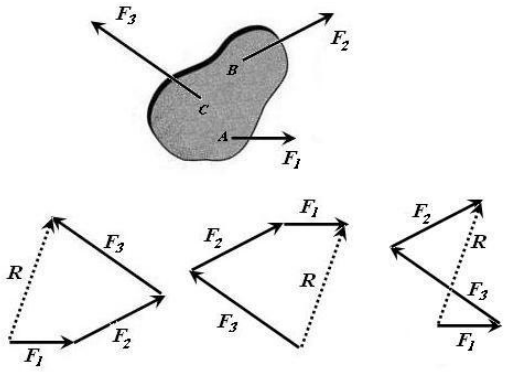
الشكل(1–15)

هذا وتتحدد محصلة مجموعة ما من القوى بإحدى الطريقتين التاليتين :

- الطريقة البيانية (Graphical Method)
- الطريقة التحليلية (Method of Resolution)

الطريقة البيانية : ليكن لدينا جملة القوى المطبقة في النقاط من الجسم المبين في الشكل(1–16) . لتعيين المحصلة نختار نقطة ما من المستوي ثم نقوم بجمع كل القوى بصورة شعاعية واحدة تلو الأخرى بمقياس رسم مناسب مع الأخذ بعين الاعتبار اتجاهات القوى .فنحصل على خط منكسر يسمى مضلع القوى ، ويمثل عندئذ الشعاع الذي يغلق مضلع القوى المحصلة قيمة واتجاها .وبما أن تعيين المحصلة بهذه الطريقة يصبح عملا

شاقا إذا كانت هذه القوى كثيرة العدد لذا يفضل استخدام الطريقة التحليلية نظرا لبساطتها.



الشكل(1–16)

الطريقة التحليلية : يمكننا الحصول على قيمة واتجاه المحصلة من العلاقات التالية:

$$R_x = \Sigma F_x$$
$$R_Y = \Sigma F_Y$$
$$R = \sqrt{(\Sigma F_X)^2 + (\Sigma F_Y)^2}$$
$$\theta = tan^{-1} \frac{\Sigma F_Y}{\Sigma F_X}$$
$$M_R = \Sigma M_O$$
$$R \times d = \Sigma M_O$$

حيث R_x و R_y هما مسقطا المحصلة **R** على المحورين x و y على الترتيب.

ΣF_x و ΣF_y هما المجموعان الجبريان لمساقط القوى على المحورين x و y .

θ هي الزاوية التي تصنعها المحصلة **R** مع المحور x

ΣM_O المجموع الجبري لعزوم قوى المجموعة

M_R عزم المحصلة **R** .

d طول ذراع عزم المحصلة **R**

استنادا إلى العلاقات السابقة يتحدد موضع قوة المحصلة بتطبيق قاعدة العزوم التي تقول: إن عزم المحصلة بالنسبة إلى أي نقطة يساوي المجموع الجبري لعزوم قوى المجموعة بالنسبة إلى النقطة نفسها.فإذا ما حصلنا على عزم المحصلة بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات أمكننا الحصول على ذراعها d . توضح الأمثلة التالية كيفية تحديد المحصلة لبعض أنواع مجموعات القوى المستوية .

مثال (1– 3)

أوجد محصلة جملة القوى المتلاقية المؤثرة في رأس المسمار الموضح في الشكل المبين أدناه .

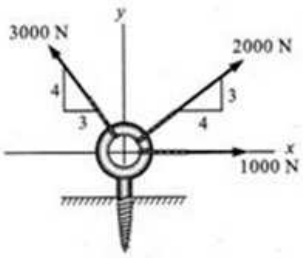


Fig. 2.7(a)

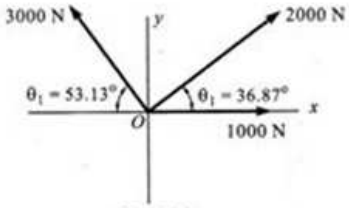


Fig. 2.7(b)

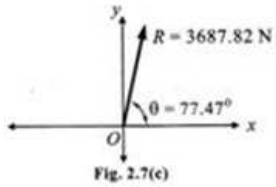
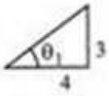


Fig. 2.7(c)

الحـــــــل



$\tan\theta_1 = \frac{3}{4} \quad \therefore\ \theta_1 = 36.87^\circ$

$\tan\theta_2 = \frac{4}{3} \quad \therefore\ \theta_2 = 53.13^\circ$

$\Sigma F_x = 1000 + 2000\cos 36.87 - 3000\cos 53.13$

$\Sigma F_x = 799.99 \approx 800\ \text{N}\ (\rightarrow)$

$\Sigma F_y = 2000\sin 36.87 + 3000\sin 53.13$

$\Sigma F_y = 3600\ \text{N}\ (\uparrow)$

مقدار المحصلة :

$R = \sqrt{(800)^2 + (3600)^2}$

$R = 3687.82\ \text{N}$

زاوية ميل المحصلة :

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3600}{800}\right)$

$\theta = 77.47^\circ$

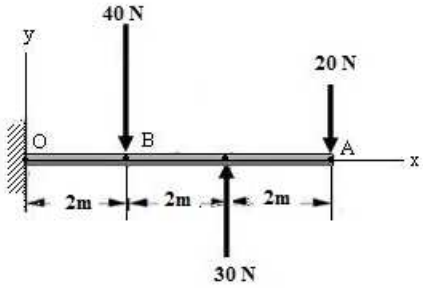
مثال (1– 4)

تؤثر جملة من القوى المتوازية في الذراع الموضح في الشكل المبين أدناه.والمطلوب :

a) استبدل جملة القوى المعطاة بجملة مكافئة عند النقطة B .

b) استبدل جملة القوى المعطاة بجملة مكافئة عند النقطة A .

الحل :



a) استبدال جملة القوى المعطاة بجملة مكافئة عند النقطة B .

$R = \Sigma F = -40 + 30 - 20$

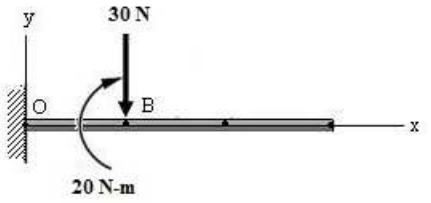
$R = -30$ N

$\Sigma M_A = -40 \times 4 - 30 \times 2$

$\Sigma M_A = -30$ N-m

يوضح الشكل الجملة المكافئة الناتجة عند النقطة المطلوبة.

b) استبدال جملة القوى المعطاة بجملة مكافئة عند النقطة B .



$R = -30$ N

$\Sigma M_B = -30 \times 2 - 20 \times 4$

$\Sigma M_B = -20$ N-m

يوضح الشكل الجملة المكافئة عند النقطة.

محصلات القوى الموزعة (Resultants of Distributed Forces)

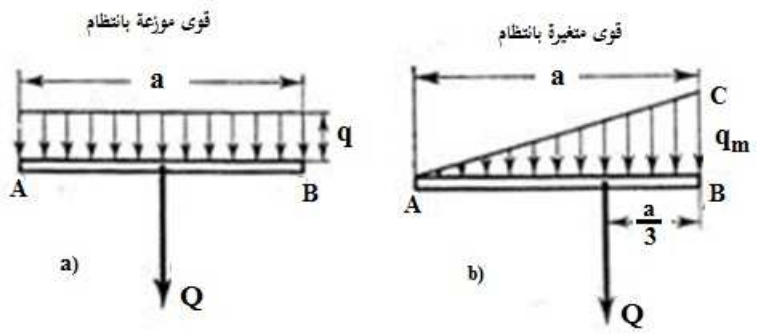
كثيرا ما نصادف في الحسابات الهندسية أثقالا موزعة على سطح ما حسب هذا القانون أو ذاك .ونميز المجموعة المستوية من القوى الموزعة عادة بشدة إجهادها q ، أي بمقدار القوة المؤثرة على وحدة الطول من السطح المحمل . وتقاس شدة الإجهاد q بوحدة

القياس N/m . يوضح الشكل (1-17) كيفية تحديد المحصلة لبعض أشكال القوى الموزعة الواقعة في مستو واحد .

القوى الموزعة بانتظام : تكون شدة الإجهاد q لمثل هذه المجموعة مقدارا ثابتا.ويمكن عند الحسابات أن نستبدل تأثير هذه المجموعة بتأثير محصلتها **Q** المساوية في المقدار ما يلي:

$$Q = qa$$

وتؤثر هذه القوة في منتصف المستقيم AB .



الشكل(1-17)

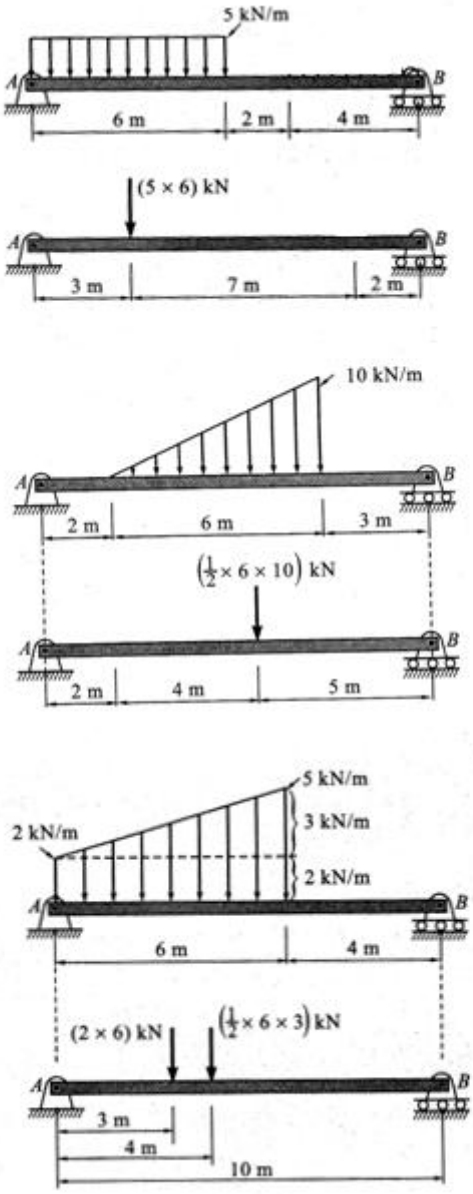
القوى المتغيرة بانتظام : تكون شدة الإجهاد q لمثل هذه المجموعة مقدارا متغيرا يزداد من الصفر حتى نهاية عظمى q_m . وعند إجراء الحسابات نستبدل تأثير هذه المجموعة بتأثير محصلتها Q والتي تتحدد بمساحة المثلث الذي تشكله ، وعليه تحسب هذه المحصلة بالعلاقة :

$$Q = \frac{1}{2}\,qa$$

إن خط تأثير هذه المحصلة يجب أن يمر من مركز ثقل المثلث والذي يقع في نقطة تلاقي متوسطاته . ولهذا فهو يبعد بثلث المسافة a عن الضلع BC كما هو مبين في الشكل .

مثال (1– 5)

أوجد محصلة القوى الموزعة المؤثرة في الذراع AB في الحالات الثلاث المبينة في الشكل المبين أدناه .

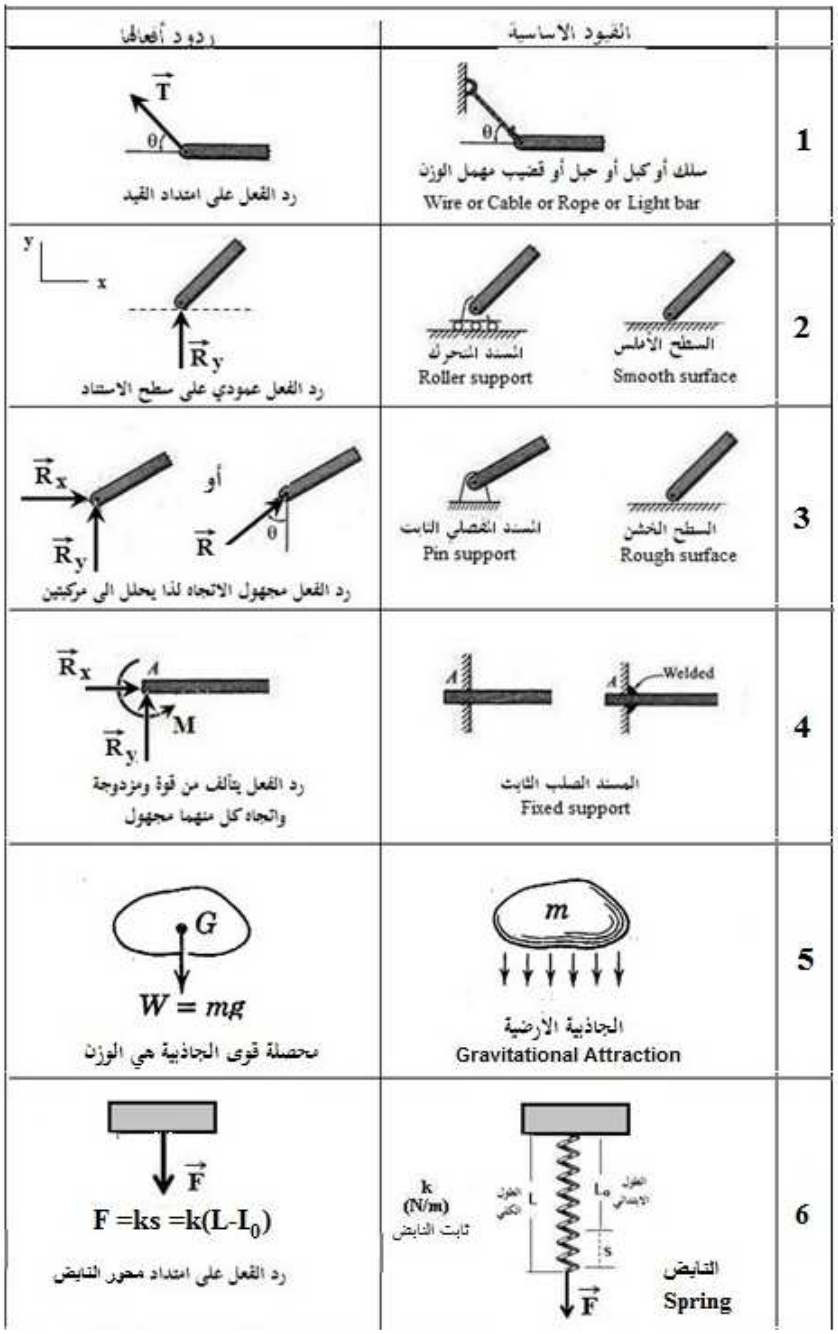


1–4 القيود وردود أفعالها (Constrains and their Reactions)

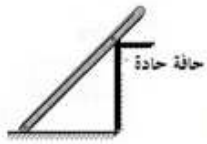
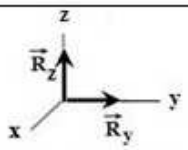
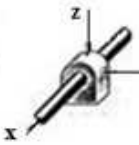
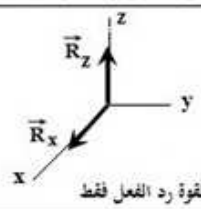
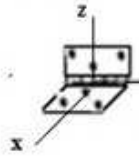
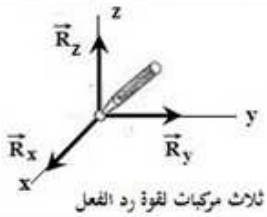
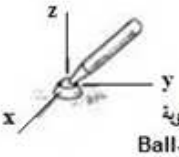
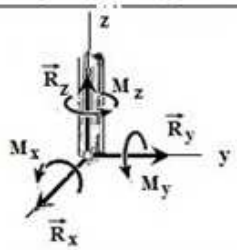
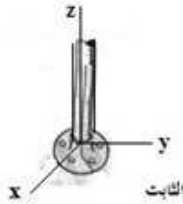
لدراسة توازن جسم ما نحدد أولا شكل القوى المؤثرة فيه .وهنا يجب أن نميز بين القوى المسلطة على الجسم والقوى المعروفة بردود أفعال القيود. ويبين كل من الشكلين (1–18)و(1–19) كيفية تحديد ردود الأفعال في الأنواع المختلفة للمساند والقيود التي تصادفنا في المسائل والتطبيقات الهندسية ، وتشمل الآتي :

1. الحبال (Ropes) والأسلاك (Wires) والسلاسل(Chains) والقضبان الخفيفة مهملة الوزن : عندما يقيد جسم بحبل أو سلك أو سلسلة فان رد الفعل هو قوة على امتداد القيد كما هو مبين في الشكل (1–18).
2. السطح الأملس والمسند المتحرك (Smooth surface & Roller support) : عندما يستند جسم إلى سطح أملس فان رد الفعل يكون عموديا على سطح الاستناد في نقطة التماس . وعندما يقيد جسم بمسند متحرك أيضا فان رد الفعل هو قوة عمودية على سطح الاستناد كما هو مبين في الشكل (1–18).
3. المسند المفصلي الثابت (Pin support) : عندما يقيد جسم بمسند مفصلي ثابت فان رد الفعل يكون مجهول الاتجاه لذا يحلل إلى مركبتين باتجاه المحاور الإحداثية كما هو مبين في الشكل (1–18)..
4. المسند الصلب الثابت (Fixed support) : عندما يثبت طرف جسم بشكل صلب ، بواسطة اللحام مثلا ، فان رد الفعل يكافئ قوة R ومزدوجة ذات عزم M . كما أن القوة المذكورة مجهولة الاتجاه لذا يمكن تحليلها إلى مركبتين متعامدتين باتجاه المحاور الإحداثية كما هو مبين في الشكل (1–18). .
5. الجاذبية الأرضية (Gravitational Attraction) : إن محصلة قوى الجاذبية الأرضية المؤثرة في جسم صلب هي قوة وحيدة تسمى وزن الجسم W وتتجه رأسيا للأسفل وتمر من مركز ثقل الجسم .

6. النوابض (Springs) : عندما يقيد جسم بنابض فان رد الفعل هو قوة على امتداد محور ذلك النابض . وتحسب قوة النابض عادة بالعلاقة الموضحة في الشكل(1-18).حيث k يمثل ثابت النابض (Spring constant) ويقدر بوحدة N/m ، أما s فتمثل التغير(Deformation of the spring) الذي يطرأ على طول النابض بفعل قوة الشد أو الضغط المؤثرة فيه.
7. الحواف الحادة (Knife Edges) : عندما يستند جسم إلى حافة حادة فان رد الفعل هو قوة عمودية على سطح الجسم.
8. المسند الاسطواني (Bearing) : عندما يقيد جسم ثلاثي الأبعاد بمسند اسطواني كما هو مبين في الشكل (1-19) فان رد الفعل يكون مجهول الاتجاه لذا يحلل إلى مركبتين باتجاه المحاور الإحداثية.
9. المفصلة الاسطوانية (Hinge) : عندما يقيد جسم ثلاثي الأبعاد بمفصلة اسطوانية كما هو مبين في الشكل (1-19)، فان رد الفعل يكون مجهول الاتجاه ، لذا يحلل إلى مركبتين عندما تكون القوى الفعالة المؤثرة في الجسم المفروض واقعة في مستو واحد .
10. المفصلة الكروية (Ball-and-Socket) : عندما يقيد جسم ثلاثي الأبعاد بمفصلة كروية كما هو مبين في الشكل (1-19)فان رد الفعل يكون مجهول الاتجاه لذا يحلل إلى ثلاث مركبات باتجاه المحاور الإحداثية.
11. المسند الصلب الثابت لجسم ثلاثي الأبعاد (Fixed support) : عندما يثبت طرف جسم ثلاثي الأبعاد بشكل صلب كما هو مبين في الشكل (1-19) ، فان رد الفعل يكافئ ثلاث مركبات لقوة رد الفعل وثلاث مزدوجات.


ردود أفعالها
القيود الاساسية
1
سلك أو كبل أو حبل أو قضيب مهمل الوزن
Wire or Cable or Rope or Light bar
رد الفعل على امتداد القيد
2
السطح الأملس
Smooth surface
المسند المتحرك
Roller support
رد الفعل عمودي على سطح الاستناد
3
السطح الخشن
Rough surface
المسند المفصلي الثابت
Pin support
أو
رد الفعل مجهول الاتجاه لذا يحلل الى مركبتين
4
Welded
المسند الصلب الثابت
Fixed support
رد الفعل يتألف من قوة ومزدوجة
واتجاه كل منهما مجهول
5
الجاذبية الأرضية
Gravitational Attraction
محصلة قوى الجاذبية هي الوزن
6
k
(N/m)
ثابت النابض
التمديد الابتدائي
التمديد الكلي
النابض
Spring
رد الفعل على امتداد محور النابض

الشكل(1–18)

ردود أفعالها	القيود الاساسية	
رد الفعل عمودي على سطح الجسم	 الحافة الحادة Knife edge	7
 مركبتان لقوة رد الفعل فقط	 المسند الاسطواني Bearing	8
 مركبتان لقوة رد الفعل فقط	 المفصلة الاسطوانية Hinge	9
 ثلاث مركبات لقوة رد الفعل	 المفصلة الكروية Ball-and-Socket	10
 ثلاث مركبات لقوة رد الفعل وثلاث مزدوجات	 المسند الصلب الثابت Fixed support	11

الشكل(1–19)

الفصل الثاني

توازن القوى المستوية

EQUILIPRIUM 0F COPLANAR FORCES

2–1 معادلات التوازن :

إذا كان الجسم ساكنا أو متحركا بحركة مستقيمة منتظمة تحت تأثير مجموعة من القوى المعينة نقول إن الجسم واقع في حالة التوازن . كما أن مجموعة القوى التي تؤثر في الجسم ولا تغير من حالته تدعى مجموعة متوازنة . وبتعبير آخر إذا أثرت في جسم ما مجموعة قوى متوازنة نقول إن هذه القوى تقع في حالة التوازن أي أنها توازن بعضها بعضا.

وبناء على ما سبق ، يعد الجسم متوازنا إذا كان ساكنا أو متحركا بحركة منتظمة. وبالعودة إلى القانون الأول لنيوتن فان الجسم يكون متوازنا عندما تساوي محصلة القوى المؤثرة عليه الصفر . وبما أننا نستطيع على وجه العموم تحويل أية مجموعة من القوى إلى جملة مكافئة ابسط تتألف من قوة **R** ومزدوجة عزمها **M** عندئذ نحصل على معادلات التوازن بصيغتها العامة التالية :

$$\mathbf{R} = \Sigma\, \mathbf{F} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{M} = \Sigma\, \mathbf{M} = \mathbf{0}$$

حيث :

$\Sigma\, \mathbf{F}$ المجموع الشعاعي لقوى المجموعة المفروضة.

$\Sigma\, \mathbf{M}$ المجموع الشعاعي لعزوم كل قوى المجموعة المفروضة بالنسبة لأية نقطة .

توضح الفقرة التالية كيفية تطبيق معادلات التوازن على الأنواع المختلة لمجموعات القوى الواقعة في مستو واحد .

تتلخص الشروط التحليلية لتوازن مجموعة من القوى المتلاقية في الآتي :

$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$

نطبق شرطي التوازن على جملة القوى المتلاقية المبينة في الشكل(2–1) فنجد :

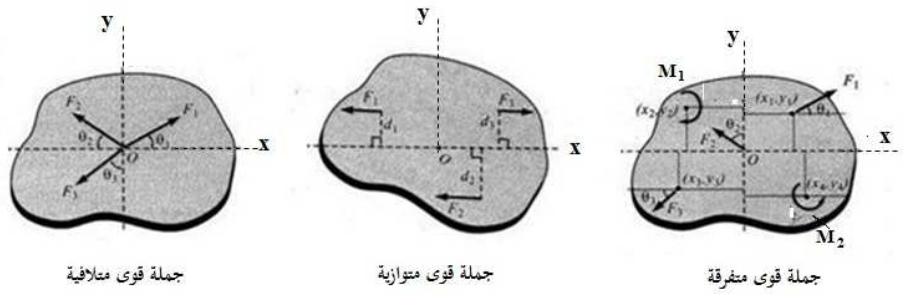
$$\Sigma F_x = F_1 \cos\theta_1 - F_2 \cos\theta_2 - F_3 \sin\theta_3 = 0$$
$$\Sigma F_y = F_1 \sin\theta_1 + F_2 \sin\theta_2 - F_3 \cos\theta_3 = 0$$

أما الشروط التحليلية لتوازن مجموعة من القوى المتوازية،والموازية مثلا للمحور الأفقي x فهي:

$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma M_o = 0$$

نطبق شرطي التوازن على جملة القوى المتوازية المبينة في الشكل(2–1) فنجد :

$$\Sigma F_x = F_1 - F_2 + F_3 = 0$$
$$\Sigma M_o = F_1 \times d_1 - F_2 \times d_2 - F_3 \times d_3 = 0$$



الشكل(2–1)

وأما الشروط التحليلية لتوازن مجموعة من القوى العامة المتفرقة فهي:

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad \Sigma F_y = 0 \quad ; \quad \Sigma M_o = 0$$

نطبق أيضا شروط التوازن على جملة القوى المتفرقة الموضحة في الشكل المذكور فنجد :

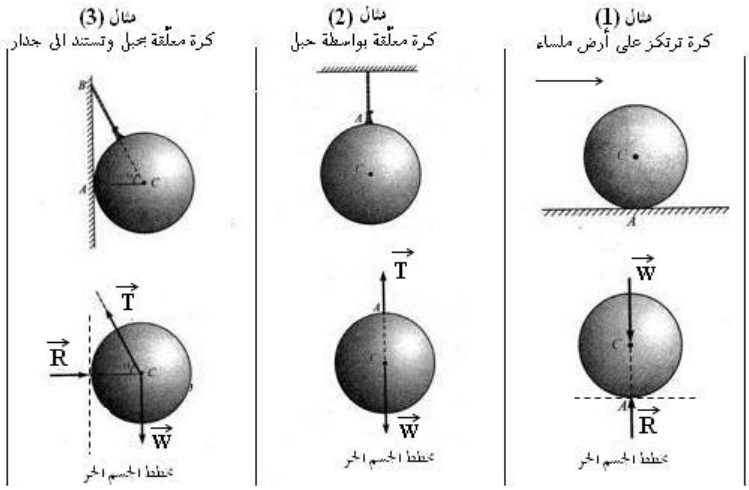
$$\Sigma F_x = F_1 \cos\theta_1 - F_2 \sin\theta_2 - F_3 \cos\theta_3 = 0$$
$$\Sigma F_y = F_1 \sin\theta_1 + F_2 \cos\theta_2 - F_3 \sin\theta_3 = 0$$
$$\Sigma M_o = 0$$
$$- F_1 \cos\theta_1 \times y_1 + F_1 \sin\theta_1 \times x_1 - F_3 \cos\theta_3 \times y_3 + F_3 \sin\theta_3 \times y_3 - M_1 + M_2 = 0$$

مخططات الجسم الحر:

يجب علينا قبل أن نبدأ بتطبيق معادلات التوازن أن نعزل الجسم الوارد في المسألة بطريقة واضحة وان نمثل بدقة جميع القوى المؤثرة عليه إذ يؤدي حذف قوة ما أو إضافتها إلى نتائج خاطئة. وتتم عملية عزل الجسم عن جميع الأجسام والقيود المحيطة به من خلال رسم مخطط الجسم الحر الذي يُظهر جميع القوى المسلطة بما في ذلك قوى ردود أفعال القيود التي أبعدت عنه . ولا يجوز البدء بحسابات القوى إلا بعد إتمام رسم مخطط الجسم الحر بدقة ونظرا لأهمية ذلك فإننا نؤكد على أن:

رسم مخطط الجسم الحر هو أهم خطوة في حل مسائل علم السكون

للبحث مثلا في توازن الكرة المبينة في المثال الأول في الشكل(2-2) ، نقوم أولا برسم مخطط الجسم الحر لتلك الكرة . لهذا ننزع عنها السطح الحامل ونحل محله رد فعل السطح في الكرة أي القوة **R** ، ونعلم أن نقطة تطبيق هذه القوة يجب أن تقع في A نقطة التماس بين المستوي والكرة ، فنستنتج ، استنادا إلى مبدأ توازن قوتين انه يجب أن يكون رد الفعل **R** شاقوليا ومساويا للوزن **W** ، وبذلك يكون رد الفعل هذا قد تعين تعيينا كاملا.



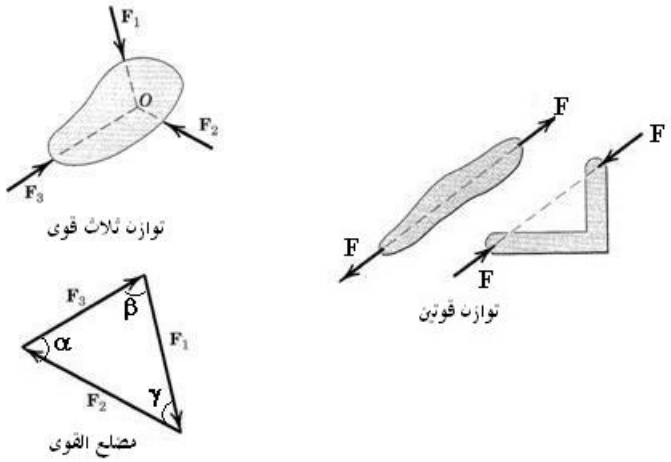
الشكل(2-2)

وكذلك في حالة الكرة المعلقة بحبل والمبينة في المثال الثاني في الشكل السابق ، إذا نزعنا الحبل هنا وعزلنا الكرة كجسم حر كانت لدينا ، بالإضافة إلى الوزن **W** المطبق في النقطة C ، قوة شد الحبل **T** . لهذا يظهر مخطط الجسم الحر كما هو مبين في الشكل المذكور آنفا .

وكذلك في حالة الكرة المبينة في المثال الثالث ، إذا نزعنا القيود هنا أيضا وعزلنا الكرة كجسم حر كانت لدينا ، بالإضافة إلى الوزن المطبق في النقطة C ، قوتا رد فعل تحل إحداهما محل الحبل وتحل الأخرى محل الجدار . لهذا يظهر مخطط الجسم الحر كما هو مبين في الشكل المذكور آنفا .

توازن ثلاث قوى واقعة في مستو واحد :

عندما يكون الجسم واقعا تحت تأثير قوتين فقط فان توازنه يتطلب تساوي هاتين القوتين في المقدار وتعاكسهما في الاتجاه كما هو مبين في الشكل(2-3) .



الشكل(2-3)

وعندما تكون القوى المؤثرة عليه ثلاث قوى فان شرط التوازن هو أن يكون مجموع أي قوتين مساويا ومعاكسا للقوة الثالثة . أو بمعنى آخر إذا كانت لدينا ثلاث قوى $\mathbf{F}_1$ و$\mathbf{F}_2$ و$\mathbf{F}_3$ وكانت هذه القوى واقعة في مستو واحد وغير متوازية فان شرط التوازن هو أن

تتقاطع خطوط تأثيرها في نقطة واحدة . وبالإضافة إلى هذا فان أشعة القوى يجب أن تشكل مضلعا مغلقا. إن مضلع القوى في هذه الحالة هو مثلث زواياه هي المكملة للزوايا بين خطوط عمل القوى.واستنادا إلى قاعدة الجيوب (علاقة لامي) في المثلثات نجد :

2–2 توازن الجُسيم (النقطة المادية) Equilibrium of particle

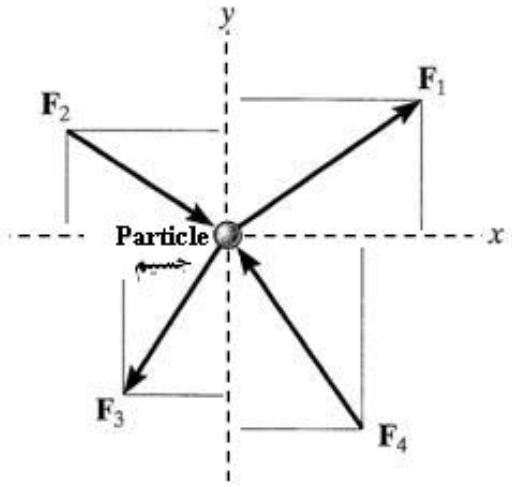
عندما تؤثر جملة قوى على جسيم (نقطة مادية) كما هو واضح في الشكل (2–4) فان ذلك يتضمن تلاقي جميع هذه القوى في نقطة واحدة لان الجسيم بالفرض معدوم الحجم. ويكفي كما سبق القول لانعدام جملة قوى متلاقية في نقطة واحدة انعدام قوة المحصلة **R** ويمكن التعبير عن هذا الشرط بالعلاقات التالية :

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

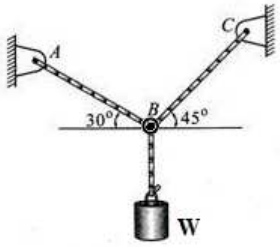
$$\Sigma F_y = 0$$

حيث F_x و F_y مساقط القوى على جملة المحاور الإحداثية .



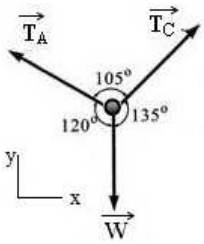
الشكل(2–4)

مثال (2–1)



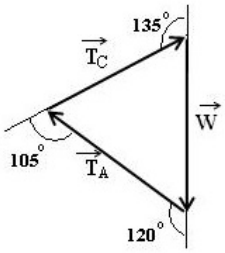
يتدلى ثقل**W** مقداره 200N من حلقة صغيرة B محمولة بحبلين AB و CB كما هو موضح في الشكل المجاور . اوجد قوة الشد التي تتولد في كل منهما .

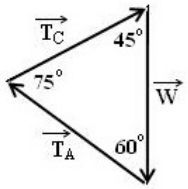
الحل :



يمكن حل هذه المسالة بطريقتين ، الأولى بإنشاء مضلع القوى ثم تطبيق علاقة الجيوب ، والثانية بالطريقة التحليلية باستخدام طريقة المساقط.

الطريقة الأولى : ندرس توازن الحلقة B والتي تخضع لتأثير ثلاث قوى متلاقية كما هو مبين في مخطط الجسم الحر لتلك الحلقة . ولما كانت هذه القوى بحالة توازن فان الأشعة الممثلة لها يجب أن تشكل مثلثا مغلقا . وبتطبيق علاقة الجيوب :





نجد أن : $T_A=146.4\ N \quad T_C=179.3\ N$

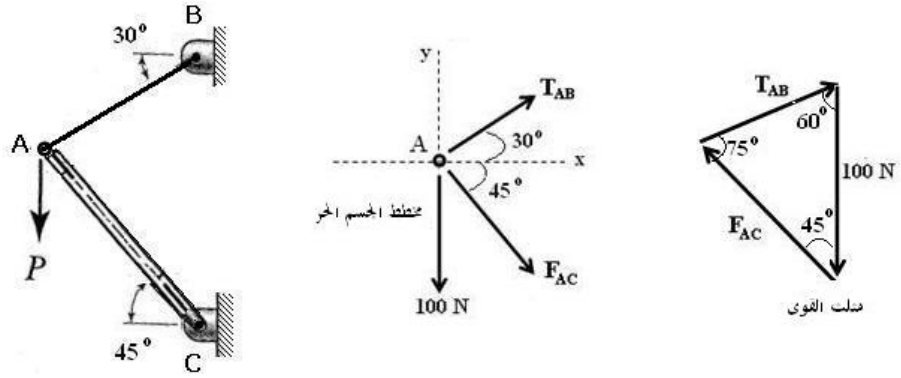
الطريقة الثانية :بالعودة إلى مخطط الجسم الحر للحلقة B وباعتماد جملة محاور إحداثية مناسبة نجد من خلال تطبيق شروط التوازن ما يلي :

$$\Sigma F_x = T_C \cos 45° - T_A \cos 30° = 0$$
$$\Sigma F_y = T_C \sin 45° + T_A \sin 30° - W = 0$$

بحل هاتين المعادلتين نحصل على نفس النتيجة السابقة .

مثال (2– 2)

عين في الجملة المبينة في الشكل المبين أدناه القوتين المتولدتين في الكبل AB والذراع AC بفعل القوة الرأسية **P** المطبقة في الحلقة A . مع العلم أن : P =100 N



الحل :

عندما تشد القوة **P** الحلقة A نحو الأسفل فان الأخيرة سوف تقوم بضغط ألياف الذراع AC وبشد أسلاك الكبل AB.ونتيجة لذلك سوف يؤثر الذراع والكبل في الحلقة بردي فعل مساويين ومعاكسين لفعل الحلقة فيهما كما هو مبين في مخطط الجسم الحر للحلقة.

معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = T_{AB} \cos 30° + F_{AC} \cos 45° = 0$$
$$\Sigma F_y = T_{AB} \sin 30° - F_{AC} \sin 45° - 100 = 0$$

بالتعويض وحل هاتين المعادلتين نحصل على الآتي :

$$T_{AB} = 73{,}2 \text{ N} \qquad F_{AC} = -\ 89.7 \text{ N}$$

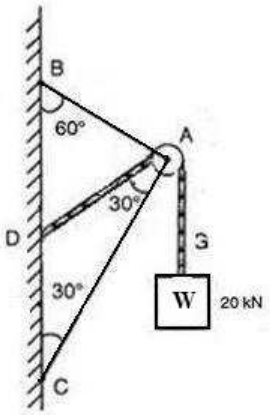
الإشارة السالبة تشير إلى أن الاتجاه الفعلي لرد فعل الذراع عكس المفروض في المخطط.

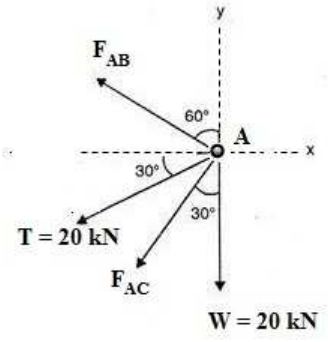
حل آخر : بما أن الحلقة A بحالة توازن وتخضع لتأثير ثلاث قوى فقط لذا فان الأشعة الممثلة لها يجب أن تشكل مثلثا مغلقا كما موضح في الشكل . وبتطبيق علاقة الجيوب :

من هذه العلاقة نحصل على النتائج السابقة.

مثال (2–3)

بكرة A (مهملة الأبعاد) محمولة على محورين مهملي الوزن ومثبتين في النقطتين B و C كما هو مبين في الشكل . يلتف على هذه البكرة حبل شُدّت إحدى نهايتيه إلى الجدار وحمّلت النهاية الأخرى بثقل W . المطلوب : (1) ارسم مخطط الجسم الحر للبكرة A .
(2) احسب القوتين F_{AB} وF_{AC} المتولدتين في المحورين AB وAC





الحل :

بما أن أبعاد البكرة مهملة لصغرها مقارنة ببقية أبعاد المنشأة الهندسية لذا نستطيع اعتبار القوى المؤثرة في البكرة متلاقية . نلاحظ أن السلك يشد البكرة بقوتين يجب أن تكونا متساويتين وهما WوT. كما تخضع البكرة أيضا لتأثير قوتي ردي فعل منطبقتين على المحورين AB وAC . نرسم مخطط الجسم الحر للبكرة A ثم نكتب معادلات التوازن :

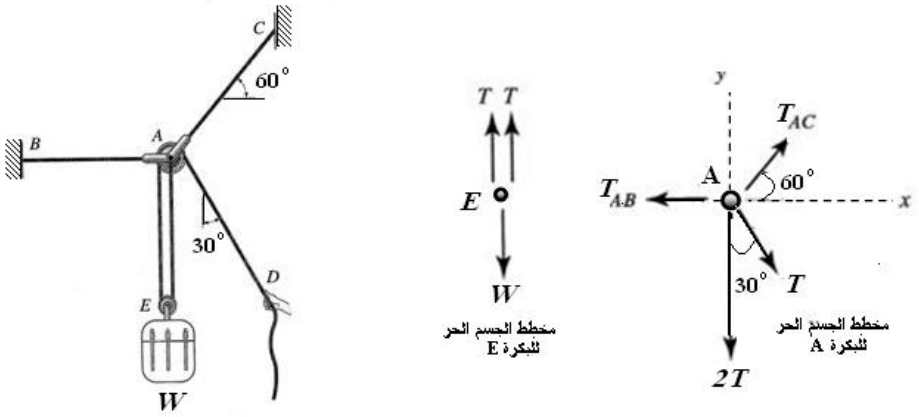
$$\Sigma F_x = F_{AB} \cos 30° + T \cos 30° + F_{AC} \cos 60° = 0$$
$$\Sigma F_y = F_{AB} \cos 60° - T \cos 30° - F_{AC} \cos 30° - W = 0$$

بالتعويض وحل هاتين المعادلتين نحصل على الآتي :

$$F_{AB} = 0 \qquad F_{AC} = -34.6 \text{ N}$$

مثال (2– 4)

تستخدم جملة الكابلات والبكرات المبينة في الشكل لرفع الحمل W . المطلوب تعيين قوى الشد المتولدة في الكابلات AB وAC وAD وذلك في وضع التوازن المبين في الشكل . هذا مع العلم أن وزن الحمل يساوي 200 N وان أبعاد البكرتين مهملة.



الحل :

نرسم أولا مخطط الجسم الحر للبكرة A باعتبارها نقطة مادية ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = T_{AC}\cos 60° - T_{AB} + T\sin 30° = 0$$
$$\Sigma F_y = T_{AC}\sin 60° - 2T - T\cos 30° = 0$$

ثم نرسم مخطط الجسم الحر للبكرة E باعتبارها نقطة مادية ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_y = 2T - W = 0$$

بالتعويض وحل المعادلات الثلاث السابقة نحصل على الآتي :

$$T_{AB} = 215.5\ N$$
$$T_{AC} = 330.9N$$
$$T = 100\ N$$

2–3 توازن الجسم الصلب Equilibrium of rigid body

توضح الأمثلة التالية الطريقة المتبعة في دراسة توازن الجسم الصلب انطلاقا من شروط التوازن التي نوقشت في بداية هذا الفصل.

مثال (2– 5)

يخضع الجائز الموضح في الشكل لتأثير مجموعة من القوى الموزعة والمركزة بالإضافة إلى مزدوجة عزمها يساوي 20 kN-m . ويرتكز هذا الجائز على مسندين احدهما مفصلي ثابت والآخر متحرك . المطلوب حساب القوة P ورد فعل المسند المتحرك B إذا علمت أن رد فعل المسند الثابت A يساوي الصفر .

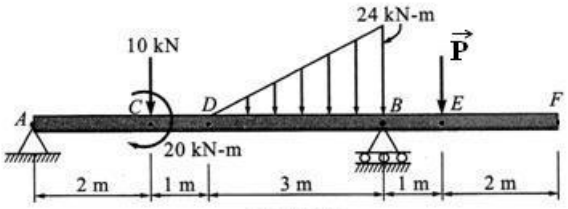
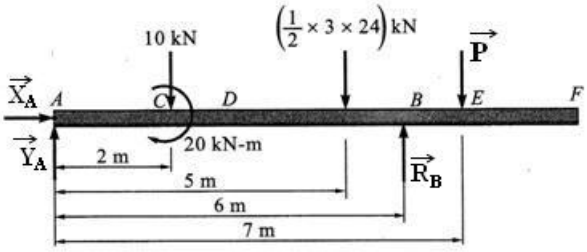


Fig. 3.79(a)



الحل :

نرسم مخطط الجسم الحر للجائز المفروض ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = X_A = 0$$

$$\Sigma F_y = Y_A + R_B - 10 - 36 - P = 0$$

$$\Sigma M_A = R_B \times 6 - 10 \times 2 - 20 - 36 \times 5 - P \times 7 = 0$$

بحل المعادلات مع اعتبار $Y_A = 0$ فرضا ، فإننا نحصل على الآتي :

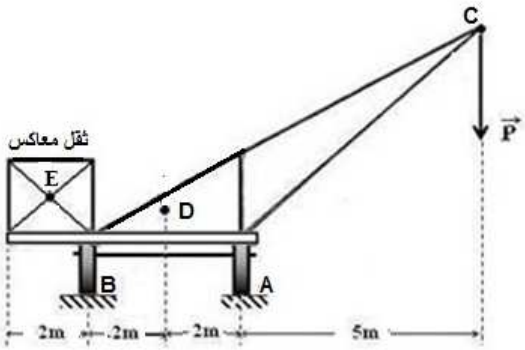
$$P = 56 \text{ kN}$$

$$R_B = 102 \text{ kN}$$

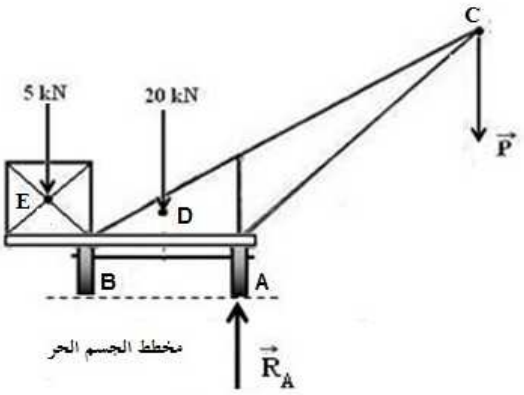
مثال (2– 6)

رافعة Crane وزنها 20 kN وترتكز على سكتين حديديتين A وB كما هو مبين في الشكل .ولمنع هذه الرافعة من الانقلاب بفعل الحمل P المطبق في النقطة C تُحمّل بثقل موازنة معاكس يساوي 5 kN . المطلوب تعيين الحمل الأعظم P بحيث لا تميل الرافعة نحو الجهة اليمنى .

الحل :



لا بدّ لنا من البحث في الوضع الحدّي التالي : عندما يكون الحمل الأعظم P مطبقا في النقطة C فان الرافعة تصبح على وشك الانقلاب نحو الجهة اليمنى وتنفصل حينئذ عن المسند B الذي ينعدم رد فعله في هذه اللحظة الحرجة كما هو واضح في مخطط الجسم الحر للرافعة. فإذا أخذنا مجموع عزوم القوى حول النقطة A حصلنا على الآتي :



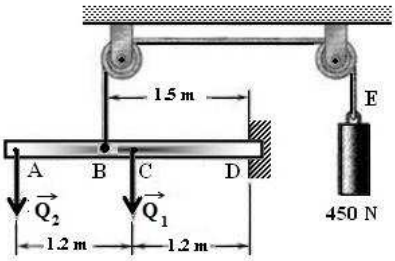
$$\Sigma M_A = - P(5) + 20(2) + 5(5) = 0$$

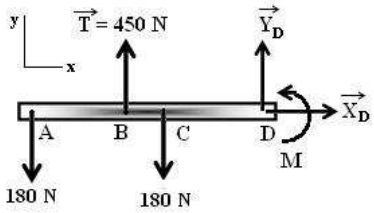
ومن هنا نجد أكبر حمل تستطيع الرافعة رفعه دون أن تنقلب وهو :

$$P = 13 \text{ kN}$$

مثال (2– 7)

عُلّق في الذراع AD حمولتان متساويتان مقدار كل منهما $Q_1=Q_2=180$ N كما هو موضح في الشكل . ويُثّبت هذا الذراع تثبيتا صلبا في النقطة D بينما يُربط في النقطة B بحبل يمر على زوج من البكرات الثابتة ويتدلى من نهايته الحرة ثقل مقداره 450N . المطلوب حساب رد فعل المسند الصلب D .





مخطط الجسم الحر

الحل : .....

يخضع الذراع AD لتأثير الحمولتين Q_1 و Q_2 ولتأثير قوة شد الحبل T ولرد فعل المسند الصلب D الذي يتألف عادة من ثلاث مركبات وهي : X_D و Y_D و M . وبناء على هذا التحليل نرسم مخطط الجسم الحر للذراع ثم نكتب معادلات التوازن التالية :

$$\Sigma F_x = X_D = 0$$

$$\Sigma F_y = Y_D + 450 - 180 - 180 = 0$$

$$\Sigma M_D = M + 180(2.4) + 180(1.2) - 450(1.5) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج :

$$X_D = 0$$

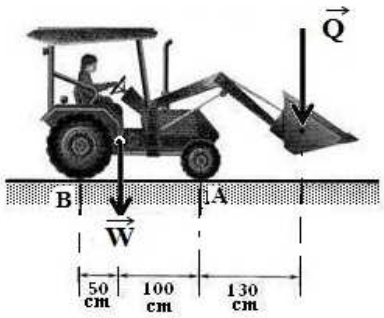
$$Y_D = -90 \text{ N}$$

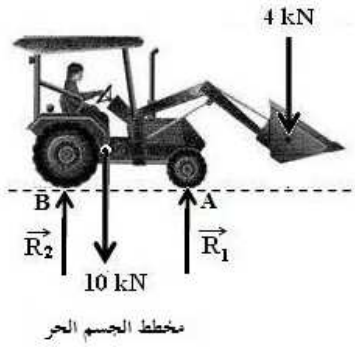
$$M = 27 \text{ N-m}$$

مثال (2– 8)

جرّار وزنه W = 10 kN يقوم برفع كمية من الحصى مقدارها Q = 4 kN ويرتكز على ارض أفقية كما هو مبين في الشكل . المطلوب حساب ما يلي :

1. رد فعل العجلتين الأماميتين .
2. رد فعل العجلتين الخلفيتين .





الحل : .....

يقع الجرار المفروض تحت تأثير القوى التالية : وزنه W ووزن الحمولة Q ورد فعل زوج العجلات الأمامية R_1 ورد فعل زوج العجلات الخلفية R_2 . وبناء على هذا التحليل نرسم مخطط الجسم الحر للجرار ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_y = R_1 + R_2 - 10 - 4 = 0$$

$$\Sigma M_B = R_1 (150) - 4 (280) - 10 (50) = 0$$

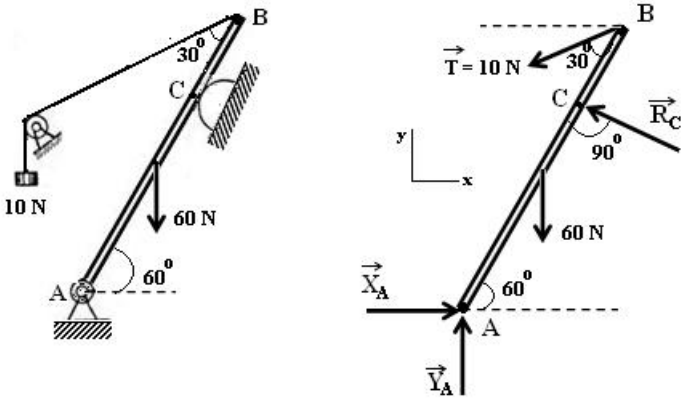
من هذه المعادلات ينتج :

$$R_1 = 10.8 \ kN$$

$$R_2 = 3.2 \ kN$$

مثال (2– 9)

ذراع متجانس AB طوله 100 cm ووزنه 60 N مثبت بمساعدة مفصل في النقطة A ويرتكز في الوقت ذاته ارتكازا حرا على سطح اسطواني أملس في النقطة C كما هو مبين في الشكل . يُثبّت في الطرف B حبل يمر على بكرة ثابتة ومعلق بنهايته الحرة ثقل مقداره 10 N . اوجد ردي فعل المسندين A و C إذا علمت أن BC=25cm .



الحل :

نرسم مخطط الجسم الحر للذراع AB ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = X_A - R_C \cos 30° - 10 \cos 30° = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_A + R_C \sin 30° - 10 \sin 30° - 60 = 0$$
$$\Sigma M_A = R_C (75) - 60 (50 \cos 60°) + 10(50) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج :

$$X_A = 20.2 \text{ N}$$
$$Y_A = 58.3 \text{ N}$$
$$R_C = 13.3 \text{ N}$$

4-2 توازن جملة أجسام مركبة :

في حالة اتصال جملة من الأجسام الصلبة فيما بينها يمكننا تقسيم القوى التي تؤثر في هذه الجملة إلى مجموعتين :

- قوى داخلية : وهي القوى التي تجعل أجزاء الجملة المفروضة متماسكة ، أو بتعبير آخر هي قوى التأثير المتبادل بين الأجزاء المتماسكة . وحسب قانون الفعل ورد الفعل : إذا أثّر جسمان على بعضهما فان قوتي الفعل ورد الفعل تكونان متساويتين بالمقدار ومتعاكستين بالاتجاه ولهما نفس الحامل.
- قوى خارجية : وهي القوى التي تؤثر بها الأجسام الخارجية في أجزاء الجملة المفروضة.

وحسب شكل الاتصال بين الأجزاء الداخلة في تركيب جمل الأجسام المركبة يمكن التمييز بين الأنواع التالية في التطبيقات الهندسية :

1. الأجزاء الداخلة في تركيب المجموعة تستند بشكل حر إلى بعضها بعضا.
2. الأجزاء الداخلة في تركيب المجموعة متصلة مع بعضها بعضا بمساعدة مفاصل.

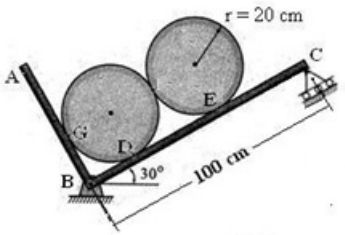
عند حل المسائل المتعلقة بتوازن جملة من الأجسام المركبة من الضروري مراعاة أن جميع القوى الخارجية والداخلية المؤثرة في جسم ما يجب أن تتوازن . وبناء على ذلك يمكن كتابة ثلاث معادلات توازن لكل جسم من أجزاء الجملة المفروضة .

إذا كانت الجملة مؤلفة مثلا من جسمين فإننا نقوم بفصلهما ونرسم مخطط الجسم الحر لكل منهما ونستطيع عندئذ كتابة ثلاث معادلات توازن لكل جسم . ويمكننا استخدم طريقة أخرى أكثر بساطة وذلك بدراسة توازن كامل الجملة المفروضة دون تفكيك ثم ندرس بعد ذلك توازن أحد جسمي الجملة فنحصل أيضا على ست معادلات توازن.

مثال (2– 10)

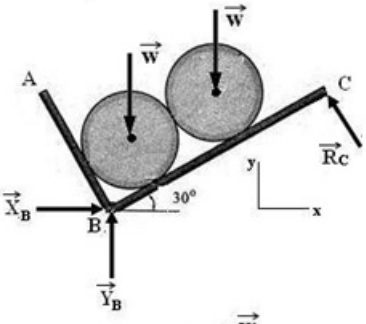
ترتكز اسطوانتان متماثلتان تزن كل واحدة منهما 500 N على إطار ABC قائم الزاوية في B كما هو مبين في الشكل . المطلوب:

1. حساب ردي الفعل في نقطتي استناد الإطار B و C .
2. حساب ردود الفعل في نقاط التماس E و D و G .



الحل :

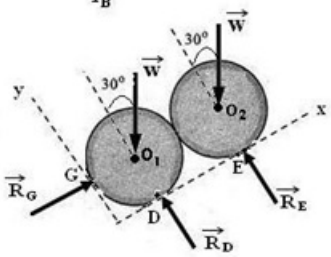
نحرر الجملة المفروضة مجتمعة من المسندين B و C كما هو مبين في الشكل ثم نكتب معادلات التوازن فنجد :



$\Sigma F_x = X_B - R_C \sin 30° = 0$

$\Sigma F_y = Y_B - 500 - 500 + R_C \cos 30° = 0$

$\Sigma M_B = (500 \sin 30°)(20) - (500 \cos 30°)(20) + (500 \sin 30°)(20) - (500 \cos 30°)(60) + R_C(100) = 0$



بحل هذه المعادلات نحصل على الآتي:

$R_C = 246.4$ N $X_B = 123.2$ N $Y_B = 786.6$ N

بعد ذلك ندرس توازن الاسطوانتين معا كما واضح في الشكل ثم نكتب :

$\Sigma F_x = R_G - 500 \sin 30° - 500 \sin 30° = 0$

$\Sigma F_y = R_D + R_E - 500 \cos 30° - 500 \cos 30° = 0$

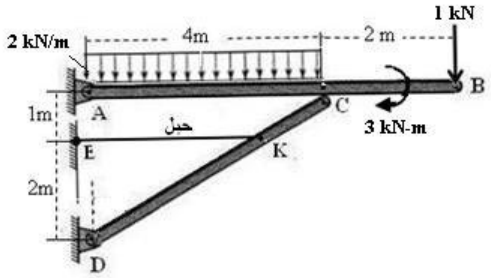
$\Sigma M_{O1} = R_E (40) - 500 \cos 30° (40) = 0$

بحل هذه المعادلات ينتج الآتي:

$R_D = R_E = 433$ N $R_G = 500$ N

مثال (2– 11)

ذراع أفقي متجانس AB وزنه 1 kN ويخضع لتأثير القوى الموزعة والمركزة المبينة في الشكل . هذا الذراع يستند بشكل حر في النقطة C إلى ذراع آخر CD طوله 5m ووزنه 1.2 kN، ويحافظ على توازنه بمساعدة حبل أفقي . المطلوب تعيين ردود الفعل في النقاط A وC وD وقوة الشد Tبالحبل.



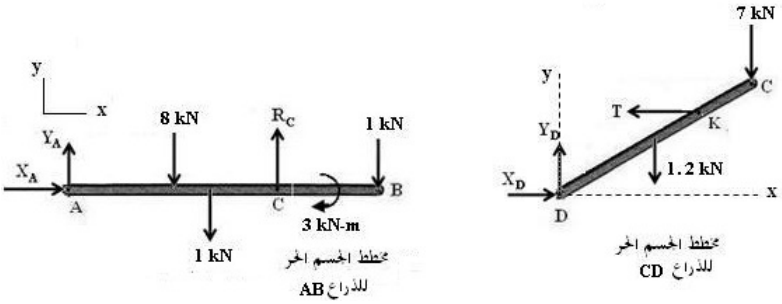
الحل :

الذراع AB : نرسم مخطط الجسم الحر ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = X_A = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_A + R_C - 8 - 1 - 1 = 0$$
$$\Sigma M_C = R_C (4) - 3 - 8 (2) - 1 (3) - 1 (6) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج :

$$X_A = 0 \quad Y_A = 8.2 \text{ kN} \quad R_C = 7 \text{ kN}$$



الذراع CD : نرسم مخطط الجسم الحر لهذا الذراع ثم نكتب معادلات التوازن :

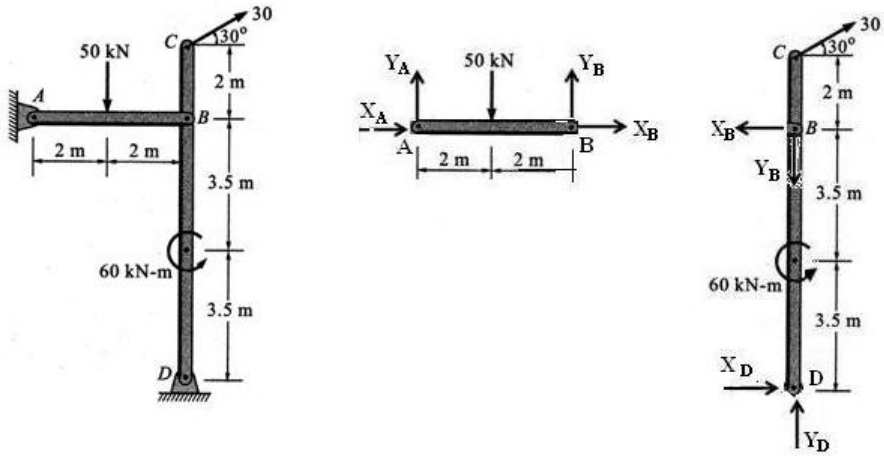
$$\Sigma F_x = X_A - T = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_D - 1.2 - 7 = 0$$
$$\Sigma M_D = T (2) - 7 (4) - 1.2 (2) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج :

$$X_D = 15.2 \text{ kN} \quad Y_D = 8.2 \text{ kN} \quad T = 15.2 \text{ kN}$$

مثال (2– 12)

إطار مؤلف من ذراعين مرتبطين بواسطة المفصل B . يخضع هذا الإطار إلى حمولات خارجية كما هو مبين في الشكل . المطلوب: تعيين ردود فعل المفاصل الثابتة A وB وC.



الحل :

الذراع AB : نرسم مخطط الجسم الحر ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = X_A + X_B = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_A + Y_B - 50 = 0$$
$$\Sigma M_A = Y_B (4) - 50 (2) = 0$$

الذراع CD : نرسم مخطط الجسم الحر ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = X_D - X_B + 30 \cos 30° = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_D + Y_B + 30 \sin 30° = 0$$
$$\Sigma M_D = X_B (7) - 30 \cos 30° (9) + 60 = 0$$

بحل المعادلات الست السابقة ينتج ما يلي :

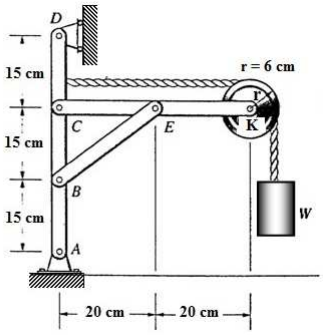
ردود الأفعال بوحدة kN					
X_A	Y_A	X_B	Y_B	X_D	Y_D
-24.8	25	24.8	25	-1.15	10

تدل الإشارة السالبة إلى أن الاتجاه الفعلي بعكس الاتجاه المفروض في مخطط الجسم الحر.

مثال (2– 13)

تتكون الرافعة المبينة في الشكل من ثلاثة أذرع وبكرة حيث ترتبط فيما بينها بوساطة مفاصل وحبل . المطلوب تعيين القوى المؤثرة في كل عضو من أعضاء الرافعة إذا علمت أن مقدار الحمل المرفوع **W** يساوي 180 N .

الحل :

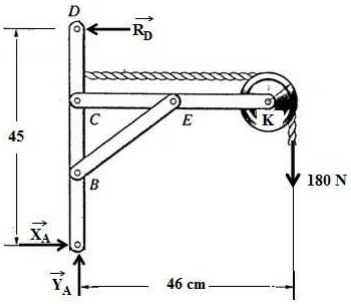


نحسب أولا ردي فعل المسندين A وD بعد رسم مخطط الجسم الحر لمجمل الرافعة .في هذه الحالة تكون معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = X_A - X_D = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_A - 180 = 0$$
$$\Sigma M_A = X_D (45) - 180 (46) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج :

$$X_A = 184 \text{ N} \quad Y_A = 180 \text{ N}$$
$$R_D = 184 \text{ N}$$

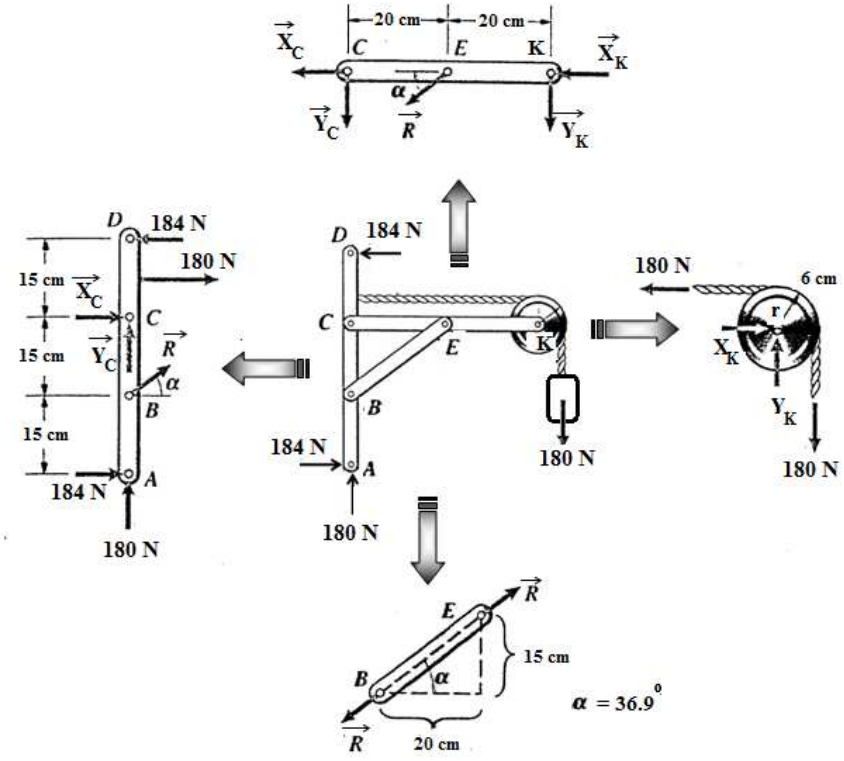


في الخطوة الثانية نقوم بتفكيك الرافعة ثم نرسم مخطط الجسم الحر لكل عضو من أعضاء الرافعة كما هو واضح في الشكل .

ولا بد بهذا الصدد من الإشارة إلى الملاحظات الهامة التالية وذلك اعتمادا على قانون الفعل ورد الفعل :

- إن الذراع BE مهمل الوزن وهو يخضع لتأثير قوتين فقط عند نهايتيه . وحتى يتوازن هذا الذراع يجب أن تكون هاتان القوتان متساويتين ومتعاكستين ومنطبقتين على محور الذراع .

- إن قوة تأثير الذراع BE في الذراع الرأسي AD في النقطة B تساوي وتعاكس قوة تأثير الذراع AD في الذراع BE في نفس النقطة.
- إن قوة تأثير الذراع BE في الذراع الأفقي CK في النقطة E تساوي وتعاكس قوة تأثير الذراع CK في الذراع BE في نفس النقطة.
- إن قوة تأثير الذراع CK في الذراع AD في النقطة C تساوي وتعاكس قوة تأثير الذراع AD في الذراع CK في نفس النقطة.
- إن قوة تأثير البكرة في الذراع CK في النقطة K تساوي وتعاكس قوة تأثير الذراع CK في البكرة وذلك في نفس النقطة.



البكرة : ندرس توازن البكرة التي تخضع لتأثير القوى الموضحة في مخطط الجسم الحر الخاص بها . لهذا نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = X_K - 180 = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_K - 180 = 0$$

من هاتين المعادلتين نحصل على الآتي :

$$X_K = Y_K = 180 \text{ N}$$

الذراع الأفقي CEG : ندرس توازن هذا الذراع الذي يخضع لتأثير القوى الموضحة في مخطط الجسم الحر الخاص به . لهذا نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = - X_C - R \cos 36.9° - 180 = 0$$
$$\Sigma F_y = -Y_C - R \sin 36.9° - 180 = 0$$
$$\Sigma M_C = - R \sin 36.9° (20) – 180 (40) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج :

$$X_C = 300 \text{ N} \quad Y_C = 180 \text{ N} \quad R = - 600 \text{ N}$$

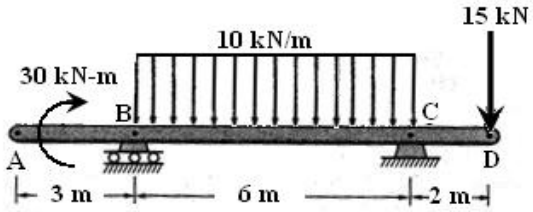
تشير الإشارة السالبة للقوة R إلى أن الاتجاه الفعلي لها هو عكس الاتجاه المفروض في الرسم . نلاحظ أخيرا أن القوى المؤثرة في جميع أعضاء الرافعة قد أصبحت معلومة ويمكن ترتبها في الجدول التالي :

القوى المؤثرة في أجزاء الرافعة بوحدة N							
X_A	Y_A	R_D	R	X_C	Y_C	X_K	Y_K
184	180	184	- 600	300	180	180	180

مسائل للمراجعة
REVIEW PROBLEMS

مسألة رقم (1) :

يخضع الذراع ABCD الموضح في الشكل المجاور لتأثير قوى موزعة ومركزة بالإضافة إلى مزدوجة ، والمطلوب : رسم مخطط الجسم الحر للذراع ABCD ثم حساب ردي فعل المسندين B و C .



الجواب :

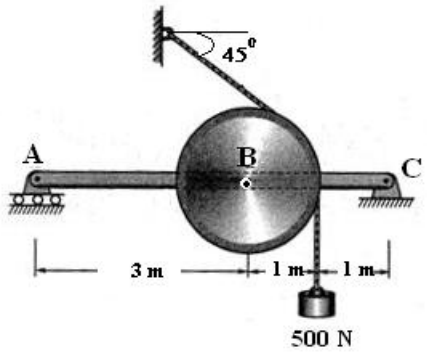
$Y_B = 20$ kN (↑) , $X_C = 0$, $Y_C = 55$ kN (↑)

مسألة رقم (2) :

يبين الشكل المجاور عمودا AC مثبت عليه بكرة بواسطة المفصل B . بفرض أن وزن العمود يساوي 200N ووزن البكرة 50N ، المطلوب :

1 – ارسم مخطط الجسم الحر للبكرة . 2– ارسم مخطط الجسم الحر للذراع ABC .

3– احسب ردود أفعال المفاصل A و B و C .

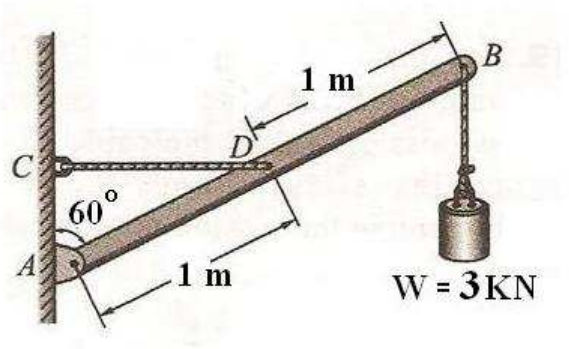


الجواب :

$Y_A = 187$ N (↑) , $X_B = X_C = 354$ N , $Y_B = 196$ N , $Y_C = 218$ N (↑)

مسألة رقم (3) :

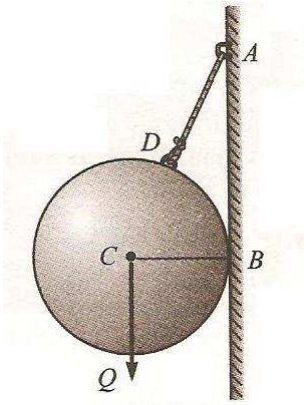
يثبّت الذراع AB في النقطة A بواسطة مفصل ثابت ثم يربط مع الحائط بواسطة كبل أفقي CD ثم يُعلّق حملا وزنه W=3 kN كما هو مبين في الشكل المجاور . المطلوب ما يلي : 1- رسم مخطط الجسم الحر للذراع AB .2- حساب قوة الشد المتولدة في الكبل وكذلك رد فعل المسند A .



الجواب :

$T = 10.39\ kN\ (\leftarrow)\ ,\ X_A = 10.39\ kN\ (\rightarrow)\ ,\ Y_A = 3\ kN\ (\uparrow)$

مسألة رقم (4) :

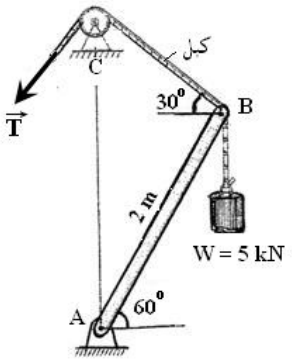


كرة متجانسة وزنها Q=80 N ونصف قطرها 30cm تُربط مع الحائط بواسطة حبل يصنع مع خط الأفق زاوية مقدارها 60° . ارسم مخطط الجسم الحر للكرة ثم احسب قوة الشد المتولدة في الكبل ورد فعل الجدار في النقطة B .

الجواب :

$T = 92.4\ N\ ,\ R_B = 46.2\ N\ (\leftarrow)$

مسألة رقم (5) :

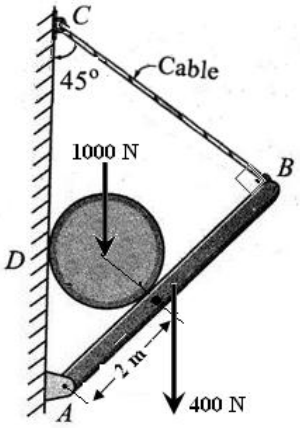


يُعلّق حمل مقداره W=5 kN في الطرف B من الذراع AB بمساعدة سلك يلتف على بكرة عديمة الاحتكاك . تؤثر في نهاية السلك الحرة قوة الشد T للحفاظ على توازن الذراع كما هو مبين في الشكل(1-1) . كما يثبت الذراع في النقطةA بواسطة مفصل ثابت . ارسم مخطط الجسم الحر للذراع ثم عيّن قوة الشد T ورد فعل المفصل A.

الجواب :

$T = 2.5\ kN\ ,\ X_A = 2.17\ kN\ ,\ Y_A = 3.75\ kN$

مسألة رقم (6) :



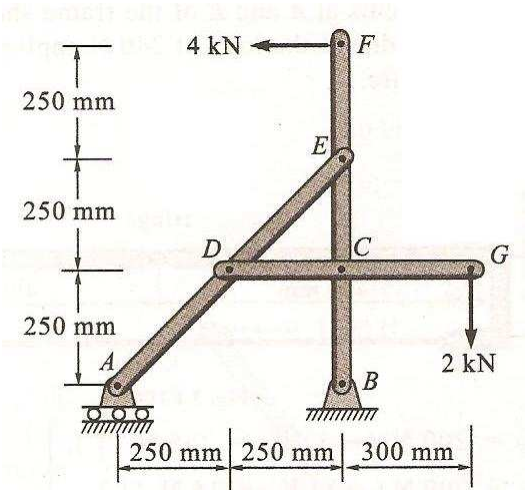
كرة متجانسة وزنها 1000 N تستند إلى جدار أملس وترتكز على ذراع طوله 5m ووزنه 400 N ، كما يصنع مع خط الأفق زاوية مقدارها 45° وذلك بمساعدة السلك BC والمطلوب هو :1-ارسم مخطط الجسم الحر للكرة ثم حدد رد فعل الجدار وقوة ضغط الكرة على الذراع.2-ارسم مخطط الجسم الحر للذراع ثم احسب قوة الشد الناشئة في السلك .

الجواب :

$R_D = 1000\ N\ (\rightarrow)\ ,\ P = 1414\ N\ ,\ T = 707\ N$

مسألة رقم (7) :

إطار مؤلف من ثلاثة أعضاء مرتبطة فيما بينها بواسطة مفاصل. يخضع هذا الإطار لتأثير قوتين خارجيتين كما هو مبين في الشكل. عيّن ردود الأفعال في النقاط A وB وC وD .

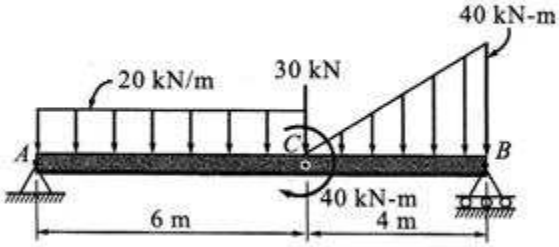


الجواب :

$R_A = 4.8$ kN , $R_B = 4.88$ kN , $R_C = 12.78$ kN , $R_D = 12.24$ kN

مسألة رقم (8) :

يرتكز الذراع AB الموضح في الشكل المجاور على مسندين احدهما مفصلي ثابت والآخر متحرك ويخضع لتأثير القوى المبينة في الشكل . احسب ردي فعل المسندين A و B .

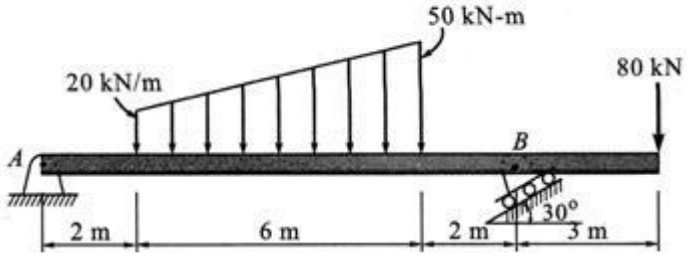


الجواب :

$X_A = 0$, $Y_A = 104$ kN (↑) , , $R_B = 136$ kN (↑)

مسألة رقم (9) :

اوجد ردي فعل المسندين A و B إذا علمت أن الجائز يخضع لتأثير القوى المبينة في الشكل .

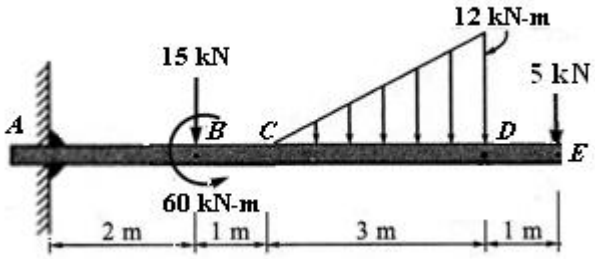


الجواب :

$X_A = 126$ kN (→) , $Y_A = 72$ kN (↑) , $R_B = 252$ kN

مسألة رقم (10) :

يُثبّت الذراع AB بشكل صلب ومن طرف واحد في الجدار ويخضع لتأثير القوى المبينة في الشكل . احسب رد الفعل في نقطة التثبيت A .



الجواب :

$X_A = 0$, $Y_A = 38$ kN (↑) , $M_A = 95$ kN-m (↶)

الفصل الثالث

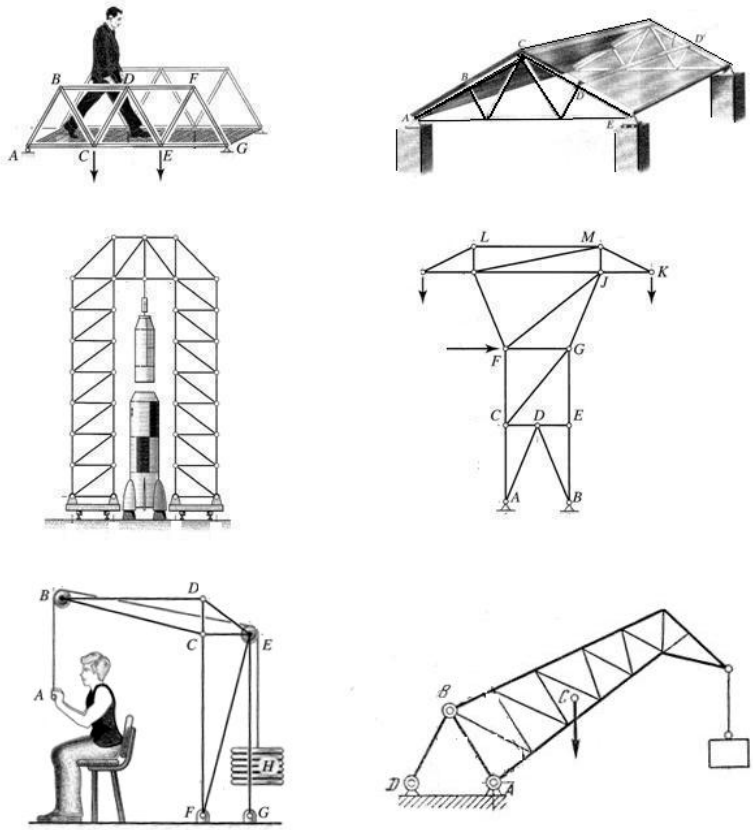
تحليل الهياكل الشبكية

ANALYSIS 0F TRUSSES

3–1 تمهيد :

يتناول هذا الفصل الهياكل الشبكية الواقعة في مستو واحد . ويُعرّف الهيكل الشبكي المستوي بأنه جملة من القضبان الواقعة في مستو واحد والمتصلة نهاياتها بمسامير (Pins) أو بصفائح (Plates) تلحم إليها تلك القضبان . وتدعى مسامير وصفائح ربط القضبان عادة بالعقد (Joints) . إن الهياكل الشبكية كثيرة الانتشار في حياتنا فهي تشاهد كما هو واضح في الشكل(3–1) في الأبراج الحاملة لخطوط التوتر العالي، والجسور ، وأبراج الاتصالات بشتى أنواعها ، والروافع الشبكية الكبيرة ، وفي سقوف المنازل والمعامل والمشافي ومراكز التسوق والصالات الرياضية وغيرها . ومن الشائع عمليا في دراسة توازن الهياكل الشبكية أن تراعى الافتراضات التالية :

- إن نهايات القضبان متصلة بمسامير عديمة الاحتكاك .
- إن القوى الخارجية المؤثرة في الهيكل كلها مطبقة على العقد فقط وهي واقعة في مستوي الهيكل الشبكي .
- أوزان القضبان تكون عادة صغيرة مقارنة بالحمولات الخارجية المطبقة على الهياكل الشبكية لهذا فهي لا تُحتسب . وبناء على ذلك تؤثر في كل قضيب من قضبان الهيكل قوتان عند نهايتيه ، وفي حالة التوازن يجب أن تكون هاتان القوتان متساويتين بالمقدار ومتعاكستين بالاتجاه ولهما نفس الحامل المنطبق على محور القضيب. ومنه نستنتج أن قضبان الهياكل الشبكية تتعرض عند العمل للشد أو الضغط كما هو مبين في الشكل (3–2).



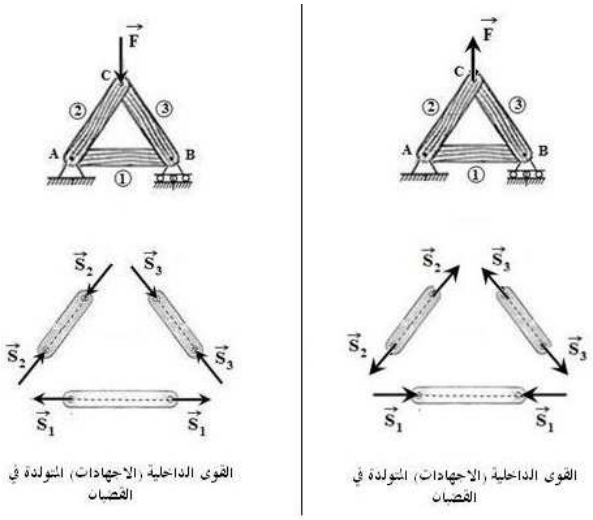
الشكل(3–1)

وسنكتفي في هذا الفصل بدراسة الهياكل المتماسكة المكونة من مثلثات والتي لا تحتوي على قضبان إضافية والتي تسمى بالهياكل المحدّدة ستاتيكيا (Statically determinate trusses) ، ودراستها تعدّ سهلة لان معادلات التوازن تكفي تماما لتحديد القوى المجهولة والتي تشمل القوى الداخلية للقضبان وردود فعل المساند . وفي هذه الهياكل يرتبط عدد القضبان m بعدد العقد n بالعلاقة التالية :

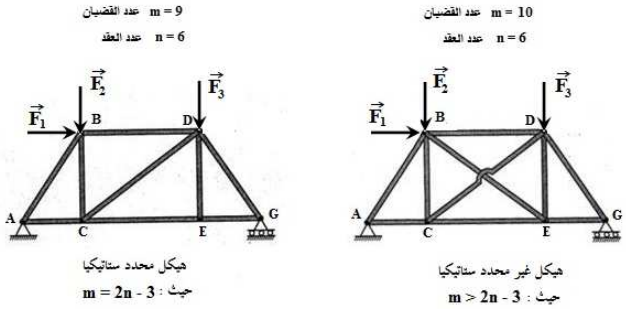
$$m = 2n - 3$$

ففي الهيكل البسيط المؤلف من ثلاثة أضلاع توجد فعلا ثلاث عقد ، ويتطلب الأمر قضيبين لتوصيل كل عقدة جديدة . وإذا قل عدد القضبان في الهيكل عن الحد المقدر

طبقا للعلاقة السابقة يكون الهيكل عندئذ قلقاً وغير متماسك (Unstable) وقابل للانهيار (Collapsible) في أية لحظة تحت تأثير الحمولات المطبقة . أما إذا زاد عدد القضبان في الهيكل المدروس عن الحد المذكور فان عدد القوى المجهولة سيكون اكبر من عدد معادلات التوازن، ويعدّ الهيكل حينئذ كما هو مبين في الشكل(3-3) غير محدّد ستاتيكيا (Statically indeterminate truss) . ويدرس هذا النوع من الهياكل المعقدة في مقررات دراسية أخرى متقدمة .



الشكل(3-2)



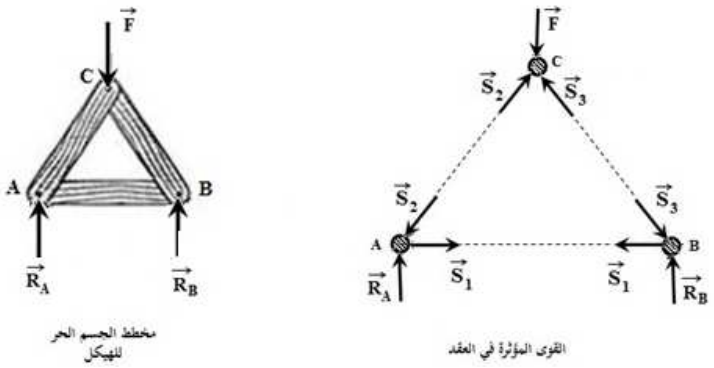
الشكل(3-3)

وتتلخص دراسة توازن الهياكل في تعيين ردود فعل المساند وتحديد القوى المحورية الداخلية المتولدة في القضبان بفعل الحمولات الخارجية . ويمكن تعيين ردود فعل المساند بعد اعتبار الهيكل المفروض ككل جسما صلبا . ومن ناحية أخرى تتعين القوى المحورية الداخلية المتولدة في القضبان بإحدى الطريقتين التاليتين :

1. طريقة فصل العقد (Method of joints)
2. طريقة قطع الهيكل (Method of sections)

3–2 طريقة فصل العقد (Method of joints):

تستخدم هذه الطريقة عادة عند الحاجة لتحديد القوى الداخلية المتولدة في كافة قضبان الهيكل المفروض. ومن البديهي ، عندما يكون جسم الهيكل بكامله في حالة اتزان فان مكوناته من عقد وقضبان ستكون في حالة توازن أيضا . ومن هنا تنبع فكرة الطريقة الحالية والتي تتلخص في دراسة توازن القوى المتلاقية المؤثرة في كل عقدة من عقد الهيكل . وهذه القوى تتضمن القوى الخارجية وكذلك ردود فعل القضبان المتصلة بالعقدة المدروسة كما هو مبين في المثال الموضح في الشكل(3–4) .



الشكل(3–4)

ويبدو لنا بوضوح ان تعيين القوى الداخلية بين القضبان والعقد يعتمد أساسا على قانون الفعل ورد الفعل . وعليه فان العقدة A مثلا تؤثر في القضيب AB بالقوة S_1، والقضيب AB يؤثر من ناحيته بقوة رد فعل مساوية ومعاكسة لها. وبما ان القضيب AB متوازن بفعل قوتين مطبقتين في نهايتيه ، لذا فان هاتين القوتين متساويتان وكل منهما تساوي للقوة S_1 . إن تعيين القوى الداخلية في قضبان الهياكل الشبكية بمساعدة طريقة فصل العقد يجري عادة باتباع الخطوات التالية :

- رسم مخطط الجسم الحر للهيكل بأكمله .
- تعيين ردود الفعل للمساند التي يرتكز عليها جسم الهيكل وذلك باستخدام معادلات التوازن المناسبة .
- رسم مخطط الجسم الحر لكل عقدة من عقد الهيكل . ويشمل مخطط العقدة القوى الخارجية وقوى رد فعل القضبان . وبما أن اتجاهات قوى رد فعل القضبان مجهولة لذا سنفرض مبدئيا أن جميع القضبان في حالة شد ، وبناء على هذا الفرض تظهر هذه القوى في المخطط خارجة من العقد . إذا حصلنا نتيجة الحل على إشارة موجبة لقوة رد فعل قضيب ما فتوجيه القوة صحيح ويكون القضيب عندئذ في حالة شد ، وإذا حصلنا على إشارة سالبة فان القضيب المدروس في حالة ضغط .
- تطبيق معادلتي التوازن التاليتين : $\Sigma F_X=0$; $\Sigma F_Y=0$ على كل عقدة من عقد الهيكل وحساب القوى المجهولة .
- ترتيب النتائج في جدول يبين جميع القوى الداخلية المتولدة في قضبان الهيكل قيمة ونوعا.

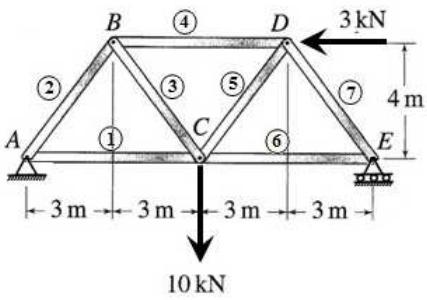
ومن الملاحظات الهامة :

- إذا تلاقت في عقدة غير مُحمّلة ثلاثة قضبان ، اثنان منها على استقامة واحدة، فالقوة الداخلية في القضيب الثالث تكون معدومة.

- إذا تلاقى في عقدة غير محملة قضيبان فقط غير واقعين على استقامة واحدة، فالقوتان الداخليتان فيهما تكون معدومة.

مثال (3– 1)

اوجد القوى الداخلية المتولدة في قضبان الهيكل الشبكي الموضح في الشكل باستخدام طريقة فصل العقد .

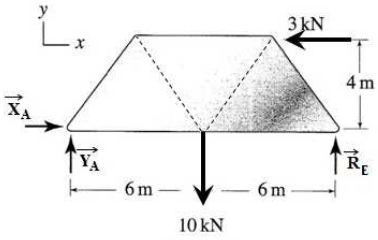


الحل :

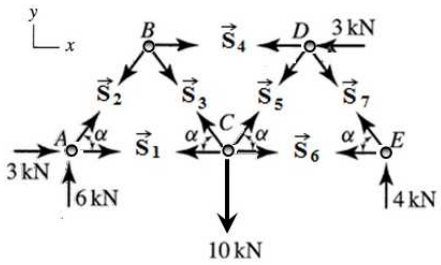
ردود فعل المساند : نرسم مخطط الجسم الحر للهيكل بأكمله ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = X_A - 3 = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_A + R_E - 10 = 0$$
$$\Sigma M_A = R_E (12) + 3 (4) - 10 (6) = 0$$

نفرض أن جميع القضبان تقع في حالة شد ثم نرسم مخطط الجسم الحر لكل عقدة من عقد الهيكل كما هو مبين في الشكل. وبناء على هذا الافتراض نمثل القوى الداخلية بأشعة خارجة من العقد.



مخطط الجسم الحر للهيكل الشبكي



مخطط الجسم الحر لكافة عقد الهيكل

العقدة A : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\Sigma F_x = S_1 + S_2 \cos \alpha + 3 = 0$$
$$\Sigma F_y = S_2 \sin \alpha + 6 = 0$$

العقدة B : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\Sigma F_x = - S_2 \cos \alpha + S_3 \cos \alpha + S_4 = 0$$
$$\Sigma F_y = - S_2 \sin \alpha - S_3 \sin \alpha = 0$$

العقدة E : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\Sigma F_x = - S_6 - S_7 \cos \alpha = 0$$
$$\Sigma F_y = S_7 \sin \alpha + 4 = 0$$

العقدة D : معادلة التوازن لهذه العقدة :

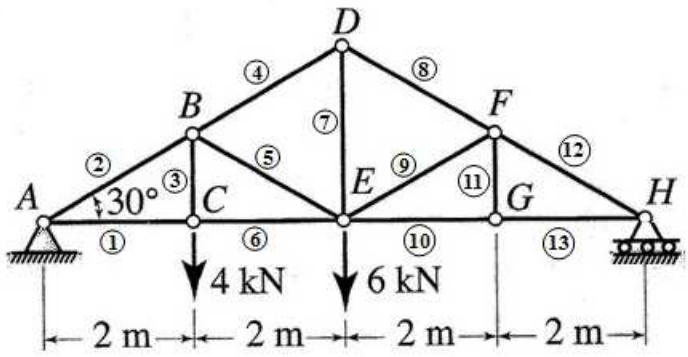
$$\Sigma F_y = - S_5 \sin \alpha - S_7 \sin \alpha = 0$$

بحل المعادلات السابقة نجد :

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
مقدار القوة	1.5	-7.5	7.5	-9	5	3	-5
نوع القوة	شد	ضغط	شد	ضغط	شد	شد	ضغط

مثال (3– 2)

اوجد القوى الداخلية المتولدة في قضبان الهيكل الشبكي الموضح في الشكل باستخدام طريقة فصل العقد .

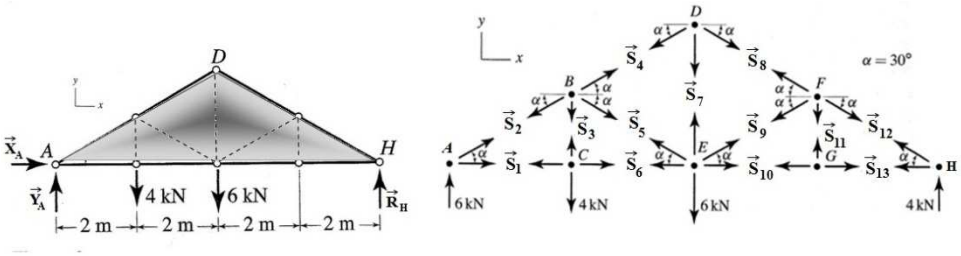


الحل :

ردود فعل المساند : نرسم مخطط الجسم الحر للهيكل بأكمله ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = X_A = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_A + R_H - 4 - 6 = 0$$
$$\Sigma M_A = R_H (8) - 6 (4) - 4 (2) = 0$$

نفرض أن جميع القضبان تقع في حالة شد ثم نرسم مخطط الجسم الحر لكل عقدة من عقد الهيكل كما هو مبين في الشكل. وبناء على هذا الافتراض نمثل القوى الداخلية بأشعة خارجة من العقد.



العقدة A : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\Sigma F_x = S_1 + S_2 \cos \alpha = 0$$
$$\Sigma F_y = S_2 \sin \alpha + 6 = 0$$

العقدة C : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\Sigma F_x = - S_1 + S_6 = 0$$
$$\Sigma F_y = S_3 - 4 = 0$$

العقدة B : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\Sigma F_x = - S_2 \cos \alpha + S_4 \cos \alpha + S_5 \cos \alpha = 0$$
$$\Sigma F_y - S_2 \sin \alpha - S_3 + S_4 \sin \alpha - S_5 \sin \alpha = 0$$

العقدة D : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\Sigma F_x = - S_4 \cos \alpha + S_8 \cos \alpha = 0$$
$$\Sigma F_y = - S_4 \sin \alpha - S_7 - S_8 \sin \alpha = 0$$

العقدة H : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\Sigma F_x = - S_{12} \cos \alpha - S_{13} = 0$$
$$\Sigma F_y = S_{12} \sin \alpha + 4 = 0$$

العقدة G : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\Sigma F_x = - S_{10} + S_{13} = 0$$

$$\Sigma F_y = S_{11} = 0$$

العقدة F : معادلة التوازن لهذه العقدة :

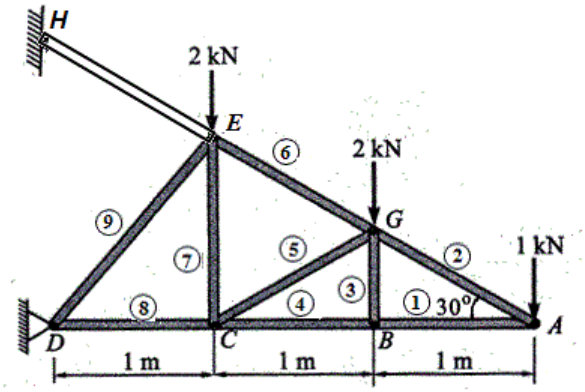
$$\Sigma F_x = - S_8 \cos \alpha - S_9 \cos \alpha + S_{12} \cos \alpha = 0$$

بحل المعادلات السابقة نجد :

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{13}
10.39	-12	4	-8	-4	10.39	8	-8	0	6.93	0	-8	6.93
شد	ضغط	شد	ضغط	ضغط	شد	شد	ضغط	غير مُحمّل	شد	غير مُحمّل	ضغط	شد

مثال (3– 3)

اوجد القوى الداخلية المتولدة في قضبان الهيكل الشبكي الموضح في الشكل باستخدام طريقة فصل العقد



الحل :.....

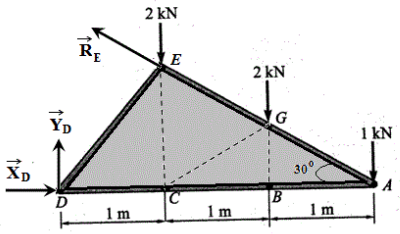
ردود فعل المساند : نرسم مخطط الجسم الحر للهيكل بأكمله ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = X_D - R_E \cos 30° = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_D + R_E \sin 30° - 2 - 2 - 1 = 0$$
$$\Sigma M_D = R_E (3\sin 30°) - 1 (3) - 2 (2) - 2 (1) = 0$$

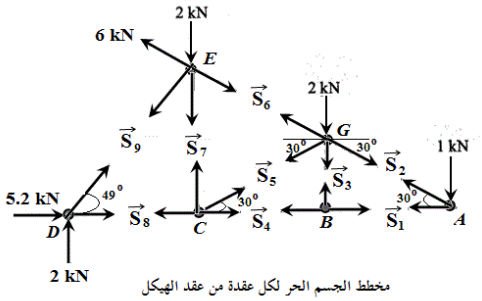
من هذه المعادلات ينتج :

$$X_D = 5.2 \text{ N} \quad Y_D = 2 \text{ N} \quad R_E = 6 \text{ N}$$

نفرض أن جميع القضبان تقع في حالة شد ثم نرسم مخطط الجسم الحر لكل عقدة من عقد الهيكل كما هو مبين في الشكل. وبناء على هذا الافتراض نمثل القوى الداخلية بأشعة خارجة من العقد.



مخطط الجسم الحر للهيكل الشبكي



مخطط الجسم الحر لكل عقدة من عقد الهيكل

العقدة A : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\Sigma F_x = -S_1 - S_2 \cos 30° = 0$$
$$\Sigma F_y = S_2 \sin 30° - 1 = 0$$

العقدة B : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\Sigma F_x = S_1 - S_4 = 0$$
$$\Sigma F_y = S_3 = 0$$

العقدة G : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\Sigma F_x = S_2 \cos 30° - S_5 \cos 30° - S_6 \cos 30° = 0$$
$$\Sigma F_y = -S_2 \sin 30° - S_3 - S_5 \sin 30° + S_6 \sin 30° - 2 = 0$$

العقدة C : معادلتا التوازن لهذه العقدة :

$$\Sigma F_x = S_4 + S_5 \cos 30° - S_8 = 0$$
$$\Sigma F_y = S_5 \sin 30° + S_7 = 0$$

العقدة D : معادلة التوازن لهذه العقدة :

$$\Sigma F_y = S_9 \sin 49° + 2 = 0$$

القوى الداخلية المتولدة في القضبان بوحدة (kN)								
S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
-1.73	2	0	-1.73	-2	4	1	-3.46	-2.65
ضغط	شد	غير محمل	ضغط	ضغط	شد	شد	ضغط	ضغط

3-3 طريقة قطع الهيكل (Method of sections)

الطريقة الثانية في تحليل الهياكل الشبكية هي طريقة قطع الهيكل أو المقاطع . تستخدم هذه الطريقة عادة عند الحاجة لتعيين القوى الداخلية المتولدة في بعض قضبان الهيكل دون الاضطرار إلى تطبيق شروط التوازن تطبيقا متتاليا على عقد الهيكل جميعها . ومن البديهي ، عندما يكون الهيكل بكامله في حالة اتزان فان أي جزء مقطوع منه سيكون في حالة توازن أيضا . ومن هنا تنبع فكرة الطريقة الحالية والتي تتلخص في قطع بعض قضبان الهيكل ثم دراسة توازن القوى المؤثرة في أحد جزئي الهيكل المقطوع . إن تحليل الهياكل الشبكية بطريقة المقاطع يجري عادة وفق الخطوات التالية :

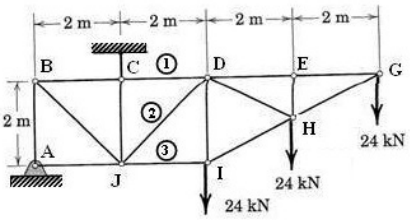
- تحديد ردود أفعال المساند التي يرتكز عليها جسم الهيكل إذا كان ذلك ضروريا.
- إحداث مقطع وهمي في الهيكل . ونختار المقطع بحيث يمر بالقضبان المراد تحديد القوى الداخلية المؤثرة فيها ، وينتج عن عملية القطع أن القوى الداخلية المؤثرة في القضبان المقطوعة تصبح قوى خارجية . كما ينبغي أن يمر المقطع بثلاثة قضبان فقط ، إذ أننا لا نستطيع بمعادلات التوازن أن نجد أكثر من ثلاثة مجاهيل ، إلا انه في بعض الحالات الخاصة يمكننا أن نقطع أكثر من ثلاثة قضبان.
- دراسة توازن الهيكل المقطوع . وهنا يستحسن اختيار جزء الهيكل الأكثر سهولة في الدراسة ، وافتراض أن القضبان المقطوعة في حالة شد ، وبناء على هذا الفرض تظهر القوى في المخطط خارجة من القضبان المقطوعة. في تحليل الهياكل نستخدم عادة إحدى جملتي معادلات التوازن التالية :

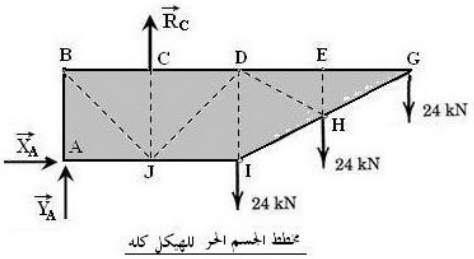
$$\Sigma F_x = 0 \;;\; \Sigma F_y = 0 \;;\; \Sigma M_o = 0$$
$$\Sigma M_A = 0 \;;\; \Sigma M_B = 0 \;;\; \Sigma M_C = 0$$

حيث A وB وC ثلاثة مراكز واقعة في مستوي القوى التي يخضع لها الهيكل ، وهي وليست على استقامة واحدة.

مثال (3– 4)

اوجد القوى الداخلية المتولدة في القضبان 1و 2 و 3 من الهيكل الشبكي الموضح في الشكل باستخدام طريقة قطع الهيكل .





الحل :.....

ردود فعل المساند : نرسم مخطط الجسم الحر للهيكل بأكمله ثم نكتب معادلات التوازن :

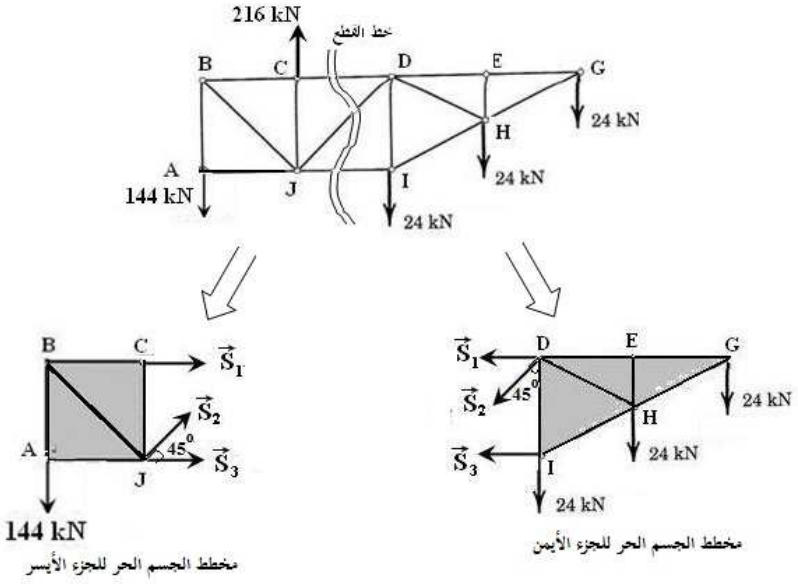
$$\Sigma F_x = X_A = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_A + R_C - 24 - 24 - 24 = 0$$
$$\Sigma M_A = R_C (2) - 24 (4) - 24 (6) - 24 (8) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج أن :

$$Y_A = -144 \text{ N} \qquad R_C = 216 \text{ N}$$

القوى الداخلية في القضبان :

نقطع الهيكل بحيث يمر مستوي القطع بالقضبان المعنية بالحساب ثم نرسم مخطط الجسم الحر للجزء الأيمن مثلا (أو للجزء الأيسر) من الهيكل كما هو مبين في الشكل . في هذه الحالة نفرض أن القضبان المقطوعة تقع في حالة شد ، ولهذا السبب تظهر القوى في المخطط خارجة من القضبان المقطوعة.



معادلات التوازن للجزء الأيمن من الهيكل:

$$\Sigma F_x = S_1 - S_2 \cos 45° - S_3 = 0$$
$$\Sigma F_y = -S_2 \cos 45° - 24 - 24 - 24 = 0$$
$$\Sigma M_D = -S_3 (2) - 24 (2) - 24 (4) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج أن :

$$S_1 = 144 \text{ kN} \qquad S_2 = -101.8 \text{ kN} \qquad S_3 = -72 \text{ kN}$$

ملاحظة هامة : يمكن الحصول على نفس النتائج بدراسة توازن الجزء الأيسر من الهيكل .

فاستنادا إلى مخطط الجسم الحر لهذا الجزء يمكن كتابة معادلات التوازن كما يلي :

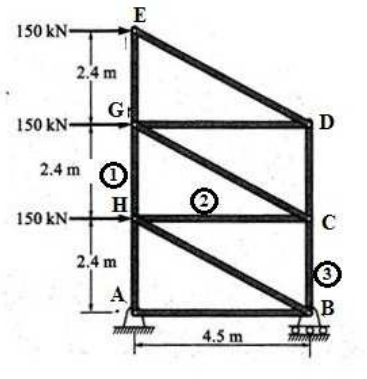
$$\Sigma F_x = S_1 + S_2 \cos 45° + S_3 = 0$$
$$\Sigma F_y = S_2 \cos 45° + 216 - 144 = 0$$
$$\Sigma M_J = -S_1 (2) + 144 (2) = 0$$

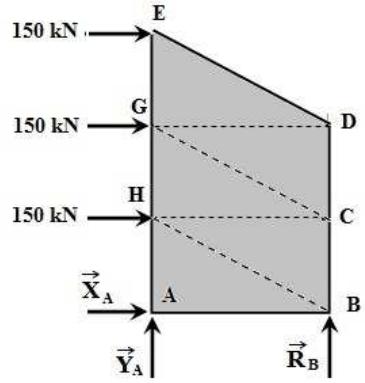
من هذه المعادلات نحصل على نفس النتائج السابقة .

S_1	S_2	S_3
144	-101.8	-72
شد	ضغط	ضغط

مثال (3– 5)

اوجد القوى الداخلية المتولدة في القضبان 1و 2 و 3 من الهيكل الشبكي الموضح في الشكل باستخدام طريقة قطع الهيكل .





مخطط الجسم الحر للهيكل

الحل :.....

ردود فعل المساند : نرسم مخطط الجسم الحر للهيكل بأكمله ثم نكتب معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = X_A + 450 = 0$$
$$\Sigma F_y = Y_A + R_B = 0$$
$$\Sigma M_A = R_B (4.5) - 150 (7.2) - 150 (4.8) - 150 (2.4) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج أن :

$$X_A = -450 \text{ kN} \quad ; \quad Y_A = -480 \text{ kN} \quad ; \quad R_B = 480 \text{ kN}$$

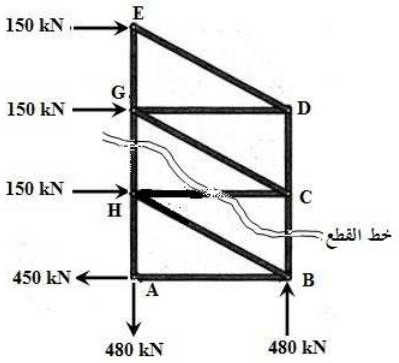
القوى الداخلية في القضبان : نقطع الهيكل بحيث يمر مستوي القطع بالقضبان المعنية بالحساب ثم نرسم مخطط الجسم الحر للجزء السفلي من الهيكل كما هو مبين في الشكل.

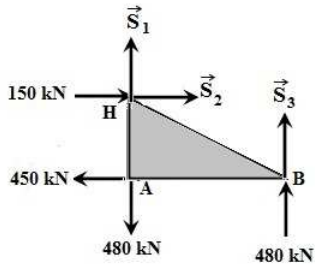
معادلات التوازن لهذا الجزء هي:

$$\Sigma F_x = S_2 + 150 - 450 = 0$$
$$\Sigma F_y = S_1 + S_3 + 480 - 480 = 0$$
$$\Sigma M_H = S_3 (4.5) + 480 (4.5) - 450 (2.4) = 0$$

من هذه المعادلات ينتج أن :

$S_1 = 240$ kN $S_2 = 300$ kN $S_3 = -240$ kN





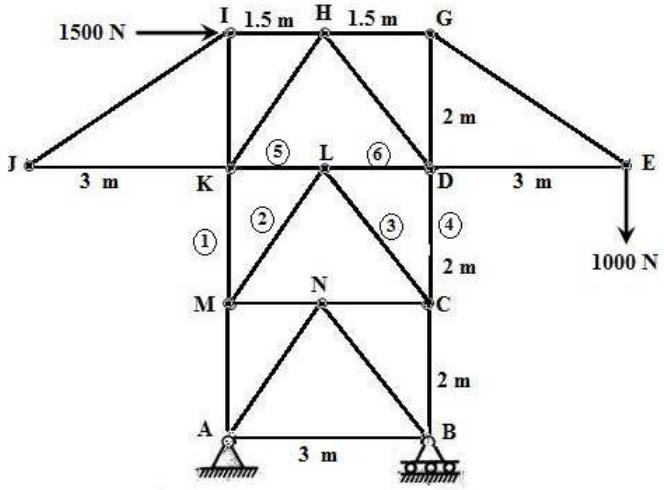
مخطط الجسم الحر للجزء السفلي

الجدول التالي يبين القوى المطلوبة قيمة ونوعا :

S_1	S_2	S_3
240	300	-240
شد	شد	ضغط

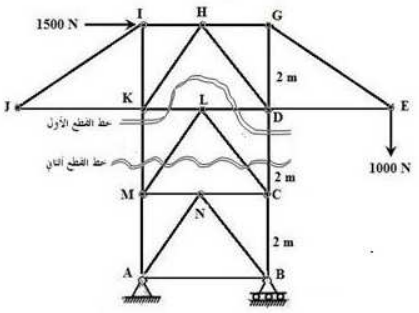
مثال (3– 6)

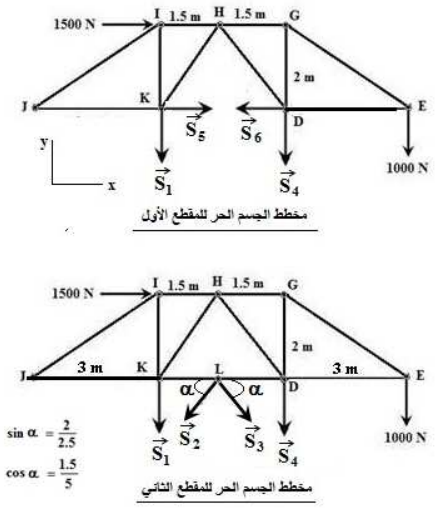
اوجد القوى الداخلية المتولدة في القضبان 1و 2 و 3 و4 من الهيكل الشبكي الموضح في الشكل باستخدام طريقة قطع الهيكل .



الحل :.....

نقطع الهيكل مرتين متتاليتين كما هو مبين في الشكل . في المرحلة الأولى يمر خط القطع بالقضبان 1 و5 و6 و4 ، وفي المرحلة الثانية يمر خط القطع بالقضبان 1 و2 و 3 و4 وبناء على ذلك نرسم مخطط الجسم الحر المناسب لكل مقطع كما هو واضح في الشكل.





معادلات التوازن للجزء المتعلق بالمقطع الأول هي :

$$\Sigma M_D = S_1 (3) - 1500 (2) - 1000 (3) = 0$$
$$\Sigma F_y = - S_1 - S_4 - 1000 = 0$$
$$S_1 = 2000 \text{ N} \qquad S_4 = - 3000 \text{ N}$$

ومن معادلات التوازن للجزء المتعلق بالمقطع الثاني نجد :

$$\Sigma F_x = - S_2 \cos \alpha + S_3 \cos \alpha + 1500 = 0$$
$$\Sigma F_y = - S_1 - S_4 - S_2 \sin \alpha - S_3 \sin \alpha - 1000 = 0$$
$$S_2 = 1250 \text{ N} \qquad S_3 = - 1250 \text{ N}$$

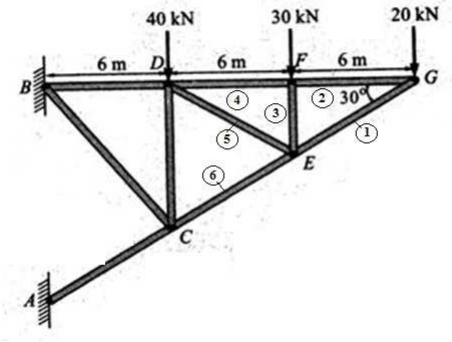
الجدول التالي يبين القوى المطلوبة قيمة ونوعا :

S_1	S_2	S_3	S_4
2000	1250	- 1250	- 3000
شد	شد	ضغط	ضغط

مسائل للمراجعة
REVIEW PROBLEMS

مسألة رقم (1) :

يخضع الهيكل الشبكي الموضح في الشكل لتأثير ثلاث قوى خارجية . احسب القوى المحورية الداخلية المتولدة في القضبان (1,2,3,4,5,6) بطريقة فصل العقد.

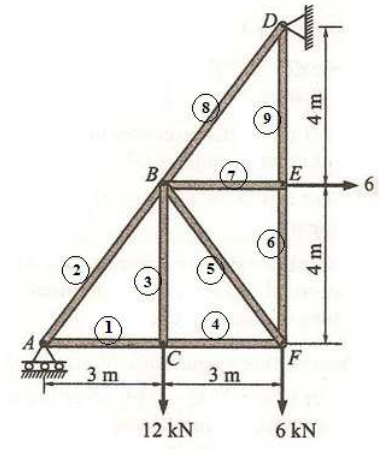


الجواب :

S_1= 40 kN (C) , S_2= 34.64 kN (T), S_3= 30 kN (C), S_4= 34.64 kN (T), S_5= 30 kN (T) , S_6= 70 kN (C)

مسألة رقم (2) :

احسب بطريقة فصل العقد القوى المحورية الداخلية المتولدة في جميع قضبان الهيكل المبين في الشكل .

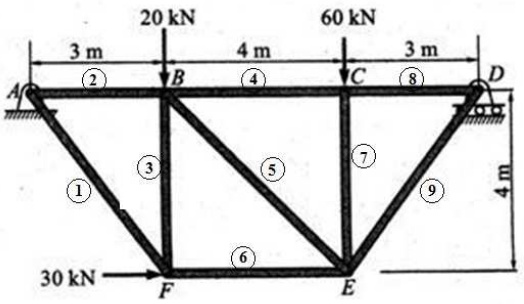


الجواب :

S_1= 7.5 kN (T) , S_2= 12.5 kN (C), S_3= 12 kN (T), S_4= 7.5 kN (T),
S_5= 12.5 kN (C) , S_6= 16 kN (T)
S_7= 6 kN (T) , S_8= 10 kN (C)
S_9= 16 kN (T)

مسألة رقم (3) :

احسب بطريقة فصل العقد القوى المحورية الداخلية المتولدة في جميع قضبان الهيكل المبين في الشكل .

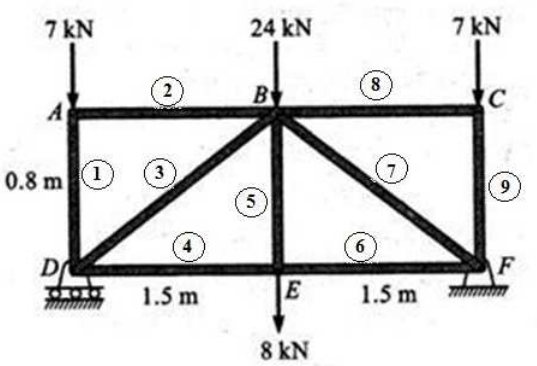


الجواب :

S_1= 55 kN (T) , S_2= 3 kN (C), S_3= 44 kN (C),
S_4= 27 kN (C), S_5= 33.94 kN (T) , S_6= 3 kN (T)
S_7= 60 kN (C), S_8= 27 kN (C) , S_9= 45 kN (T)

مسألة رقم (4) :

احسب بطريقة فصل العقد القوى المحورية الداخلية المتولدة في جميع قضبان الهيكل المبين في الشكل .

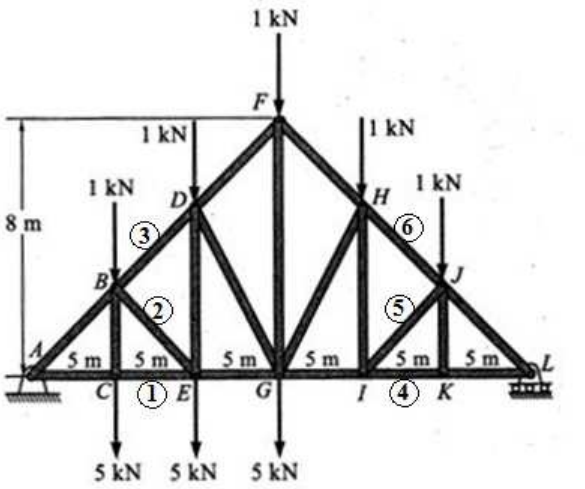


الجواب :

S_1= 7 kN (C) , S_2= 0 , S_3= 34 kN (C),
S_4= 30 kN (T), S_5= 8 kN (T) , S_6= 30 kN (T)
S_7= 34 kN (C), S_8= 0, S_9= 7 kN (C)

مسألة رقم (5) :

اوجد بطريقة قطع الهيكل القوى المحورية الداخلية المتولدة في القضبان (1,2,3,4,5,6) من الهيكل المبين في الشكل .

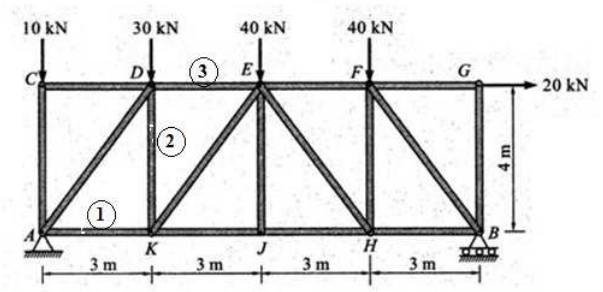


الجواب :

S_1= 23.44 kN (T) , S_2= 6.38 kN (C), S_3= 20.19 kN (C), S_4= 14.06 kN (T), S_5= 1.07 kN (C) , S_6= 14.88 kN (C)

مسألة رقم (6) :

اوجد بطريقة قطع الهيكل القوى المحورية الداخلية المتولدة في القضبان (1,2,3) من الهيكل المبين في الشكل.

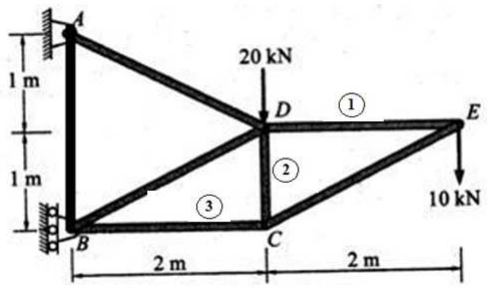


الجواب :

S_1= 54.4 kN (T) , S_2= 15.84 kN (T), S_3= 34.4 kN (C

مسألة رقم (7) :

اوجد بطريقة قطع الهيكل القوى المحورية الداخلية المتولدة في القضبان (1,2,3) من الهيكل المبين في الشكل .

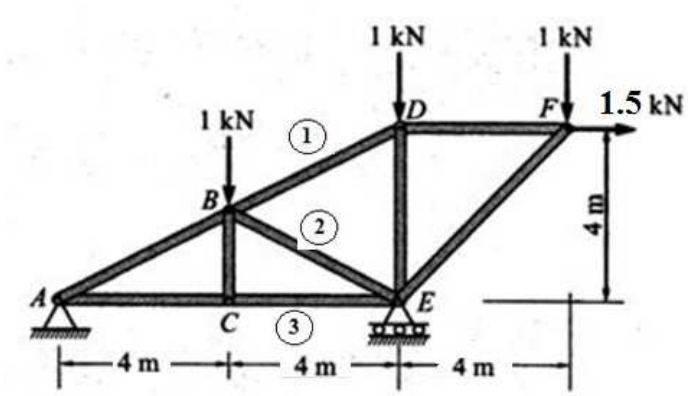


الجواب :

S_1= 20 kN (T) , S_2= 10 kN (T), S_3= 20 kN (C)

مسألة رقم (8) :

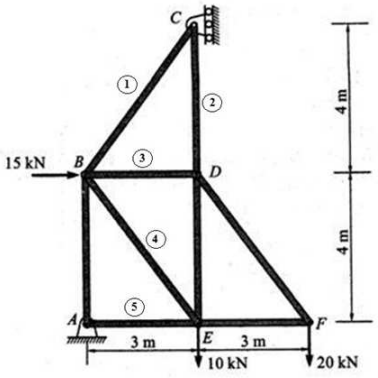
اوجد بطريقة قطع الهيكل القوى المحورية الداخلية المتولدة في القضبان (1,2,3) من الهيكل المبين في الشكل .



الجواب :

S_1= 2.8 kN (T) , S_2= 1.12 kN (C), S_3= 0

مسألة رقم (9) :



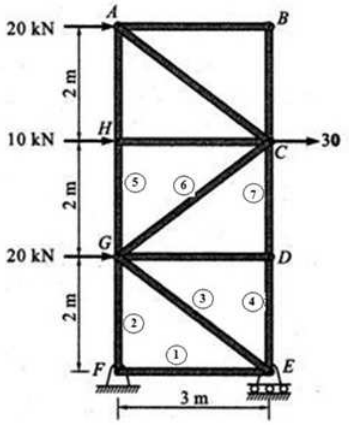
1) اوجد بطريقة فصل العقد القوى المحورية الداخلية المتولدة في القضيبين (1,2) من الهيكل المبين في الشكل .

2) اوجد بطريقة قطع الهيكل القوى المحورية الداخلية المتولدة في القضبان (3,4,5) من الهيكل .

الجواب :

S_1= 43.75 kN (C) , S_2= 35 kN (T), S_3= 15 kN (T), S_4= 6.25 kN (C), S_5= 11.25 kN (C)

مسألة رقم (10) :



1) اوجد بطريقة فصل العقد القوى المحورية الداخلية المتولدة في القضبان (1,2,3,4) من الهيكل المبين في الشكل .

2) اوجد بطريقة قطع الهيكل القوى المحورية الداخلية المتولدة في القضبان (5,6,7) من الهيكل .

الجواب :

S_1= 80 kN (T) , S_2= 106.67 kN (T), S_3= 96.15 kN (C), S_4= 53.3 kN (C), S_5= 13.34 kN (T) , S_6= 72.11 kN (T) , S_7= 0

الفصل الرابع

توازن القوى الفراغية

EQUILIBRIUM OF FORCES IN SPACE

4–1 المتجهات الأساسية في علم السكون:

أشعة الواحدة (Unit vectors):

يدعى المتجه الذي طوله يساوي الواحد بشعاع الواحدة ، ويتجه وفق الاتجاه الموجب للمحور الموجه . إن لكل محور Axis شعاع واحدة طوله يساوي تدريجة واحدة من تدريجات ذلك المحور . ليكن لدينا مثلا المحور المبين في الشكل (4–1) ، وبفرض أن **u** هو شعاع الواحدة الخاص بهذا المحور ، وليكن **F** متجها آخر محمولا على المحور نفسه. فإذا رمزنا للقيمة المطلقة للمتجه بالحرف F فقط (بلا شعاع) وكان طوله كما هو موضح في الشكل يساوي ثلاث تدريجات (F=3) فيكون عندئذ :

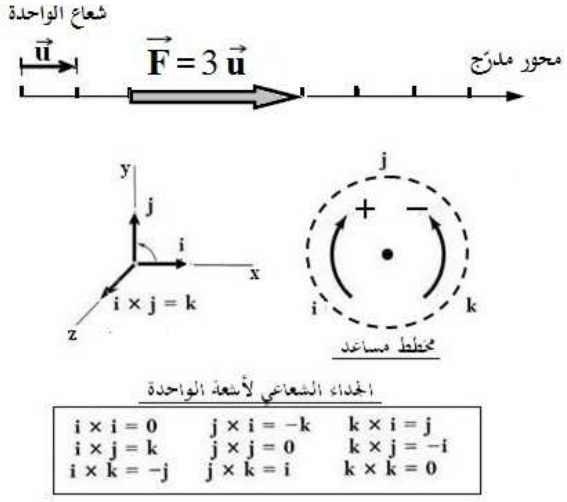
$$\vec{\boldsymbol{F}} = F\,\vec{\boldsymbol{u}}$$

وبناء على ذلك يمكن أن نكتب العلاقة الشعاعية الهامة التالية :

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{F}$$

ولشعاع الواحدة أهمية بالغة في المسائل كما سنرى فيما بعد . ويطلق على أشعة الواحدة المنطبقة على المحاور الثلاثة المتعامدة x وy و z بأشعة الواحدة الأساسية ويرمز لها بالأحرف **i** و**j** و **k** كما هو مبين في الشكل المذكور . أي أن **i** متّجه مقداره الواحد وينطبق على الاتجاه الموجب للمحور x ، وكذلك **j** متّجه مقداره الواحد وينطبق على الاتجاه الموجب للمحور y ، وأخيرا **k** متّجه مقداره الواحد وينطبق على الاتجاه الموجب

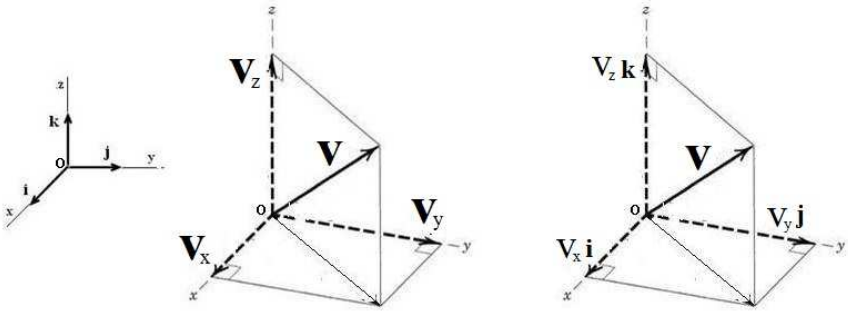
للمحور **z** . كما يعرض الشكل المذكور آنفا علاقات الجداء الشعاعي لأشعة الواحدة الضرورية لحل المسائل الفراغية بالطريقة الشعاعية .



الشكل (4–1)

وإذا كان لمتجه ما **V** كما هو مبين في الشكل (4–2) ثلاث مركبات مقاديرها $\mathbf{V}_x$ و $\mathbf{V}_y$ و $\mathbf{V}_z$ في اتجاه المحاور المتعامدة x و y و z فانه يمكن التعبير عن المتجه المذكور بإحدى الصيغتين التاليتين :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_x + \mathbf{V}_y + \mathbf{V}_z$$
$$\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}$$



الشكل (4–2)

متّجه الموضع (Position Vector): متّجه الموضع لنقطة ما A هو قطعة مستقيمة موجهة من نقطة مرجعية ، كمبدأ الإحداثيات ، إلى النقطة A . ويرمز له بالرمز $\mathbf{r}_A$ كما هو مبين في الشكل (4–3) . إذا كانت x و y و z هي إحداثيات النقطة A منسوبة لجملة محاور إحداثية متعامدة فتكون حينئذ الصيغة الشعاعية لمتجه الموضع هي :

$$\mathbf{r}_A = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

وطول المتجه r_A هو المسافة الواصلة بين مبدأ الإحداثيات والنقطة A ، ويحسب عادة من العلاقة التالية :

$$r_A = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

يدعى المتجه الذي يصل بين نقطتين A و B ويتجه من A إلى B بمتجه الانتقال $\mathbf{r}_{AB}$ ويتحدد كما يلي :

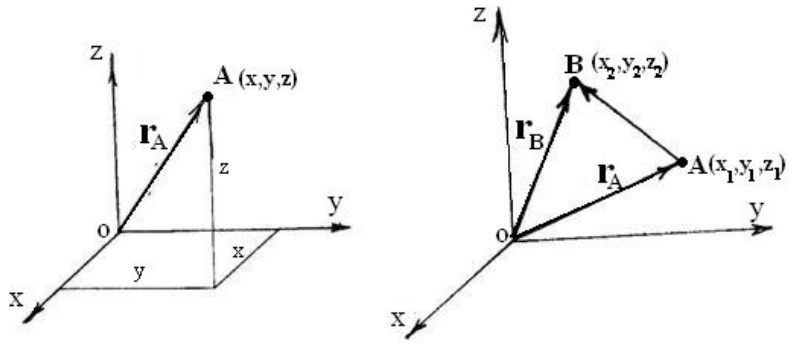
$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$$

وبدلالة إحداثيات النقطتين المذكورتين يكون متجه الانتقال :

$$\mathbf{r}_{AB} = (x_2-x_1)\,\mathbf{i} + (y_2-y_1)\,\mathbf{j} + (z_2-z_1)\,\mathbf{k}$$

ويحسب مقداره بالعلاقة :

$$r_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



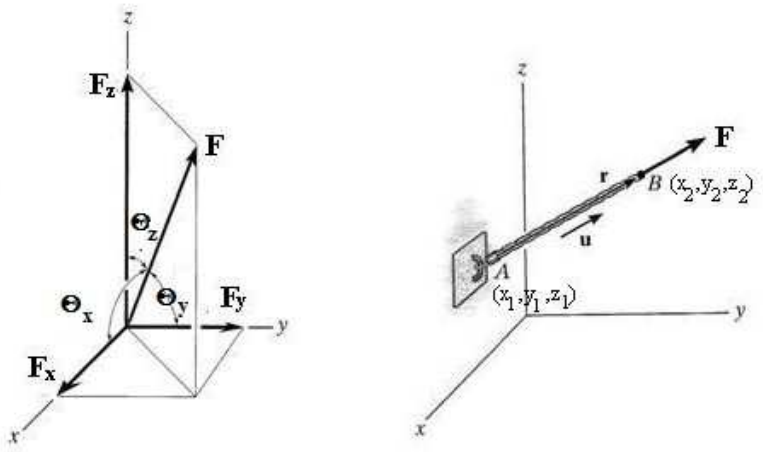
الشكل (4–3)

متّجه القوة (Force Vector): ليكن متّجه القوة **F** المبين في الشكل(4-4) والمنسوب لجملة محاور إحداثية متعامدة oxyz . فإذا فرضنا أن هذا المتجه يصنع الزوايا θ_x و θ_y و θ_z مع المحاور ، وان مساقطه هي F_x و F_y و F_z في اتجاه المحاور **x** و**y** و **z** فانه يمكن التعبير عن المتجه المذكور بالمجموع الشعاعي التالي :

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

حيث :

$$F_x = F\cos\theta_x$$
$$F_y = F\cos\theta_y$$
$$F_z = F\cos\theta_z$$
$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$$



الشكل (4-4)

ولا بد من الإشارة إلى الحالة التي تصادفنا في حل المسائل ولاسيّما المتعلقة بالقوى الفراغية، وهي عندما يمر حامل قوة ما **F** من نقطتين $A(x_1,y_1,z_1)$ و$B(x_2,y_2,z_2)$ إحداثياتهما معلومة كما هو مبين في الشكل السابق . نستطيع في هذه الحالة تعيين متجه القوة بدلالة شعاع الواحدة **u** المنسوب إلى المحور الحامل للقوة والمار بالنقطتين المذكورتين آنفا كما يلي:

$$\mathbf{F} = F\,\mathbf{u} = F\left(\frac{\mathbf{r_{AB}}}{r_{AB}}\right)$$

أو بشكل آخر :

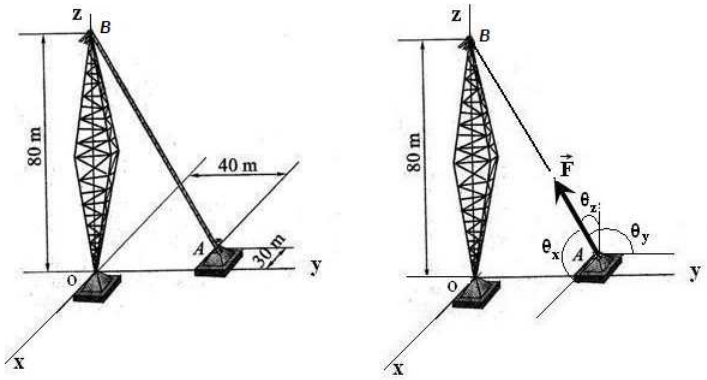
$$\boldsymbol{F} = F\left[\frac{(x_2 - x_1)\,\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\,\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\,\mathbf{k}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}\right]$$

وبناء على ما سبق نجد أن :

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

مثال (4 – 1)

يبين الشكل برجاً ارتفاعه 80 m . إذا علمت أن قوة الشد في السلك AB تساوي 2500 N فان المطلوب : (1) تحديد المركبات الديكارتية المتعامدة لقوة الشد المؤثرة في نقطة التثبيت A . (2) الزوايا التي تصنعها قوة الشد مع محاور الإحداثيات.



الحل :

المركبات الديكارتية المتعامدة لقوة الشد : بما أن حامل قوة الشد يمر من النقطتين A وB وملاحظة أن إحداثيات هاتين النقطتين معلومة ، لذا يمكن تعيين متجه هذه القوة كحاصل ضرب قيمتها العددية بشعاع الوحدة $\mathbf{u}_{AB}$

$$\mathbf{F} = F\,\mathbf{u}_{AB} = F\left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{AB}}}{AB}\right)$$

$$\mathbf{F} = 2500\left[\frac{(0+30)\,\mathbf{i} + (0-40)\,\mathbf{j} + (80-0)\,\mathbf{k}}{\sqrt{(30)^2+(-40)^2+(80)^2}}\right]$$

$$\mathbf{F} = 795\,\mathbf{i} - 1060\,\mathbf{j} + 2120\,\mathbf{k}$$

$$F_x = 795\text{ N}\ ;\ \ F_y = -1060\text{ N}\ ;\ \ F_z = 2120\text{ N}$$

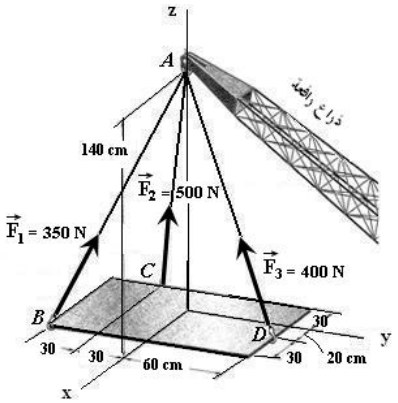
الزوايا التي تصنعها قوة الشد مع محاور الإحداثيات :

$$F_x = F\cos\theta_x \Rightarrow \cos\theta_x = 0.318 \Rightarrow \theta_x = 71.5°$$
$$F_y = F\cos\theta_y \Rightarrow \cos\theta_y = -0.424 \Rightarrow \theta_y = 115.1°$$
$$F_z = F\cos\theta_z \Rightarrow \cos\theta_z = 0.848 \Rightarrow \theta_z = 32.0°$$

مثال (4–2)

يبين الشكل صفيحة معلّقة بواسطة ثلاثة كابلات . اكتب الصيغ الشعاعية الديكارتية لقوى الشد التي تنشأ في الكابلات الثلاثة إذا علمت أن مقادير هذه القوى هي:

F_1=350 N و F_2=500 N و F_3=400 N .



الحل :

قوة الشد في الكبل AB : بما أن قوة الشد F_1 تتجه من النقطة B(50,-60,0) إلى النقطة A(0,0,140) ، وملاحظة أن إحداثيات هاتين النقطتين معلومة ، لذا يمكن تعيين متجه هذه القوة كحاصل ضرب قيمتها العددية بشعاع الوحدة $\mathbf{u}_{BA}$

$$\mathbf{F_1} = \mathrm{F}_1\,\mathbf{u}_{\mathrm{BA}} = \mathrm{F}_1\left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{BA}}}{\mathrm{BA}}\right)$$

$$\mathbf{F_1} = 350\left[\frac{(0-50)\,\mathbf{i} + (0+60)\,\mathbf{j} + (140-0)\,\mathbf{k}}{\sqrt{(-50)^2+(60)^2+(140)^2}}\right]$$

$$\mathbf{F_1} = -109\,\mathbf{i} + 131\,\mathbf{j} + 306\,\mathbf{k}$$

قوة الشد في الكبل AC : بما أن قوة الشد F_2 تتجه من النقطة C(-30,-30,0) إلى النقطة A(0,0,140) ، وملاحظة أن إحداثيات هاتين النقطتين معلومة ، لذا يمكن تعيين متجه هذه القوة كحاصل ضرب قيمتها العددية بشعاع الوحدة $\mathbf{u}_{\mathrm{CA}}$

$$\mathbf{F_2} = \mathrm{F}_2\,\mathbf{u}_{\mathrm{CA}} = \mathrm{F}_2\left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{CA}}}{\mathrm{CA}}\right)$$

$$\mathbf{F_2} = 500\left[\frac{(0+30)\,\mathbf{i} + (0+30)\,\mathbf{j} + (140-0)\,\mathbf{k}}{\sqrt{(30)^2+(30)^2+(140)^2}}\right]$$

$$\mathbf{F_2} = 103\,\mathbf{i} + 103\,\mathbf{j} + 479\,\mathbf{k}$$

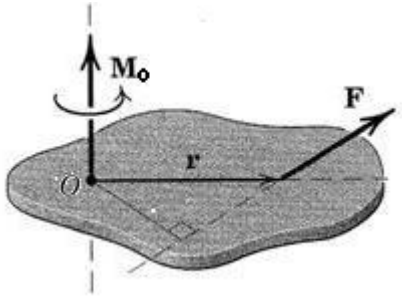
قوة الشد في الكبل AD : بما أن قوة الشد F_3 تتجه من النقطة D(20,60,0) إلى النقطة A(0,0,140) ، وملاحظة أن إحداثيات هاتين النقطتين معلومة ، لذا يمكن تعيين متجه هذه القوة كحاصل ضرب قيمتها العددية بشعاع الوحدة $\mathbf{u}_{\mathrm{DA}}$

$$\mathbf{F_3} = \mathrm{F}_3\,\mathbf{u}_{\mathrm{DA}} = \mathrm{F}_3\left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{DA}}}{\mathrm{DA}}\right)$$

$$\mathbf{F_3} = 400\left[\frac{(0-20)\,\mathbf{i} + (0-60)\,\mathbf{j} + (140-0)\,\mathbf{k}}{\sqrt{(-20)^2+(-60)^2+(140)^2}}\right]$$

$$\mathbf{F_3} = -52\,\mathbf{i} + 156\,\mathbf{j} + 365\,\mathbf{k}$$

متّجه العزم (Moment Vector): إن عزم القوة حول نقطة ما كما هو مبين في الشكل(4–5) هو متجه يساوي الجداء الشعاعي لمتجهين الأول هو متجه الموضع الذي يبدأ بهذه النقطة وينتهي بأية نقطة على حامل القوة والثاني هو القوة ذاتها . لهذا فإن نتيجة الجداء هي متجه $\mathbf{M_O}$حامله عمودي على المستوي الذي يضم متجهي الموضع والقوة .



الشكل (4–5)

وانطلاقا من هذا التعريف يمكن تعيين متجه العزم للقوة **F** بالنسبة للنقطة O كما هو مبين في الشكل(1) باستخدام العلاقات التالية :

بفرض أن :

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k}$$

فيكون عندئذ :

$$\mathbf{M_O} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M_O} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} y & z \\ Fy & Fz \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} x & z \\ Fx & Fz \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} x & y \\ Fx & Fy \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M_O} = (yF_z - zF_y)\,\mathbf{i} - (xF_z - zF_x)\,\mathbf{j} + (xF_y - yF_x)\,\mathbf{k}$$

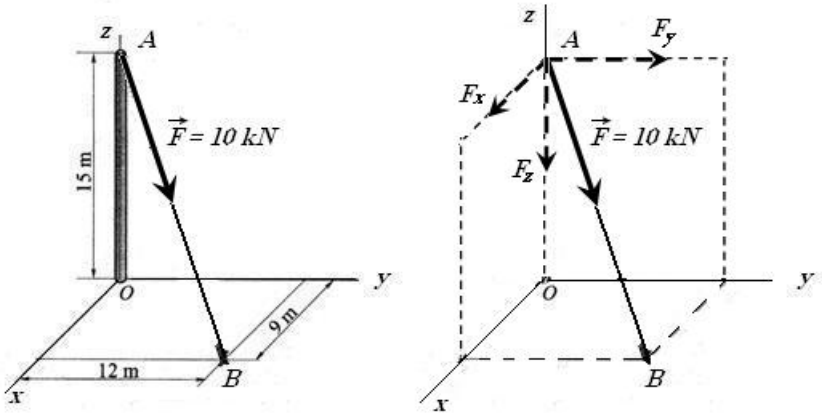
أو بشكل آخر:

$$\mathbf{M_O} = M_x\,\mathbf{i} + M_y\,\mathbf{j} + M_z\,\mathbf{k}$$

حيث تمثل M_x و M_y و M_z مركبات العزم $\mathbf{M_O}$ في اتجاه المحاور x و y و z .

مثال (4 – 3)

يبين الشكل عمودا ارتفاعه 15 m . تؤثر قوة شد مقدارها 10 kN في الطرف A من الكبل المثبت في الأرض في النقطة B . المطلوب تحديد العزم الذي تولده قوة الشد حول النقطة O مبدأ الإحداثيات.



الحل :

يتعين متجه قوة الشد التي تؤثر في العمود كما يلي :

$$\mathbf{F} = F\,\mathbf{u}_{AB} = F\left(\frac{\overrightarrow{\mathbf{AB}}}{AB}\right)$$

$$\mathbf{F} = 10\left[\frac{(9-0)\,\mathbf{i} + (12-0)\,\mathbf{j} + (0-15)\,\mathbf{k}}{\sqrt{(9)^2 + (12)^2 + (-15)^2}}\right]$$

$$\mathbf{F} = 4.24\,\mathbf{i} + 5.66\,\mathbf{j} - 7.07\,\mathbf{k}$$

$F_x = 4.24$ kN ; $F_y = 5.66$ kN ; $F_z = -7.07$ kN

كما يتعين متجه العزم الذي تولده قوة الشد حول النقطة o كما يلي :

$$\mathbf{M_O} = M_x\,\mathbf{i} + M_y\,\mathbf{j} + M_z\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M_O} = -5.66(15)\,\mathbf{i} + 4.24(15)\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M_O} = -84.9\,\mathbf{i} + 63.6\,\mathbf{j}$$

$$M_x = -84.9 \text{ kN-m} \;\; ; \;\; M_y = 63.6 \text{ kN-m}$$

كما يمكن تعيين متجه العزم الذي تولده قوة الشد حول النقطة o كما يلي :

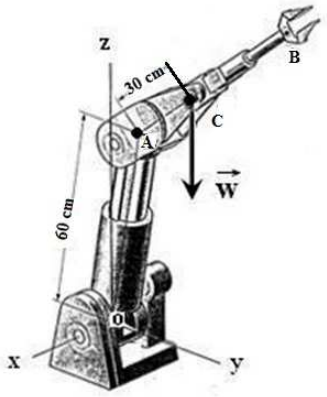
$$\mathbf{M_O} = \mathbf{r_{OA}} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 15 \\ 4.24 & 5.66 & -7.07 \end{vmatrix}$$

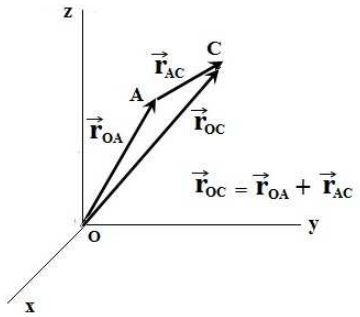
$$\mathbf{M_O} = (0 - 84.9)\,\mathbf{i} + (63.6 - 0)\,\mathbf{j} + (0 - 0)\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{M_O} = -\,84.9\,\mathbf{i} + 63.6\,\mathbf{j}$$

وهي نفس النتيجة السابقة .

مثال (4 – 4)

يبين الشكل إنسانا آليا Robot . تؤثر قوة W=160 N في النقطة C من الذراع AB . بفرض أن الذراع OA يصنع مع المحاور الإحداثية الزوايا التالية $\theta_x=90°$ و $\theta_y=60°$ و$\theta_z=30°$ ، وان الذراع AB يصنع مع المحاور الإحداثية الزوايا التالية $\theta_x=90°$ و $\theta_y=30°$ و$\theta_z=60°$. المطلوب تحديد العزم الذي تولده القوة **W** حول النقطة O مبدأ الإحداثيات.





الحل :

يتعين متجه الموضع $\mathbf{r_{OA}}$ كما يلي :

$$\mathbf{r_{OA}} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r_{OA}} = 0.6 \cos\theta_x\,\mathbf{i} + 0.6 \cos\theta_y\,\mathbf{j} + 0.6 \cos\theta_z\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r_{OA}} = 0.6 \cos 90° \, \mathbf{i} + 0.6 \cos 60° \, \mathbf{j} + 0.6 \cos 30° \, \mathbf{k}$$
$$\mathbf{r_{OA}} = 0.3 \, \mathbf{j} + 0.52 \, \mathbf{k}$$

ويتحدد متجه الموضع $\mathbf{r_{AC}}$ بصورة مشابهة كما يلي :

$$\mathbf{r_{AC}} = x \, \mathbf{i} + y \, \mathbf{j} + z \, \mathbf{k}$$
$$\mathbf{r_{AC}} = 0.3 \cos \theta_x \, \mathbf{i} + 0.3 \cos \theta_y \, \mathbf{j} + 0.3 \cos \theta_z \, \mathbf{k}$$
$$\mathbf{r_{AC}} = 0.3 \cos 90° \, \mathbf{i} + 0.3 \cos 30° \, \mathbf{j} + 0.3 \cos 60° \, \mathbf{k}$$
$$\mathbf{r_{AC}} = 0.26 \, \mathbf{j} + 0.15 \, \mathbf{k}$$

وبناء على خواص المتجهات في الجمع يمكن أن نكتب :

$$\mathbf{r_{OC}} = \mathbf{r_{OA}} + \mathbf{r_{AC}}$$
$$\mathbf{r_{OC}} = (0.3 \, \mathbf{j} + 0.52 \, \mathbf{k}) + (0.26 \, \mathbf{j} + 0.15 \, \mathbf{k})$$
$$\mathbf{r_{OC}} = 0.56 \, \mathbf{j} + 0.67 \, \mathbf{k}$$

ويتحدد متجه العزم الذي تولده القوة **W** حول النقطة o كما يلي :

$$\mathbf{M_O} = \mathbf{r_{OC}} \times \mathbf{W}$$

وبما أن القوة **W** توازي المحور الشاقولي oz وتتجه نحو الأسفل لذا نكتب :

$$\mathbf{M_O} = (0.56 \, \mathbf{j} + 0.67 \, \mathbf{k}) \times (-160 \, \mathbf{k})$$
$$\mathbf{M_O} = -89.6 \, \mathbf{i}$$

تبين هذه النتيجة أن شعاع العزم يتجه وفق الاتجاه السالب للمحور ox

2–4 محصلات القوى والتحويل الى ابسط شكل ممكن :

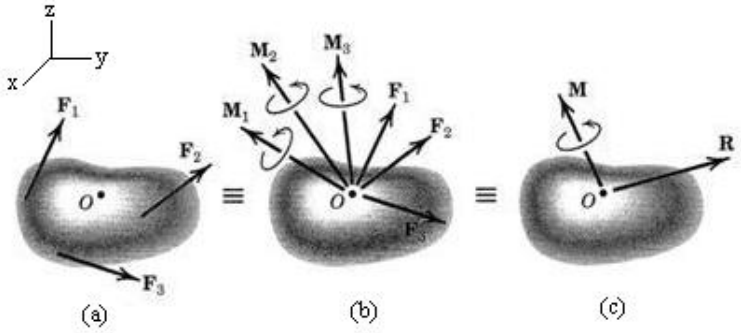
يمكننا كما هو واضح في الشكل (4–6) تحديد محصلة مجموعة من القوى الفراغية المؤثرة في جسم ما بطريقة مماثلة للطريقة التي استخدمت في حالة القوى الواقعة في مستو واحد . ويجري عادة اختزال جملة قوى فراغية إلى قوة **R** ومزدوجة **M** بالنسبة لمركز تحويل كيفي ، كمركز جملة الإحداثيات الديكارتية o مثلا ، باستخدام العلاقات التالية :

$$\mathbf{R} = \Sigma \, \mathbf{F} = (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} + (\Sigma F_z)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{M} = \Sigma \, \mathbf{M_o} = (\Sigma M_x)\mathbf{i} + (\Sigma M_y)\mathbf{j} + (\Sigma M_z)\mathbf{k}$$

حيث :

ΣF_x و ΣF_y و ΣF_z المجموع الجبري لمساقط القوى المفروضة على كل محور .

ΣM_x و ΣM_y و ΣM_z المجموع الجبري لعزوم القوى المفروضة حول كل محور .



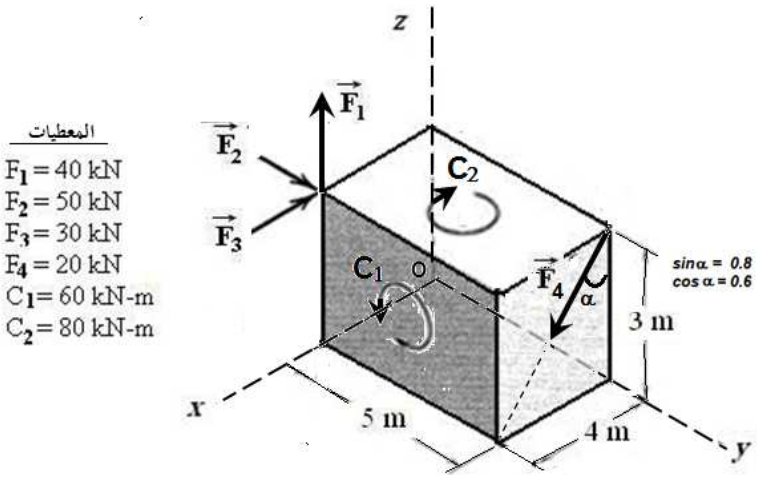
الشكل (4–6)

وعند تحويل مجموعة قوى فراغية إلى أبسط محصلة أو شكل ممكن ، فإننا نلاحظ إحدى الحالتين التاليتين :

- الحالة الأولى : ويكون فيها الجداء العددي **R.M = 0** . في هذه الحالة تتحول مجموعة القوى المفروضة إما إلى قوة **R** فقط ، وإما إلى مزدوجة **M** فقط ، أو أن مجموعة القوى تقع في حالة توازن **(R=0 , M=0)** .
- الحالة الثانية : ويكون فيها الجداء العددي **R.M ≠ 0** . في هذه الحالة تتحول مجموعة القوى المفروضة إلى لولب حركي ، أي أن الجسم الذي يقع تحت تأثيرها تكون حركته لولبية .

مثال (4– 5)

يبين الشكل متوازي مستطيلات يخضع لتأثير أربع قوى ومزدوجتين . المزدوجة C_1 تقع في مستو يوازي المستوي yoz بينما تقع المزدوجة C_2 تقع في مستو يوازي المستوي xoy . والمطلوب هو تحويل هذه المجموعة إلى أبسط شكل ممكن باستخدام الطريقتين العددية والشعاعية. المعطيات موضحة في الشكل .



الحل :

الطريقة العددية (Scalar Solution) :

تتحدد محصلة مجموعة من القوى الفراغية بالعلاقتين :

$$\mathbf{R} = (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} + (\Sigma F_z)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{M} = (\Sigma M_x)\mathbf{i} + (\Sigma M_y)\mathbf{j} + (\Sigma M_z)\mathbf{k}$$

وبناء على معطيات المسألة نكتب :

$$\Sigma F_x = -30 + 20 (\sin \alpha) = -14 \text{ kN}$$
$$\Sigma F_y = 50 \text{ kN}$$
$$\Sigma F_z = 40 - 20 (\cos \alpha) = 28 \text{ kN}$$
$$\Sigma M_x = -50(3) - 12 (5) + 60 = -150 \text{ kN-m}$$
$$\Sigma M_y = -40(4) - 30 (3) + 16 (3) = -202 \text{ kN-m}$$
$$\Sigma M_z = 50(4)-16(5) - 80 = 40 \text{ kN-m}$$
$$\mathbf{R} = -14\mathbf{i} + 50\mathbf{j} + 28\mathbf{k}$$
$$\mathbf{M} = -150\mathbf{i} - 202\mathbf{j} + 40\mathbf{k} \text{ N-m}$$

بما أن **R** و **M** لا يساويان الصفر فانه من الضروري حساب الجداء العددي لهما كما يلي :

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M} = \Sigma F_x \cdot \Sigma M_x + \Sigma F_y \cdot \Sigma M_y + \Sigma F_z \cdot \Sigma M_z$$
$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M} = -14 (-150) + 50 (-202) + 28 (40) = - 6880$$

وبما أن هذا الجداء لا يساوي الصفر فان المتجهين **R** و **M** غير متعامدين وبالتالي فان مجموعة القوى المفروضة تتحول إلى لولب حركي .

الطريقة الشعاعية (Vector Solution) :

تتحدد القوة **R** بالعلاقة التالية :

$$\mathbf{R} = \Sigma\, \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4$$

حيث :

$$\mathbf{F}_1 = 40\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F}_2 = 50\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_3 = -30\,\mathbf{i}$$
$$\mathbf{F_4} = 20\left[\frac{4\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{k}}{5}\right] = 16\,\mathbf{i} - 12\,\mathbf{k}$$

بالتعويض نجد :

$$\mathbf{R} = -14\mathbf{i} + 50\mathbf{j} + 28\mathbf{k}$$

يتعين العزم **M** بالعلاقة التالية :

$$\mathbf{M} = \Sigma\, \mathbf{M_o} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_4 + \mathbf{M}_{C1} + \mathbf{M}_{C2}$$

حيث :

$$\mathbf{M_1} = \mathbf{r_1} \times \mathbf{F_1} = 4\mathbf{i} \times 40\mathbf{k} = -160\mathbf{j}$$
$$\mathbf{M_2} = \mathbf{r_2} \times \mathbf{F_2} = (4\mathbf{i}+3\mathbf{k}) \times 50\mathbf{j} = -150\mathbf{i} + 200\mathbf{k}$$
$$\mathbf{M_3} = \mathbf{r_3} \times \mathbf{F_3} = 3\mathbf{k} \times (-30\mathbf{i}) = -90\mathbf{j}$$
$$\mathbf{M_4} = \mathbf{r_4} \times \mathbf{F_4} = (5\mathbf{j}+3\mathbf{k}) \times (16\mathbf{i}-12\mathbf{k}) = -60\mathbf{i} + 48\mathbf{j} - 80\mathbf{k}$$
$$\mathbf{M}_{C1} = 60\mathbf{i}$$
$$\mathbf{M}_{C2} = -80\mathbf{k}$$

بالتعويض نجد :

$$\mathbf{M} = -150\mathbf{i} - 202\mathbf{j} + 40\mathbf{k} \ \text{N-m}$$

بما أن **R** و **M** لا يساويان الصفر فانه من الضروري حساب الجداء العددي لهما بنفس الطريقة التي وردت في الحل السابق .

3-4 معادلات التوازن :

إن دراسة توازن جسم صلب يخضع لتأثير مجموعة من القوى الفراغية لا تختلف عن دراسة توازن جسم صلب يخضع لتأثير مجموعة من القوى المستوية . الفرق الوحيد هو أن عدد المجاهيل وعدد المعادلات يكون اكبر عند دراسة أنظمة القوى ذات الأبعاد الثلاثة . وبما أننا نستطيع على وجه العموم تحويل أية مجموعة من القوى الفراغية إلى جملة مكافئة أبسط تتألف من قوة **R** تساوي Σ **F** ومزدوجة **M** عزمها يساوي Σ $\mathbf{M_o}$ عندئذ نحصل على معادلتي التوازن بالصيغة الهندسية التالية :

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$$
$$\Sigma \mathbf{M_o} = \mathbf{0}$$

وفي حل المسائل يمكن استخدام المعادلات الجبرية التالية :

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_y = 0$$
$$\Sigma F_z = 0 \qquad \Sigma M_z = 0$$

حيث :

ΣF_x المجموع الجبري لمساقط القوى المفروضة على محور الإحداثيات x .

ΣF_y المجموع الجبري لمساقط القوى المفروضة على محور الإحداثيات y .

ΣF_z المجموع الجبري لمساقط القوى المفروضة على محور الإحداثيات z .

ΣM_x المجموع الجبري لعزوم القوى المفروضة حول محور الإحداثيات x .

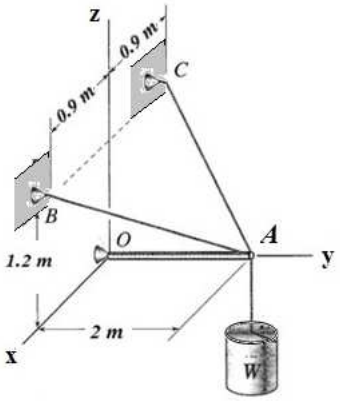
ΣM_y المجموع الجبري لعزوم القوى المفروضة حول محور الإحداثيات y .

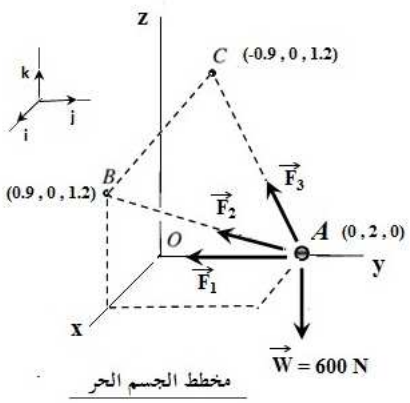
ΣM_z المجموع الجبري لعزوم القوى المفروضة حول محور الإحداثيات z .

توضح الأمثلة المحلولة التالية كيفية استخدام شروط التوازن المذكورة في حل المسائل المتعلقة بأنظمة القوى ذات الأبعاد الثلاثة والتي تشمل الجسيمات المادية والأجسام الصلبة بأشكالها المختلفة .

مثال (4– 6)

يُعلّق الحمل **W** بواسطة الذراع OA وثلاثة أسلاك كما هو مبين في الشكل . المطلوب تعيين القوى الداخلية المتولدة في الذراع المذكور والسلكين AB و AC .





الحل :

مخطط الجسم الحر : ندرس توازن نقطة التعليق A . لهذا نرسم مخطط الجسم الحر لتلك النقطة كما هو مبين في الشكل ثم نكتب الصيغ الديكارتية الشعاعية لكافة القوى المؤثرة كما يلي :

$$\mathbf{W} = -600\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F_1} = -F_1\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F_2} = F_2\left[\frac{0.9\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 1.2\,\mathbf{k}}{\sqrt{0.9^2+2^2+1.2^2}}\right] = F_2(0.36\,\mathbf{i} - 0.8\,\mathbf{j} - 0.48\,\mathbf{k})$$

$$\mathbf{F_3} = F_3\left[\frac{-0.9\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 1.2\,\mathbf{k}}{\sqrt{0.9^2+2^2+1.2^2}}\right] = F_3(-0.36\,\mathbf{i} - 0.8\,\mathbf{j} + 0.48\,\mathbf{k})$$

معادلات التوازن : إن شرط توازن نقطة التعليق A هو :

$$\Sigma\,\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3} + \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

ويمكن كتابة الشرط السابق على النحو التالي :

$$\mathbf{\Sigma F} = (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} + (\Sigma F_z)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

بالتعويض نجد :

$$(0.36F_2 - 0.36F_3)\mathbf{i} + (-F_1 - 0.8F_2 - 0.8F_3)\mathbf{j} + (0.48F_2 + 0.48F_3 - 600)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

وبناء على ذلك يمكن أن نكتب :

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 0.36F_2 - 0.36F_3 = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_1 - 0.8F_2 - 0.8F_3 = 0$$
$$\Sigma F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad 0.48F_2 + 0.48F_3 - 600 = 0$$

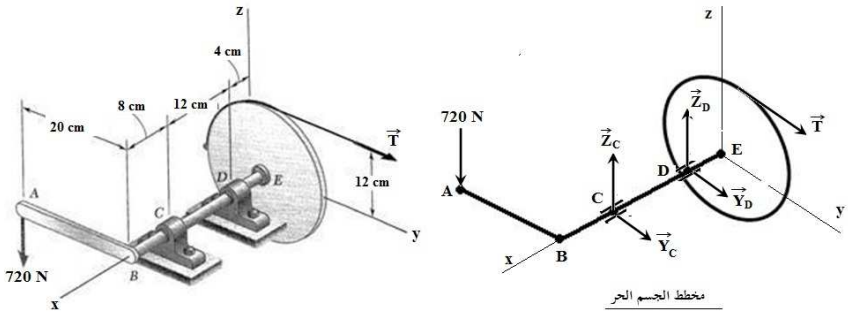
وبحل هذه المعادلات نجد :

$$F_1 = -1000 \text{ N} \;\; ; \;\; F_2 = F_3 = 625 \text{ N}$$

إشارة القوة F_1 السالبة تشير إلى أن الاتجاه الفعلي لهذه القوة هو بعكس الاتجاه المفروض في مخطط الجسم الحر.

مثال (4– 7)

يبين الشكل عمودا BE مُثبّت بنهايتيه بكرة وذراع ، ويرتكز على مسندين اسطوانيين C وD .تؤثر على الذراع AB قوة شاقولية مقدارها 720 N ، وتؤثر في الوقت ذاته في السلك الملفوف على البكرة قوة شد T . في وضع التوازن الموافق للوضع الأفقي للذراع AB احسب قوة الشد T وردي فعل المسندين C وD .



الحل :

مخطط الجسم الحر : ندرس توازن الجملة المؤلفة من العمود والبكرة والذراع وذلك باعتبارها جسما واحدا . لهذا نرسم مخطط الجسم الحر لتلك الجملة كما هو مبين في الشكل .

معادلات التوازن : إن شروط التوازن هي :

$$\mathbf{\Sigma F} = (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} + (\Sigma F_z)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{M_o} = (\Sigma M_x)\mathbf{i} + (\Sigma M_y)\mathbf{j} + (\Sigma M_z)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

وبناء على ذلك يمكن أن نكتب :

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_C + Y_D + T = 0$$
$$\Sigma F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_C + Z_D - 720 = 0$$
$$\Sigma M_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -T(12) + 720(20) = 0$$
$$\Sigma M_y = 0 \quad \Rightarrow \quad - Z_C(16) - Z_D(4) + 720(24) = 0$$
$$\Sigma M_z = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_C(16) + Y_D(4) = 0$$

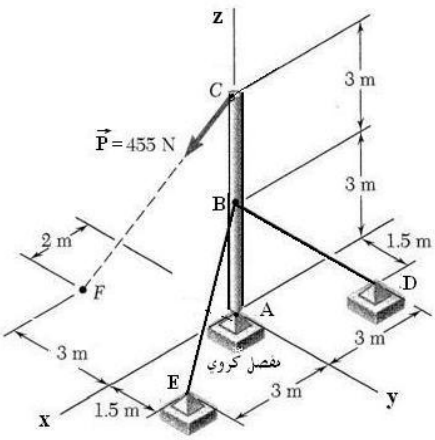
وبحل هذه المعادلات نجد :

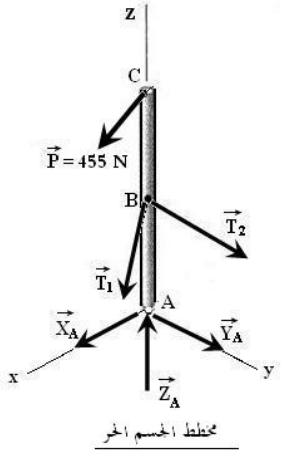
T	Y_C	Z_C	Y_D	Z_D
1200 N	400 N	1200 N	- 1600 N	- 480 N

الإشارة السالبة لكل من القوتين Y_D و Z_D تشير إلى أن الاتجاه الفعلي لهما هو بعكس الاتجاه المفروض في مخطط الجسم الحر.

مثال (4– 8)

يبين الشكل عمودا ABC يخضع لتأثير قوة خارجية مقدارها 455 N .يثبت هذا العمود في النقطة A بمفصل كروي (Ball-and-Socket) ويحافظ على توازنه بمساعدة الكبلين BD و BE . اوجد قوتي الشد المتولدتين في الكبلين ، ورد فعل المفصل الكروي A .





الحل :

مخطط الجسم الحر : ندرس توازن العمود ABC. لهذا نرسم مخطط الجسم الحر المبين في الشكل ، ثم نكتب الصيغ الديكارتية الشعاعية لكافة القوى المؤثرة كما يلي :

$$\mathbf{P} = 455\left[\frac{2\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} - 6\,\mathbf{k}}{7}\right] = 130\,\mathbf{i} - 195\,\mathbf{j} - 390\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T_1} = T_1\left[\frac{3\,\mathbf{i} + 1.5\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}}{4.5}\right] = T_1(\,0.67\,\mathbf{i} + 0.33\,\mathbf{j} - 0.67\,\mathbf{k})$$

$$\mathbf{T_2} = T_2\left[\frac{-3\,\mathbf{i} + 1.5\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}}{4.5}\right] = T_2(\,-0.67\,\mathbf{i} + 0.33\,\mathbf{j} - 0.67\,\mathbf{k})$$

$$\mathbf{R}_A = X_A\mathbf{i} + Y_A\mathbf{j} + Z_A\mathbf{k}$$

معادلات التوازن :

$$\mathbf{\Sigma\, F = P + T_1 + T_2 + R_A = 0}$$

بالتعويض نجد :

$$(130 + 0.67T_1 - 0.67T_2 + X_A)\,\mathbf{i} + (-195 + 0.33T_1 + 0.33T_2 + Y_A)\,\mathbf{j} + (-390 - 0.67T_1 - 0.67T_2 + Z_A)\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

وبناء على ذلك يمكن أن نكتب :

$$\Sigma\, F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 130 + 0.67T_1 - 0.67T_2 + X_A = 0$$
$$\Sigma\, F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -195 + 0.33T_1 + 0.33T_2 + Y_A = 0$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad -390 - 0.67T_1 - 0.67T_2 + Z_A = 0$$

$$\mathbf{\Sigma M_A = \Sigma(r \times F) = 0}$$

$$(6\mathbf{k}) \times (130\,\mathbf{i} - 195\,\mathbf{j} - 390\,\mathbf{k}) + (3\mathbf{k}) \times (0.67T_1\,\mathbf{i} + 0.33T_1\,\mathbf{j} - 0.67T_1\,\mathbf{k}) + (3\mathbf{k}) \times (-0.67T_2\,\mathbf{i} + 0.33T_2\,\mathbf{j} - 0.67T_2\,\mathbf{k}) = \mathbf{0}$$

وبناء على ذلك يمكن أن نكتب :

$$\Sigma M_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -T_1 - T_2 + 1170 = 0$$
$$\Sigma M_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -2T_1 - 2T_2 + 780 = 0$$

وبحل المعادلات نجد :

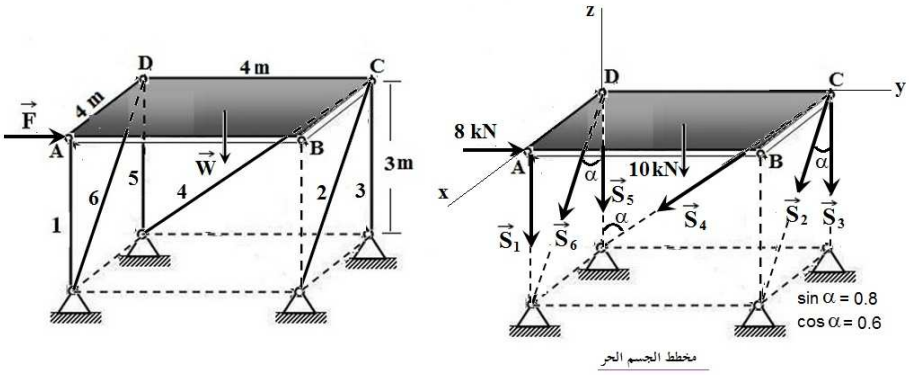
T_1	T_2	X_A	Y_A	Z_A
390 N	780 N	131 N	-191 N	1174 N

أي أن رد فعل المفصل الكروي A يتعين بالعلاقة :

$$\mathbf{R}_A = 131\mathbf{i} - 191\mathbf{j} + 1174\mathbf{k}$$

مثال (4– 9)

صفيحة ABCDمتجانسة وأفقية وزنها W=10 kN مثبتة بواسطة ستة قضبان كما هو موضح في الشكل . والمطلوب هو تعيين القوى الداخلية المتولدة في القضبان إذا علمت أن القوة الأفقية **F** تساوي 8 kN والأبعاد موضحة في الشكل .



الحل :

مخطط الجسم الحر : ندرس توازن الصفيحة ABCD لهذا نفرض أن جميع القضبان في حالة شد ثم نرسم مخطط الجسم الحر كما هو مبين في الشكل .

معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 \sin\alpha + S_6 \sin\alpha = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -S_4 \sin\alpha + 8 = 0$$
$$\Sigma F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad -S_1 - S_2 \cos\alpha - S_3 - S_4 \cos\alpha - S_5 - S_6 \cos\alpha - 10 = 0$$
$$\Sigma M_x = 0 \quad \Rightarrow \quad - S_2 \cos\alpha\,(4) - S_3\,(4) - S_4 \cos\alpha\,(4) - 10\,(2) = 0$$
$$\Sigma M_y = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1\,(4) + 10(2) = 0$$
$$\Sigma M_z = 0 \quad \Rightarrow \quad - S_2 \sin\alpha\,(4) + 8(4) = 0$$

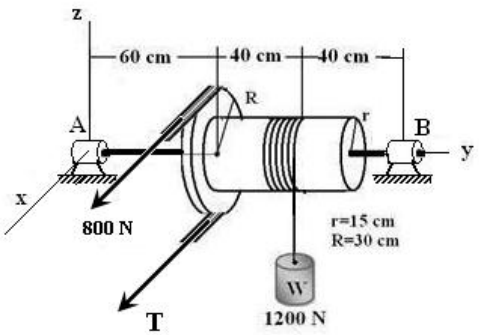
وبحل هذه المعادلات نجد :

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
- 5 kN	10 kN	-17 kN	10 kN	6 kN	-10 kN

مسائل للمراجعة
REVIEW PROBLEMS

مسألة رقم (1) :

يقوم ملفاف يرتكز على مسندين اسطوانيين برفع الحمل Wبانتظام بمساعدة سير مطاطي كما هو موضح في الشكل(1-1) . اوجد قوة الشد الأفقية T ومركبات ردي فعل المسندين A و B .

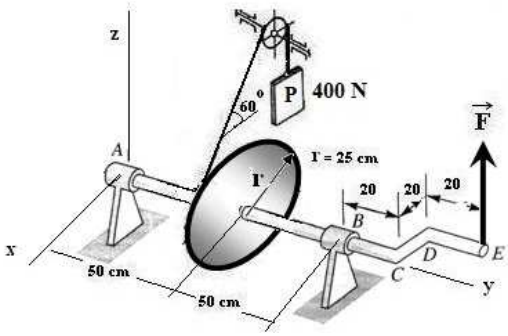


الأجوبة :

$T = 1400$ N , $X_A = -1257$ N , $Z_A = 343$ N , $X_B = -943$ N , $Z_B = 857$ N

مسألة رقم (2) :

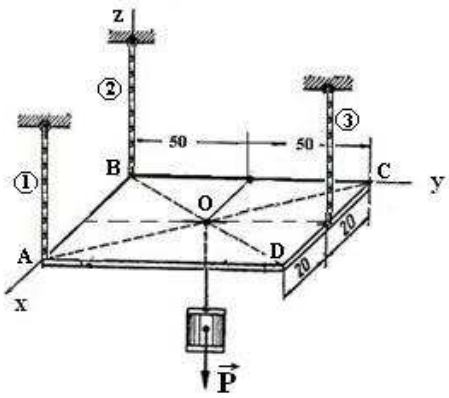
يبين الشكل المجاور عمودا مثبت عليه بكرة ملفوف عليها حبل في نهايته الحرة حمل مقداره 400 N. ويرتكز هذا العمود على مسندين اسطوانيين A وB . ارسم مخطط الجسم الحر للجملة المؤلفة من العمود والبكرة ثم اوجد في وضع التوازن المبين في الشكل القوة الشاقولية F ومركبات ردي فعل المسندين A وB.



الأجوبة :

$F = 500$ N , $X_A = X_B = 100$ N , $Z_A = -492$ N , $Z_B = -354$ N

مسألة رقم (3) :

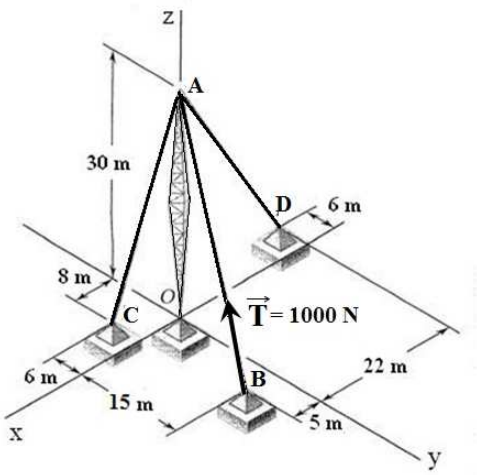


لوح مستطيل الشكل ومتجانس وزنه 200 N ، ومعلق بثلاثة حبال كما هو مبين في الشكل. علّق باللوح ثقل وزنه P=100 N . المطلوب تعيين قوى الشد في الحبال الثلاثة حيث الأبعاد موضحة في الشكل بوحدة السنتمتر.

الجواب :

$T_1 = 75$ N , $T_2 = 75$ N , $T_3 = 150$ N

مسألة رقم (4) :



يبين الشكل(1-1) برجا لنقل الطاقة الكهربائية.يثبت هذا العمود في النقطة O بمفصل كروي (Ball-and-Socket) ويحافظ على توازنه بمساعدة ثلاثة أسلاك . إذا علمت أن قوة الشد **T** في السلك AB تساوي 1000 N فان المطلوب : تحديد المركبات الديكارتية المتعامدة لقوة الشد المؤثرة في نقطة التثبيت B.

الجواب :

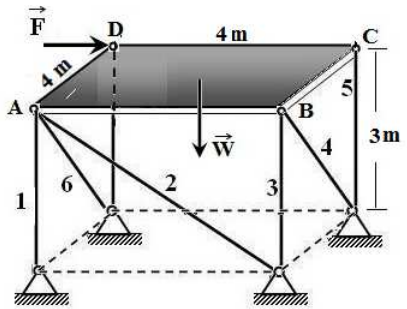
$F_X = -147$ N , $F_Y = -442$ N , $F_Z = 885$ N

مسألة رقم (5) :

صفيحة ABCDمتجانسة وأفقية وزنها W=20 kN مثبتة بواسطة ستة قضبان كما هو موضح في الشكل . والمطلوب هو تعيين القوى الداخلية المتولدة في القضبان إذا علمت أن القوة الأفقية **F** تساوي 12 kN والأبعاد موضحة في الشكل .

الجواب :

S_1= 8 kN (T) , S_2= 15 kN (C), S_3= 9 kN (C), S_4= 15 kN (T),
S_5= 10 kN (C) , S_6= 15 kN (C)

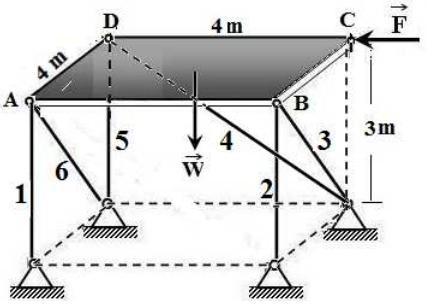


مسألة رقم (6) :

صفيحة ABCDمتجانسة وأفقية وزنها W=30 kN مثبتة بواسطة ستة قضبان كما هو موضح في الشكل . والمطلوب هو تعيين القوى الداخلية المتولدة في القضبان إذا علمت أن القوة الأفقية **F** تساوي 16 kN والأبعاد موضحة في الشكل .

الجواب :

S_1= 0 , S_2= 15 kN (C), S_3= 0 , S_4= 20 kN (T),
S_5= 27 kN (C) , S_6= 0

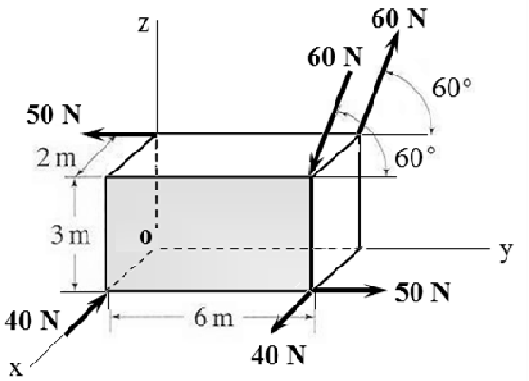


مسألة رقم (7) :

المطلوب تحويل مجموعة القوى المؤثرة في رؤوس متوازي المستطيلات المبيّن في الشكل (1-1) إلى أبسط محصلة ممكنة .

الجواب :

[**R** = **0** ; $\mathbf{M_O}$ =150**i**+103.9**j**-200**k**]

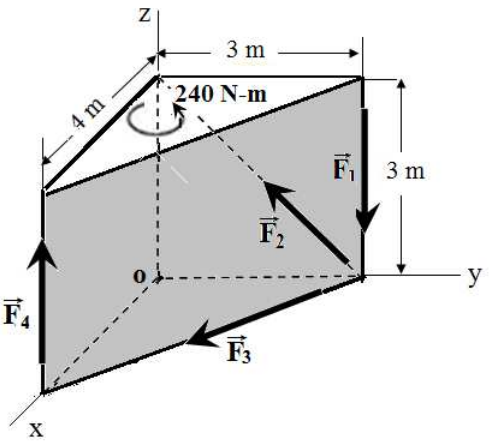


مسألة رقم (8) :

المطلوب تحويل مجموعة القوى المؤثرة في رؤوس الجسم المبيّن في الشكل (1-1) إلى أبسط محصلة ممكنة .

الجواب :

[**R** = 80**i**-80**j**+20**k** ; $\mathbf{M_O}$ = - 60**i** -160**j**]

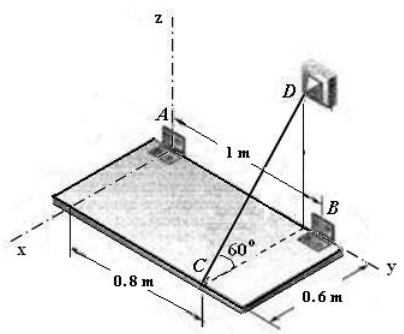


مسألة رقم (9) :

صفيحة متجانسة وزنها W=433 N ، وتحتفظ بوضع أفقي بمساعدة الكبل CD المثبت في الجدار الراسي كما هو موضح في الشكل . عيّن قوة الشد في الكبل CD ، وكذلك ردي فعل المفصلتين A وB .

الجواب :

$T = 250\ N$, $X_A = 25\ N$, $Z_A = 173.2\ N$, $X_B = 100\ N$, $Z_B = 43.3\ N$

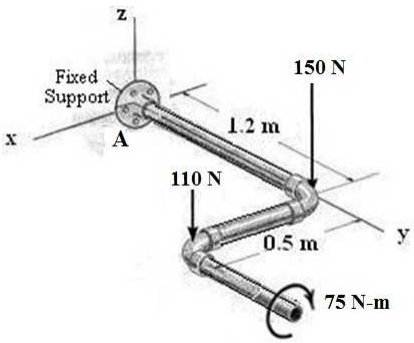


مسألة رقم (10) :

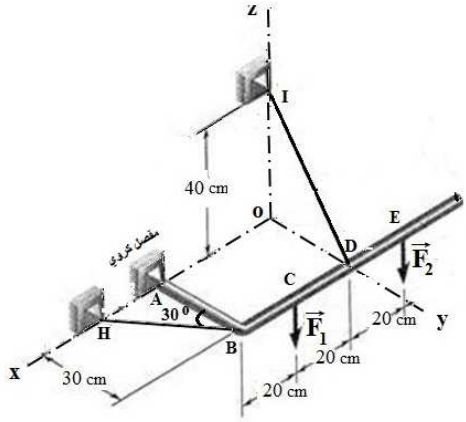
تُثبّت مجموعة الأنابيب الموضحة في الشكل(1-1) تثبتا تاما في المسند الجداري الصلب . اوجد مركبات رد فعل المسند A إذا علمت أن المجموعة تخضع لتأثير قوتين ومزدوجة عزمها يساوي 75 N-m .

الجواب :

$X_A = Y_A = 0$, $Z_A = 260\ N$,
$(M_A)_X = 312\ N\text{-}m$, $(M_A)_Y = 20\ N\text{-}m$, $(M_A)_Z = 0$.



مسألة رقم (11) :

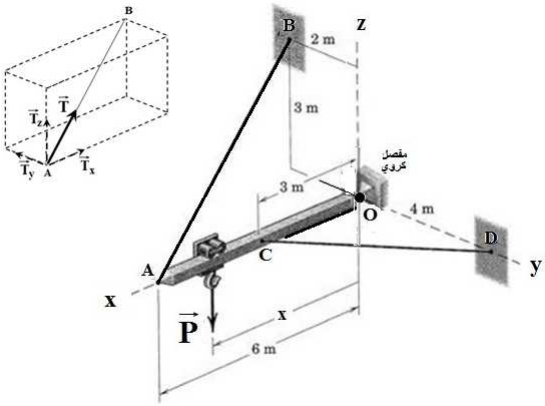


عمود معقوف موصول بمفصل كروي (Ball-and-Socket) في النقطة A ،ويحافظ على وضعه الأفقي بمساعدة السلكين DI وBH كما هو مبين في الشكل (1-1). اوجد قوتي الشد المتولدتين في السلكين DI وBH وكذلك مركبات رد فعل المسند A إذا علمت أن $F_1=F_2=100$ N .

الجواب :

$T_{BH} = 400$ N , $T_{DI} = 250$ N , $X_A = -200$ N , $Y_A = 496$ N , $Z_A = 0$

مسألة رقم (12) :



يبين الشكل (1-1)ذراعا أفقيا OA يؤثر عليه حمل رأسي **P** مقداره 4.3 kN يقع على بعد x من مبدأ الإحداثيات o . أوجد قوتي الشد المتولدتين في السلكين AB وCD وذلك في الحالتين التاليتين:

a) عندما تكون X = 3 m

b) عندما تكون X = 4.5 m

الجواب :

a) $T_{AB} = 5$ kN , $T_{CD} = 3.63$ kN

b) $T_{AB} = 7.5$ kN , $T_{CD} = 5.44$ kN

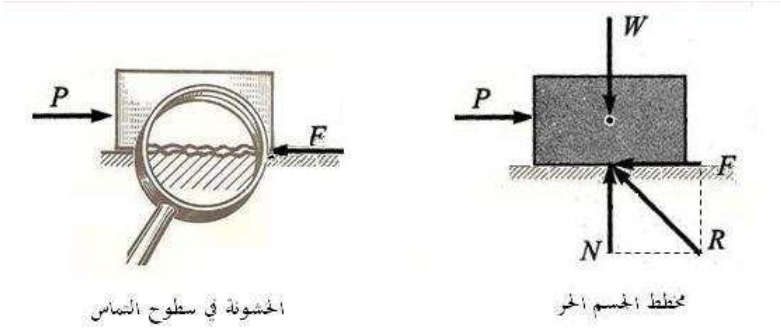
الفصل الخامس

الاحتكاك

FRICTION

5–1 الاحتكاك ألانزلاقي :

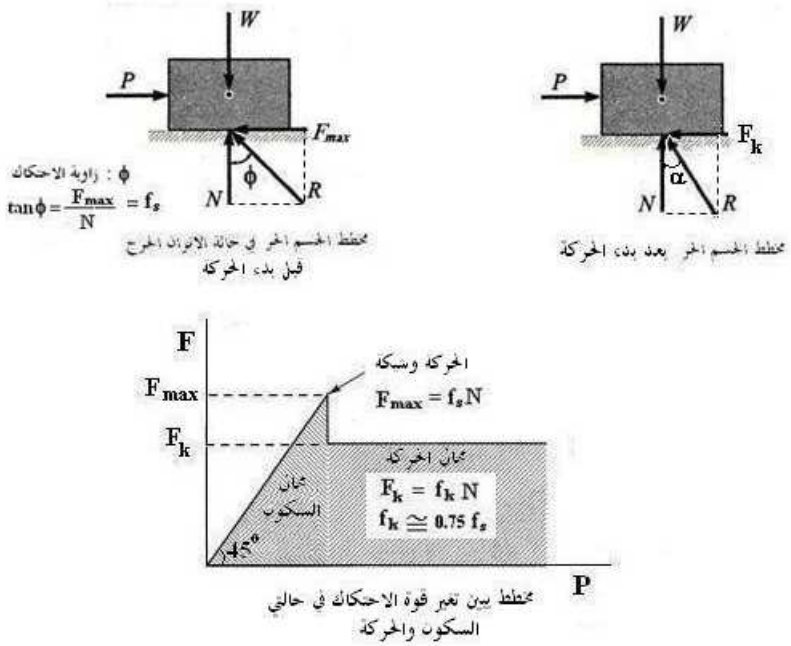
اعتمدت الدراسة السابقة على فرضية مفادها أن سطوح التماس ملساء ، وهذا يعني أنها عديمة الاحتكاك . في الواقع ، هذا الافتراض مثالي لان سطوح الأجسام مهما بلغت دقة التصنيع تكون خشنة إلى حد ما. عندما نحاول تحريك جسم ما على جسم آخر كما هو موضح في الشكل(5–1) فان قوة احتكاك تقاوم الحركة سوف تنشأ في منطقة التماس بين الجسمين ، وفي هذه الحالة سوف يخضع الجسم المفروض لتأثير ثلاث قوى وهي القوة الخارجية **P** وقوة الوزن **W** ورد فعل سطح الاستناد **R** الذي يمكن تحليله إلى مركبتين وهما رد الفعل الناظمي **N** وقوة الاحتكاك المماسية **F** المعاكسة لجهة الحركة المحتملة .



الشكل(5–1)

تبين التجارب انه إذا خضع جسم ما يرتكز على جسم آخر لقوة محركة P بحيث يمكن زيادتها تدريجيا فان العلاقة بين قوة الاحتكاك والقوة المحركة ستكون كما هو مبين في

الشكل(5-2). يتضمن المخطط مجالين : المجال الأول يمثل حالة السكون بينما يمثل المجال الثاني حالة الحركة. نلاحظ من المخطط انه في البدء كلما زادت القوة P ازدادت قوة الاحتكاك F إلى أن تصل إلى قيمتها العظمى F_{max} ، وهي اللحظة التي يصبح فيها الجسم المفروض على وشك الانزلاق وبدء الحركة. بعدها ، وحالما يبدأ الجسم بالحركة فان قوة الاحتكاك تنخفض فجأة ثم تحافظ على قيمتها ثابتة في مجال السرعات المنخفضة .



الشكل(5-2)

تسمى قوة الاحتكاك بعد بدء الحركة بقوة الاحتكاك الحركي ويرمز لها F_k .كما يوضح الشكل المذكور سابقا مخطط الجسم المفروض الحر في حالتي السكون والحركة . وتتعين قوة الاحتكاك القصوى التي تنشأ عندما تكون الحركة على وشك الحدوث بالعلاقة:

$$F_{max} = f_s N$$

حيث يمثل f_s معامل الاحتكاك السكوني ، والجدول التالي يبين القيم التقريبية لهذا المعامل لبعض المواد.

معامل الاحتكاك السكوني Static Coefficient of Friction	
فولاذ على حديد (Steel on cast iron)	0.4
نحاس على فولاذ (Copper on steel)	0.36
فولاذ على فولاذ (Steel on steel)	0.42 – 0.57

كما تتحدد قوة الاحتكاك F_k التي تنشأ في حالة الحركة بالعلاقة :

$$F_k = f_k N$$

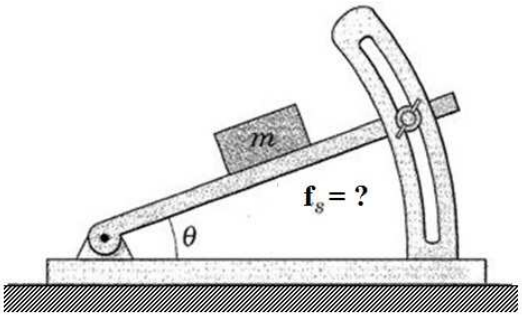
حيث يمثل f_s معامل الاحتكاك الحركي وهو أدنى بقليل من معامل الاحتكاك السكوني.
وفي الحسابات التقريبية نفرض $f_k = 0.75\ fs$.

قوانين الاحتكاك :

1. عند تحريك جسم ما على سطح جسم آخر تنشأ قوة احتكاك في مستوي التماس بينهما ، وتكون جهتها بعكس جهة الحركة المحتملة .
2. تزداد قيمة قوة الاحتكاك من الصفر إلى قيمة أعظمية F_{max} . وتصل هذه القوة إلى قيمتها الحدية العظمى عندما يوشك الجسمان أن ينزلقا غلى بعضهما، أي عندما تكون الحركة على وشك الحدوث.

3. تتناسب قوة الاحتكاك الحدية العظمى مباشرة مع رد الفعل الناظمي N الذي يؤثر به سطح على آخر. ويدعى ثابت التناسب بعامل أو معامل الاحتكاك السكوني ونرمز له f_s . أي أن: $F_{max} = f_s N$
4. إن قوة الاحتكاك تعتمد على مادة السطوح المتلامسة ودرجة خشونتها.
5. إن قوة الاحتكاك التي يمكن أن تنشأ بين جسمين لا تتعلق بأبعاد مساحة منطقة التماس.
6. إن قوة الاحتكاك التي يمكن أن تنشأ بين جسمين مستقلة عن سرعة الانزلاق وذلك في مجال السرعات المنخفضة نسبيا.
7. إن معامل الاحتكاك الحركي f_k اقل من معامل الاحتكاك السكوني f_s بنسبة مقدارها 0.25 تقريبا. ولهذا فإن قوة الاحتكاك F_k التي تتولد في أثناء حدوث الحركة تكون اصغر بقليل من قوة الاحتكاك الحدية F_{max} التي تتولد في حالة السكون. حيث تتعين قوة الاحتكاك الحركي بالعلاقة: $F_k = f_k N$.

تعيين معامل الاحتكاك تجريبيا : تعتبر طريقة المستوي المفصلي المائل القابل للتعيير من أكثر الطرق شيوعا وهي موضحة في الشكل (5-3) . حيث يُصنع سطح المستوي والجسم المنزلق من المواد المطلوب تعيين معامل الاحتكاك لها.



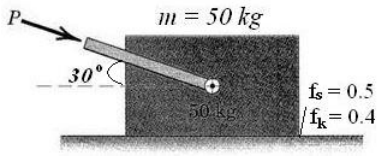
الشكل(5-3)

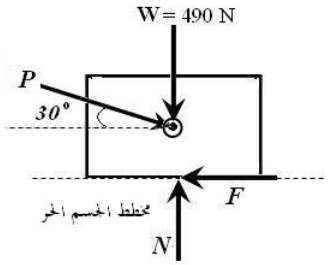
يوضع الجسم المفروض على المستوي المائل ثم نقوم برفع هذا المستوي وزيادة الزاوية θ تدريجيا. وبقياس اكبر زاوية θ_{max} يمكن أن يرفع إليها المستوي قبل أن يفقد الجسم توازنه وينزلق على المستوي نستطيع تعيين معامل الاحتكاك f_s وفق العلاقة التالية :

$$f_s = \tan\theta_{max}$$

مثال (5–1)

يبين الشكل صندوقا كتلته 50 kg . يرتكز على سطح أفقي خشن ويخضع لتأثير القوة **P** .عيّن قوة الاحتكاك المماسية **F** بالإضافة إلى حالة الصندوق (سكون أم حركة) في الحالتين التاليتين: a) P = 200 N b) P = 410 N





الحل :

يبين الشكل مخطط الجسم الحر للصندوق المفروض والذي يقع تحت تأثير القوى التالية: الوزن W ورد الفعل الناظمي N والقوة الخارجية P وقوة الاحتكاك F .

الحالة الأولى : P = 200 N

معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 200\cos 30° - F = 0 \Rightarrow F = 173\ N$$
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - 490 - 200\sin 30° = 0 \Rightarrow N = 590\ N$$

وتكون قوة الاحتكاك القصوى التي يمكن أن تنشأ بين سطحي التماس :

$$F_{max} = f_s N = 0.5(590) = 295\ N$$

نلاحظ أن : $F < F_{max}$ وهذا يشير إلى أن الصندوق في حالة سكون.

الحالة الثانية : P = 410 N

معادلات التوازن :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 410\cos 30° - F = 0 \Rightarrow F = 355\ N$$
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - 490 - 410\sin 30° = 0 \Rightarrow N = 695\ N$$

وتكون قوة الاحتكاك القصوى التي يمكن أن تنشأ بين سطحي التماس :

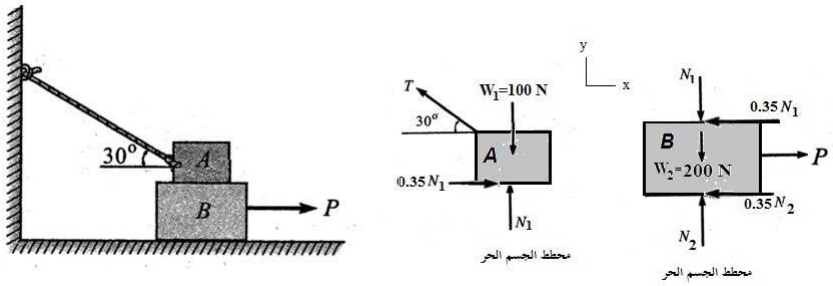
$$F_{max} = f_s N = 0.5(695) = 348\ N$$

نلاحظ أن : $F > F_{max}$ وهذا يشير إلى أن الصندوق في حالة حركة وتتحدد عندئذ قوة الاحتكاك الفعلية بالعلاقة:

$$F_k = f_k N = 0.4(695) = 278\ N$$

مثال (2–5)

يرتكز الجسم A ذو الوزن 100 N على الجسم B ذي الوزن 200 N . كما يُربط الجسم A بجدار شاقولي بواسطة حبل يميل بزاوية مقدارها 30° كما هو موضح في الشكل المرافق. اوجد القوة الأفقية **P** المطبقة على الجسم السفلي لجعله على وشك الانزلاق إلى اليمين. علما أن معامل الاحتكاك الساكن لجميع السطوح المتلامسة هو fs=0.35 .



الحل :

يبين الشكل مخطط الجسم الحر لكل من الجسمين **A** و **B**.

معادلتا التوازن للجسم الأول A :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 0.35N_1 - T\cos 30° = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 - 100 + T\sin 30° = 0$$

معادلتا التوازن للجسم الثاني B :

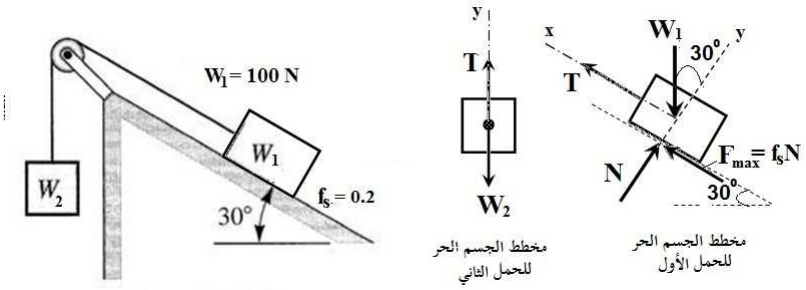
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P - 0.35N_1 - 0.35N_2 = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 - 200 - N_1 = 0$$

من المعادلات السابقة ينتج أن :

$$P = 128 \text{ N}$$

مثال (5–3)

يستند حمل وزنه W_1=100 N إلى مستو مائل وقد ربط به حبل يمر على بكرة ويحمل في نهايته الطليقة حملا آخر وزنه W_2 . اوجد في وضع التوازن قيمة W_2 الضرورية لمنع الحمل الأول من الهبوط على المستوي المائل ، إذا كان معامل الاحتكاك بين الحمل الأول والمستوي المائل يساوي 0.2.



الحل :

يبين الشكل مخطط الجسم الحر لكل من الحملين $\mathbf{W}_1$ و $\mathbf{W}_2$.

معادلتا التوازن للحمل الأول :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - 100\cos 30° = 0 \Rightarrow N = 86.6\ N$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T + f_S N - 100 \sin 30° = 0 \Rightarrow T = 32.68\ N$$

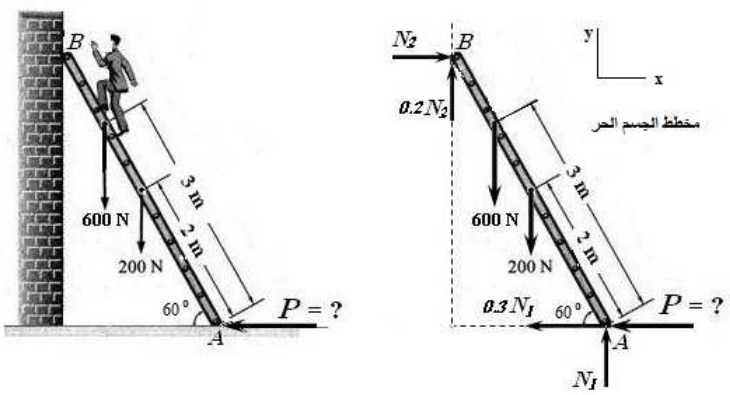
معادلة التوازن للحمل الثاني :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T - W_2 = 0$$
$$W_2 = 32.68\ N$$

مثال (4–5)

سلّم Ladder طوله 4 m ووزنه 200 N . يستند إلى حائط شاقولي ، ويرتكز بطرفه الآخر على أرض أفقية خشنة كما هو واضح في الشكل. معامل احتكاك السلم بالحائط يساوي 0.2 ، وبسطح الأرض يساوي 0.3 . ويبلغ وزن الشخص الذي يقف على السلّم 600 N. في الوضع المبين للسلّم والموافق لزاوية الميل 60° عيّن القوة **P** الضرورية لمنع السلم من الانزلاق .

الجواب : P = 62 N



الحل :

يبين الشكل مخطط الجسم الحر للسلم في وضع التوازن . معادلات التوازن هي :

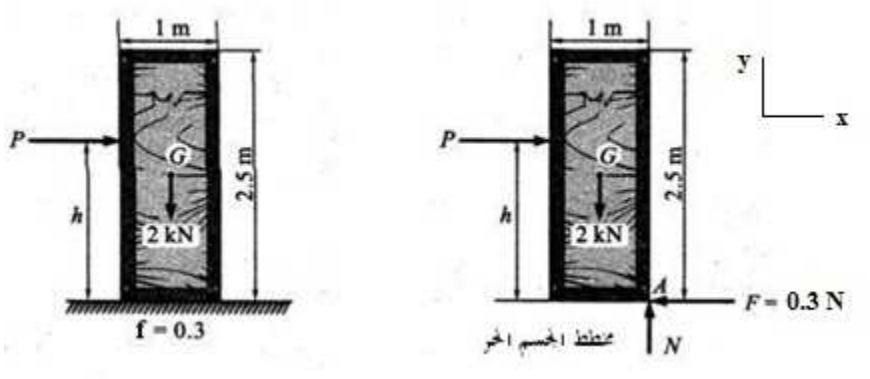
$$\Sigma F_x = 0$$
$$-P - 0.3\ N_1 + N_2 = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$N_1 + 0.2\ N_2 - 600 - 200 = 0$$

$$\Sigma M_A = 0$$
$$-N_2(4\sin 60°) - 0.2N_2(4\cos 60°) + 200(2\cos 60°) + 600(3\cos 60°) = 0$$

من المعادلات الثلاث السابقة نجد أن : P = 62 N .

مثال (5–5)

يستند جسم عرضه 1m وارتفاعه 2.5 m إلى سطح أفقي مستو كما هو مبين في الشكل. عيّن مقدار القوة الأفقية **P** التي تستطيع تحريك الجسم وكذلك ارتفاع حاملها h عن سطح الاستناد بحيث لا ينقلب الجسم.



الحل :

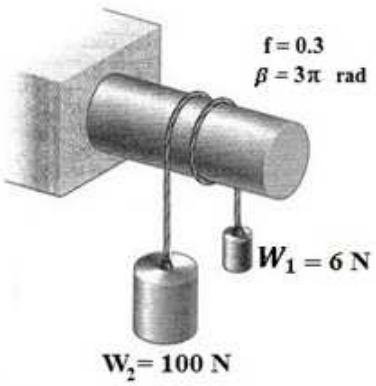
يبين الشكل مخطط الجسم الحر للجسم المفروض . نلاحظ في هذه الحالة الخاصة أن رد الفعل الناظمي **N** قد تحرك نحو الحافة الأمامية A وذلك لمنع الجسم من الانقلاب .

معادلات التوازن هي :

$$\Sigma F_x = 0$$
$$N - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad N = 2\ kN$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$P - 0.3\ N = 0 \quad \Rightarrow \quad P = 0.6\ kN$$
$$\Sigma M_A = 0$$
$$2 \times 0.5 - P \times h = 0 \quad \Rightarrow \quad h = 1.67\ m$$

5–2 احتكاك الحبال والسيور :

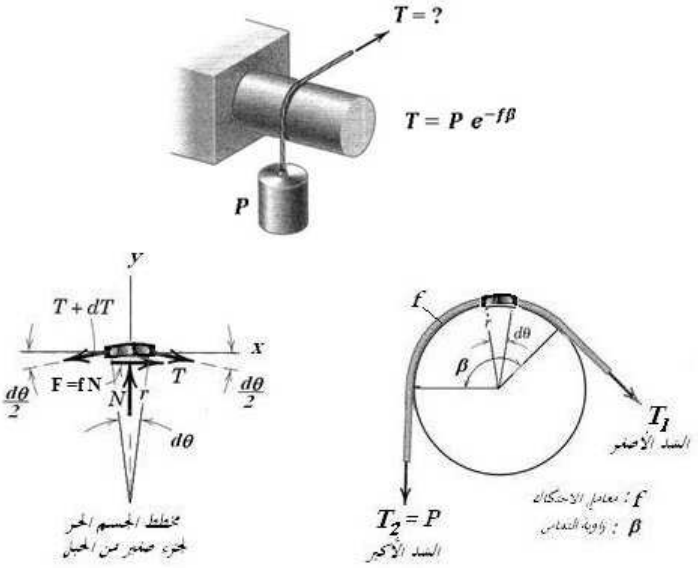
في الواقع العملي ، يمكن لحمل صغير وزنه W_1 أن يوازن حملا كبيرا وزنه W_2 وذلك بلف الحبل عدة مرات حول عمود ثابت مثلا كما هو مبين في الشكل(5–4). لدراسة هذه المسألة واستنتاج العلاقة الرياضية التي تربط بين القوتين W_1 و W_2 نبسّط الموضوع بحيث نتصور حبلا يلتف حول محيط اسطوانة خشنة ثابتة، ويؤثر في نهايته اليسرى حمل وزنه P وسوف نبحث عن اقل قوة شد T يجب أن تؤثر في نهاية الحبل الأخرى كي لا يسقط ، علما بان زاوية التماس β بين الحبل والاسطوانة معلومة وان معامل الاحتكاك f بين الحبل والاسطوانة معلوم أيضا .



الشكل(5–4)

لاستنتاج العلاقة التي تربط بين القوتين T و P ندرس اتزان جزء صغير جدا (تفاضلي) من الحبل (انظر الشكل 5–5) في اللحظة التي يكون فيها الحبل على وشك الانزلاق على سطح الاسطوانة في اتجاه الحمل P . في هذه الحالة تؤثر في الجزء المدروس كما هو واضح من مخطط الجسم الحر أربع قوى وهي : رد الفعل الناظمي N ،وقوة الاحتكاك F التي تعاكس جهة انزلاق السير والتي تؤدي إلى زيادة قوة الشد المؤثرة في الجانب الأيسر

بمقدار dT ، وقوة الشد T التي تؤثر في الجانب الأيمن ، وأخيرا قوة الشد (T+ dT) التي تؤثر في الجانب الأيسر.



الشكل(5–5)

نكتب معادلات التوازن بالنسبة لجملة المحاور المبينة في الشكل:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F + T\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - (T + dT)\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - T\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - (T + dT)\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

وبما أن الزاوية dθ صغيرة جدا لذا يمكن أن نكتب :

$$\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 1 \quad ; \quad \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = \frac{d\theta}{2} \quad ; \quad dT\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

وبالتعويض نجد :

$$fN = dT \quad ; \quad N = Td\theta$$

ومنه ينتج :

$$dT = fTd\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{T} = fd\theta$$

وبإجراء التكامل مع مراعاة أن القوة T_1 تمثل الشد الأصغر وهي تؤثر بعكس جهة الانزلاق الوشيك للحبل بينما القوة T_2 تمثل الشد الأكبر وهي تؤثر بنفس جهة الانزلاق:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^{\beta} fd\theta$$

ومنه نجد :

$$\ln\frac{T_2}{T_1} = f\beta$$

ومن هذا ينتج أن :

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{f\beta} \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1\, e^{f\beta}$$

وبناء على ذلك تتعين قوة الشد المطلوبة بالعلاقة :

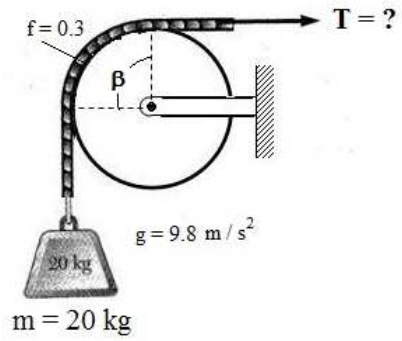
$$T = P\, e^{-f\beta}$$

حيث $e = 2.718$ وهو يمثل أساس اللوغاريتم الطبيعي . وتقدر زاوية التماس β بوحدة الراديان. وكما نرى من العلاقة الأخيرة أن مقدار القوة المطلوبة يتعلق بمعامل الاحتكاك وزاوية التماس فقط ولا علاقة لها بنصف قطر الاسطوانة. وعند انعدام الاحتكاك نحصل كما هو متوقع على المساواة $T=P$. ويمكن بزيادة زاوية التماس أن نقلل مقدار T اللازم لتوازن الحمل P . ولهذه الحقيقة أهمية كبيرة في الحياة العملية.

مثال (5–6)

يُربط حمل كتلته $m = 20\ kg$ بكبل ملفوف ربع لفة حول بكرة ثابتة ، ويُحافظ على توازنه بتطبيق القوة **T** في النهاية الحرة لهذا الكبل كما هو موضح في الشكل . بفرض أن معامل الاحتكاك يساوي 0.3 . اوجد ما يلي :

1. قيمة القوة **T** الضرورية لمنع الحمل من السقوط.
2. قيمة القوة **T** اللازمة للبدء برفع الحمل .



الحل :

القوة الضرورية لمنع الحمل من السقوط : تتعين هذه القوة عندما يكون الحبل على وشك الانزلاق باتجاه الحمل . وبالعودة إلى العلاقة التالية :

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{f\beta}$$

نلاحظ أن :

$$T_1 = T \ , \ T_2 = mg = 20\times9.8=196 \text{ N}$$

وبالتعويض نجد أن :

$$T = 196\, e^{-0.3(0.5\pi)} = 122\ N$$

القوة اللازمة للبدء برفع الحمل: تتعين هذه القوة عندما يكون الحبل على وشك الانزلاق باتجاه الأعلى . وبالعودة إلى نفس العلاقة السابقة مع مراعاة الآتي :

$$T_1 = 196 \text{ N} \ , \ T_2 = T$$

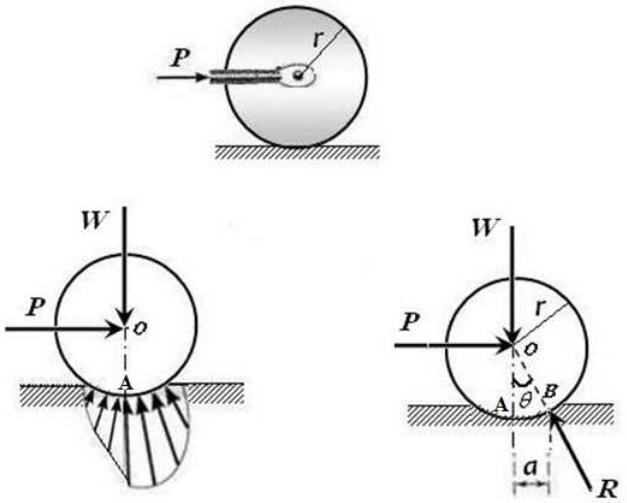
وبالتعويض ينتج :

$$T = 196\, e^{0.3(0.5\pi)} = 314\ N$$

3-5 الاحتكاك التدحرجي :

تعدّ العجلة من الاكتشافات الهامة في حياة البشر ، إذ أنها تساعد في نقل الحمولات الكبيرة بأقل جهد ممكن. وتدعى المقاومة التي تنشأ نتيجة لتدحرج جسم ما على سطح جسم آخر باحتكاك التدحرج.

نفرض أن عجلة جسمها صلب ونصف قطرها r ووزنها W ، موضوعة على سطح أفقي غير قاس كما هو مبين في الشكل(5–6). إن تلامس العجلة مع سطح الاستناد يحدث في واقع الأمر على امتداد منخفض صغير نتيجة لتشوه سطح الاستناد ، وهذا ما أكدته التجارب .



الشكل(5–6)

إذا أثرنا الآن في مركز العجلة بقوة أفقية **P** من اجل جر العجلة خارج المنخفض فان شدة قوى الضغط الذي تتعرض له العجلة في منطقة التماس تكون اكبر في المقدمة مقارنة بالضغط في الجزء الخلفي من المنخفض. ونتيجة لذلك يؤثر رد الفعل **R** (محصلة قوى الضغط) في النقطة B التي تبعد مسافة مقدارها a عن نقطة التماس A . وبما أن خطوط تأثير القوى الثلاث **(P,W,R)** التي تخضع لها العجلة عندما تتدحرج بانتظام يجب أن تتقاطع في نقطة واحدة وهي مركز العجلة فان ذلك يستدعي أن تميل القوة R بزاوية مقدارها θ بالنسبة للشاقول المار من مركز العجلة. ولتعيين القوة P اللازمة لتدحرج العجلة نكتب معادلة العزوم بالنسبة للنقطة B :

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow \quad P\,(r\,cos\theta) - W\,a = 0$$

$$P = \frac{a}{r\,cos\theta} W$$

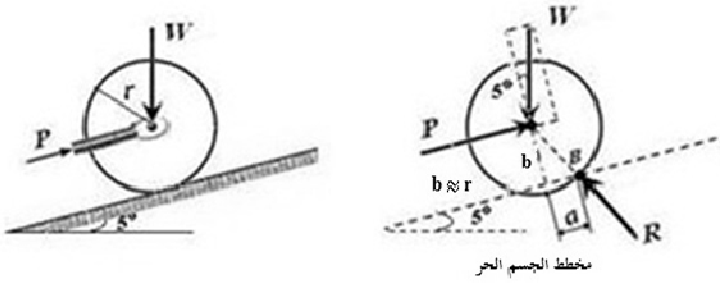
ونظرا لأن θ صغيرة فان cos θ = 1 ويكون :

$$P \approx \frac{a}{r} W$$

المسافة a تسمى بمعامل مقاومة التدحرج وهو يقدر بالمليمترات ، ويعتمد مقداره على مادة الجسم كما انه يتحدد تجريبيا. على سبيل المثال ، يبلغ معامل مقاومة التدحرج لعجلة مطاطية مملوءة بالهواء المضغوط تتدحرج على طريق عام 0.75 mm - 0.50.

مثال (5–7)

عجلة فولاذية نصف قطرها r =100 mm ووزنها W =100 N وضعت على سطح خشبي خشن يميل بزاوية مقدارها 5° كما هو موضح في الشكل . احسب القوة **P** اللازمة لتدحرج العجلة بحركة منتظمة باتجاه الأعلى . علما بأن معامل احتكاك التدحرج يساوي 8.75mm .



الحل :

نرسم مخطط الجسم الحر كما هو مبين في الشكل ثم نكتب معادلة العزوم التالية:

$$\Sigma M_B = 0$$

$$-P\,(r) + W\cos 5°\,(a) + W\sin 5°\,(r) = 0$$

$$P = W\left[\cos 5°\left(\frac{a}{r}\right) + \sin 5°\right]$$

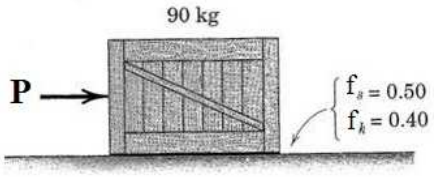
$$P = 100\left[\cos 5°\left(\frac{8.75}{100}\right) + \sin 5°\right]$$

$$P = 17.4\ N$$

مسائل للمراجعة
REVIEW PROBLEMS

مسألة رقم (1) :

صندوق كتلته 90 kg ،ويرتكز على سطح أفقي خشن ، ومعاملا احتكاكهما السكوني والحركي يساويان $f_k=0.4$, $f_s=0.5$



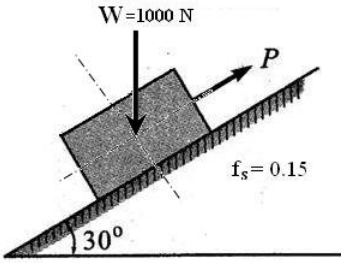
وتؤثر على الصندوق القوة الأفقية P.

اوجد قوة الاحتكاك المماسية **F** التي تنشأ بين سطحي التماس ، مبينا هل سيحافظ الصندوق على توازنه وذلك في الحالتين التاليتين:

a) P = 400 N b) P = 500 N

الجواب : a) F = 400 N ; b) F = 353 N

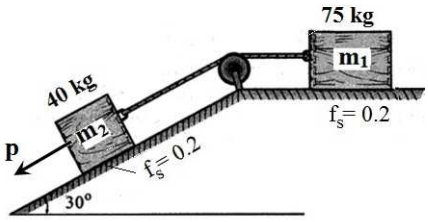
مسألة رقم (2) :



اوجد القيمتين الدنيا والقصوى للقوة **P** التي تجعل الثقل المبين في الشكل المجاور يحافظ على توازنه. بفرض أن معامل الاحتكاك يساوي0.15 .

الجواب : $P_{min} = 370$ N , $P_{max} = 630$ N

مسألة رقم (3) :

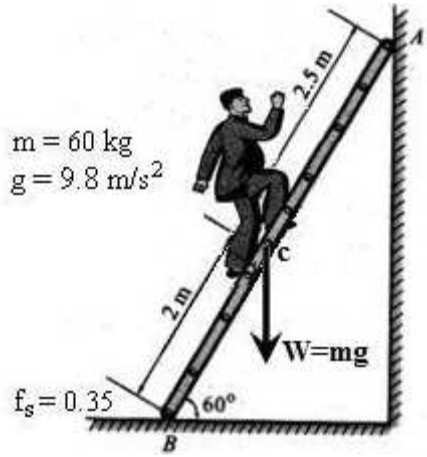


اوجد القوة P المبينة في الشكل المجاور والموازية للمستوي والضرورية لجعل الكتلتين m_1 وm_2 على وشك الانزلاق . معامل الاحتكاك لجميع السطوح المتلامسة $f_s=0.2$.

الجواب : P = 117 N

مسألة رقم (4) :

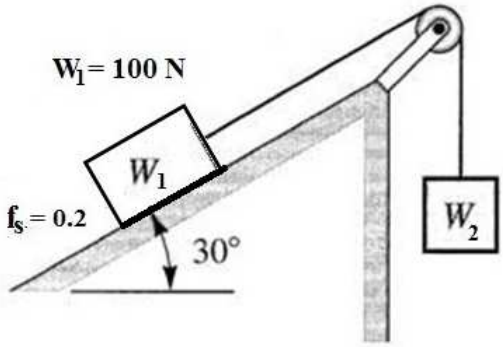
سلّم Ladder يستند إلى حائط شاقولي أملس(f_s=0) ، ويرتكز بطرفه الآخر على أرض أفقية خشنة (f_s=0.35). ويؤثر وزن الشخص **W** الذي يقف على السلّم في النقطة C كما هو واضح في الشكل المجاور. في الوضع المبين للسلّم والموافق لزاوية الميل 60° عيّن قوة الاحتكاك التي تنشأ بين السلم وسطح الأرض، وهل سينزلق السلم أم سيبقى في حالة سكون .



الجواب : F = 151 N ، السلّم في حالة سكون .

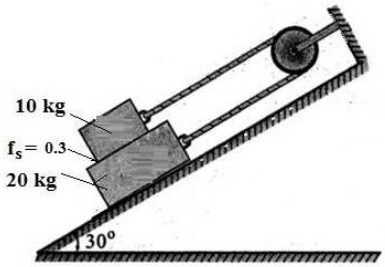
مسألة رقم (5) :

يستند حمل وزنه W_1=100 N إلى مستو مائل وقد ربط به حبل يمر على بكرة ويحمل في نهايته الطليقة حملا آخر وزنه W_2 وذلك كما مبين في الشكل المجاور . اوجد في وضع التوازن قيمة W_2 اللازمة للبدء برفع الحمل W_1على المستوي المائل ، إذا كان معامل الاحتكاك بين الحمل والمستوي المائل يساوي 0.2.



الجواب : W_2 = 67.32 N

مسألة رقم (6) :

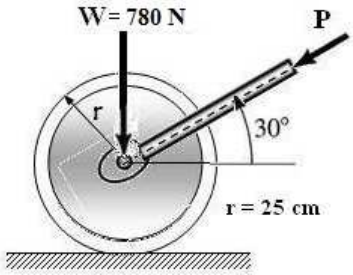


يستند ثقل كتلته m_1=20 kg إلى سطح مائل أملس ويحمل فوقه ثقل آخر كتلته m_2=10 kg ويُربط الجسمان ببعضهما بمساعدة حبل ملفوف على بكرة ثابتة كما هو مبين في الشكل المجاور.

احسب قوة شد الحبل **T** وكذلك قوة الاحتكاك **F** التي تتولد بين الجسمين بفرض أن معامل احتكاكهما f_s=0.3 وان الاحتكاك مع سطح الاستناد مهمل.

الجواب : F = 24.5 N , T = 73.5 N

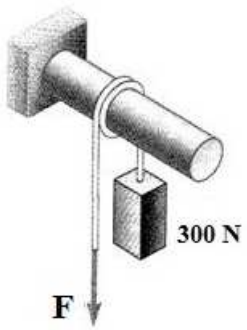
مسألة رقم (7) :



ما هي القوة P التي تطبق على امتداد الذراع الموصول بمركز العجلة بما يؤدي إلى تدحرج العجلة بحركة منتظمة كما هو موضح في الشكل المجاور . علما بان وزن العجلة يساوي 780N ، وان نصف قطرها r =25cm ، وان معامل احتكاك التدحرج a =2.5cm .

الجواب : P = 95.6 N

مسألة رقم (8) :



يبين الشكل المجاور حملا وزنه W =300 N مربوط بحبل ملفوف بمقدار لفة ونصف (β=3π) حول عمود ثابت، ويُحافظ على توازنه بمساعدة القوة **F** . بفرض أن معامل الاحتكاك يساوي 0.15 . اوجد قيمة القوة **F** الضرورية لمنع الحمل من السقوط.

الجواب : F = 73 N

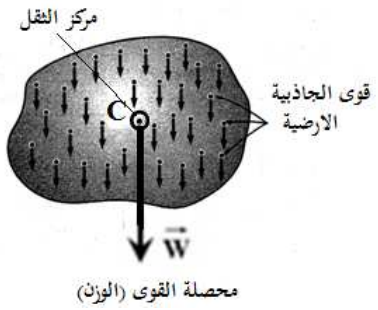
الفصل السادس

مراكز الثقل

CENTERS OF GRAVITY

6–1 تمهيد :

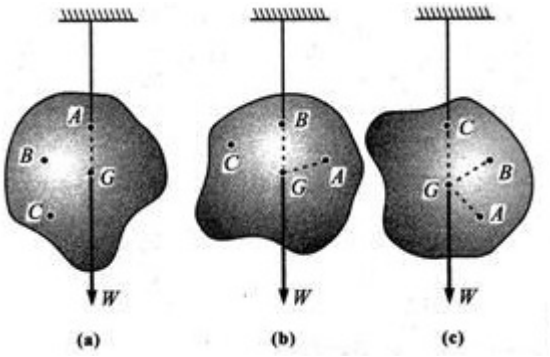
تؤثر في الجزيئات المختلفة التي يتكون منها جسم صلب ما يقع قرب سطح الأرض قوى متجهة راسيا نحو الأسفل باتجاه مركز الأرض تسمى قوى الجاذبية الأرضية وذلك كما هو مبين في الشكل(6–1). ويمكن اعتبار قوى الجاذبية الأرضية قوى متوازية ، كما نرمز لمحصلتها بالرمز**W** ويسمى مقدار هذه المحصلة وزن الجسم (Weight of the Body) كما تدعى النقطة التي تمر منها محصلة قوى الجاذبية بمركز ثقل الجسم ، ويرمز له بالحرف **C** او بالحرف **G** .



الشكل (6–1)

المثال التالي يوضح مفهوم مركز الثقل وكيفية تعيينه تجريبيا : نأخذ جسما ما ونثبت على سطحه ثلاثة مسامير في النقاط A وB وC كما هو موضح في الشكل(6–2) ثم ننفذ الخطوات الثلاث التالية : في الخطوة الأولى نعلق الجسم في النقطة A ثم نرسم خطا متقطعا (مثلا) شاقوليا يمثل حامل قوة الوزن ، وفي الخطوة الثانية نعلق الجسم في النقطة B ثم نرسم خطا شاقوليا يمثل حامل قوة الوزن ، وفي الخطوة الثالثة نعلق الجسم في النقطة

C ثم نرسم خطا شاقوليا يمثل حامل قوة وزن الجسم . نلاحظ أن الخطوط المرسومة تلتقي في نقطة واحدة تمثل في واقع الأمر مركز ثقل الجسم.



الشكل (6–2)

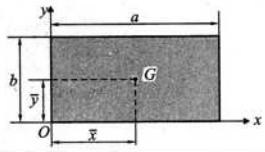
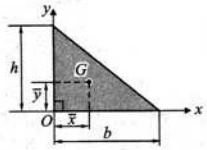
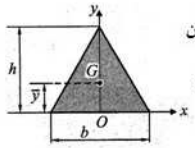
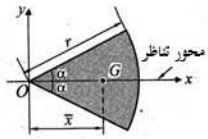
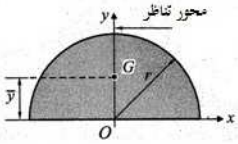
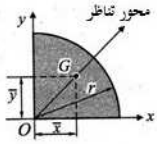
خلاصة القول، إن مركز ثقل جسم ما هو النقطة التي تمر منها محصلة قوى الوزن الموزعة والمؤثرة في جزيئات هذا الجسم. ومن المعروف أن الأجسام في الطبيعة كلها ذات ثلاثة أبعاد ، ولذا فان قوى الوزن المؤثرة في الجزيئات المختلفة للجسم تمثل جملة من القوى المتوازية الفراغية. إلا أن هنالك بعض الحالات التي تبرر إهمال بعد أو بعدين لجسم ما وافتراض الجزيئات التي يتركب منها محدودة بمستو واحد أو بخط فقط. يقتصر هذا الفصل على هذه الحالات الخاصة والتي تشمل مساحات السطوح المستوية والخطوط .حيث يدخل في عداد الخطوط الأسلاك والقضبان والأطر(Frames) بأشكالها الهندسية المختلفة .

6–2 مراكز ثقل الأشكال الهندسية البسيطة :

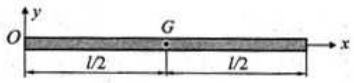
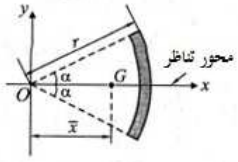
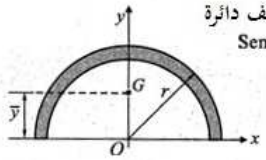
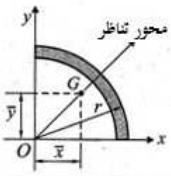
يوضح كل من الشكلين (6–3)و(6–4) مراكز ثقل الأشكال الهندسية البسيطة الآتية والتي تشمل بصورة أساسية المستطيل والمثلث والقطاع الدائري :

- المستطيل : إن مركز ثقل المستطيل يقع في نقطة تلاقي قطريه.

- المثلث : إن مركز ثقل المثلث يقع في نقطة مستقيماته المتوسطة.
- القطاع الدائري : إن مركز ثقل القطاع الدائري يقع على محور تناظره ويبعد عن مركز دائرته بالمقدار المبين في الشكل. حيث تمثل α نصف الزاوية المركزية للقطاع .

احداثيات مركز الثقل		المساحة Area	الشكل الهندسي للسطح Geometrical Shapes
Y_i	X_i		
$\frac{b}{2}$	$\frac{a}{2}$	ab	 1 - مستطيل Rectangle
$\frac{h}{3}$	$\frac{b}{3}$	$\frac{bh}{2}$	 2 - مثلث قائم الزاوية Right Angled Triangle
$\frac{h}{3}$	0	$\frac{bh}{2}$	 3 - مثلث متساوي الساقين أو الأضلاع Isosceles/Equillateral Triangle
0	$\frac{2}{3}\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$ حيث : α بوحدة الراديان	αr^2 حيث : α بوحدة الراديان	 4 - قطاع دائري Circular Sector
$\frac{4r}{3\pi}$	0	$\frac{\pi r^2}{2}$	 5 - نصف دائرة Semicircle
$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$	 6 - ربع دائرة Quarter Circle

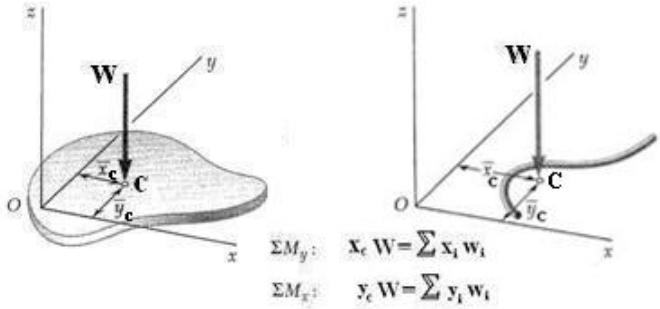
الشكل (3–6)

احداثيات مركز الثقل		الطول Length	الشكل الهندسي للاطار Geometrical Shapes
Y_i	X_i		
0	$\frac{l}{2}$	l	1 - مستقيم Straight Line 
0	$\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ حيث : α بوحدة الراديان	$2\alpha r$ حيث : α بوحدة الراديان	2 - قوس دائري Arc of Circle 
$\frac{2r}{\pi}$	0	πr	3 - قوس شكله نصف دائرة Semicircular Arc 
$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$	4 - قوس شكله ربع دائرة Quarter Circular Arc 

الشكل (6–4)

6–3 مراكز ثقل السطوح والأطر المستوية :

تتناول هذه الفقرة كيفية تعيين موضع مركز الثقل للمساحات (Areas) والخطوط (Lines) كما هو مبين في الشكل(6–5) . على وجه العموم ، يحتاج البحث عن إحداثيات مركز الثقل C(x , y) لسطح أو إطار ما إلى إجراء عملية تقسيم للسطح أو الإطار إلى عدة أشكال هندسية بسيطة بحيث تكون مراكز ثقلها معلومة.



الشكل (6–5)

ففي حالة السطوح المتجانسة ، يُقسّم السطح المفروض إلى عدة سطوح بسيطة الشكل ويُرمز لمساحاتها A_i وإحداثيات مركز ثقلها x_i و y_i.عندئذ يمكن تعيين إحداثيات مركز الثقل العام $C(x_c , y_c)$ للسطح المفروض بواسطة العلاقتين التاليتين :

$$x_c W = \sum x_i w_i \qquad y_c W = \sum y_i w_i$$

وبما أن مقدار قوة الوزن w_i لأي عنصر من العناصر التي قسمت إليها مساحة السطح المتجانس متناسبة مع مساحة هذا العنصر(Ai) . عندئذ يتعين موضع مركز الثقل استنادا إلى المعادلتين السابقتين كما يلي:

$$x_c = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n}{A_1 + A_1 + \cdots + A_n}$$

$$y_c = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots + A_n y_n}{A_1 + A_1 + \cdots + A_n}$$

أما في حالة الخطوط كالأطر (Frames) مثلا ، يُقسّم الإطار المفروض إلى عدة عناصر بسيطة الشكل ويُرمز لأطوالها L_i وإحداثيات مركز ثقلها x_i و y_i. وبما أن مقدار قوة الوزن w_i لأي عنصر من العناصر متناسب مع طول هذا العنصر(Li) لذا يمكن تعيين موضع مركز الثقل العام $C(x , y)$ للإطار كما يلي:

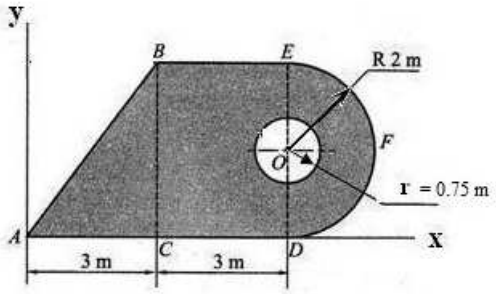
$$x_c = \frac{\sum L_i x_i}{\sum L_i} = \frac{L_1 x_1 + L_2 x_2 + \cdots + L_n x_n}{L_1 + L_1 + \cdots + L_n}$$

$$y_c = \frac{\sum L_i y_i}{\sum L_i} = \frac{L_1 y_1 + L_2 y_2 + \cdots + L_n y_n}{L_1 + L_1 + \cdots + L_n}$$

يوضح المثالين التاليين كيفية استخدام المعادلات الرياضية السابقة من اجل تحديد إحداثيات موضع مركز الثقل وذلك في حالتي السطوح والأطر المستوية ذات الأشكال الهندسية المختلفة.

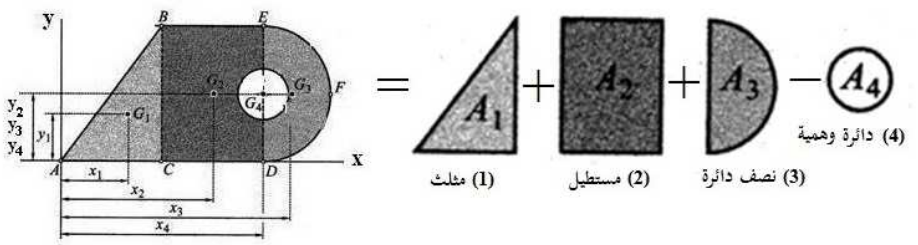
مثال (6–1)

احسب إحداثيات مركز الثقل العام G(x , y) للصفيحة المتجانسة الموضحة في الشكل وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة .



الحل :

تُقسّم السطح المعطى إلى أربعة أجزاء ثم نحسب مساحة كل جزء وإحداثيات مركز ثقله بمساعدة الشكل التالي :



$$A_1 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6\ m^2$$
$$A_2 = 3 \times 4 = 12\ m^2$$
$$A_3 = \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = 6.28\ m^2$$
$$A_4 = -\pi \times 0.75^2 = -1.77\ m^2$$

ثم نحدد إحداثيات مراكز الثقل لجميع الأجزاء المكونة للصفيحة المستوية كما هو مبين في الشكل السابق ونضعها في جدول كالتالي :

y_i (m)	x_i (m)	المساحة A_i (m^2)	الأجزاء
1.33	2	6	المثلث ABC
2	4.5	12	المستطيل $BCDE$
2	6.85	6.28	نصف الدائرة DEF
2	6	– 1.77	الدائرة الوهمية

يتعين مركز الثقل العام لأي سطح مستو بالمعادلتين التاليتين :

$$x = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} \quad ; \quad y = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

نعوض فنحصل على :

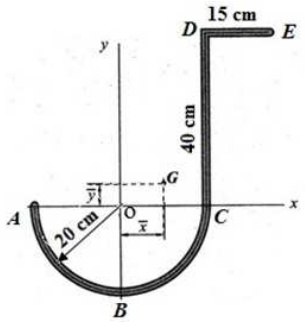
$$x = \frac{6 \times 2 + 12 \times 4.5 + 6.28 \times 2 - 1.77 \times 2}{6 + 12 + 6.28 - 1.77} = 4.37\ m$$

$$y = \frac{6 \times 1.33 + 12 \times 2 + 6.28 \times 6.85 - 1.77 \times 6}{6 + 12 + 6.28 - 1.77} = 1.82\ m$$

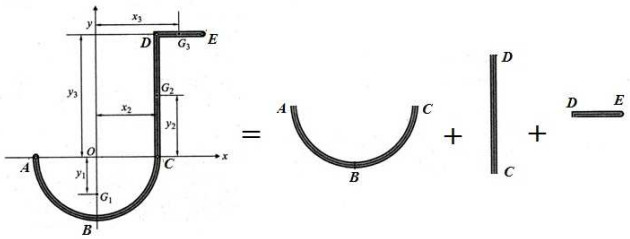
مثال (6–2)

احسب إحداثيات مركز الثقل العام C(x , y) للإطار (Frame) الموضح في الشكل وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة .

الحل :



نُقسّم الإطار المفروض إلى ثلاثة أجزاء ثم نحسب طول كل جزء وإحداثيات مركز ثقله . كما هو مبين في الجدول.



y_i (cm)	x_i (cm)	الطول L_i (cm)	الأجزاء
-12.73	0	20 π	القوس ABC
20	20	40	القطعة المستقيمة CD
40	27.5	15	القطعة المستقيمة DE

يتعين مركز الثقل العام لأي إطار (Frame) بالمعادلتين التاليتين :

$$x = \frac{\sum L_i x_i}{\sum L_i} \quad ; \quad y = \frac{\sum L_i y_i}{\sum L_i}$$

وبناء على القيم الواردة في الجدول السابق نحصل على :

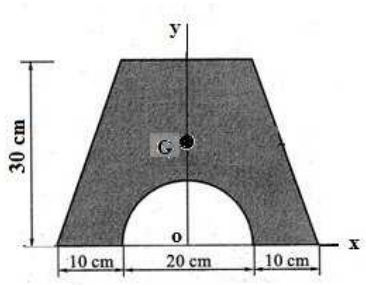
$$x = \frac{(20\pi \times 0) + (40 \times 20) + (15 \times 27.5)}{20\pi + 40 + 15} = 10.29\ cm$$

$$y = \frac{(-12.73 \times 20\pi) + (40 \times 20) + (15 \times 40)}{20\pi + 40 + 15} = 5.09\ cm$$

مسائل للمراجعة
REVIEW PROBLEMS

مسألة رقم (1) :

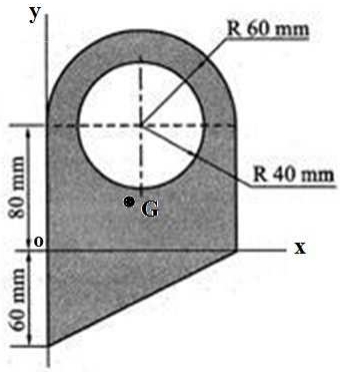
احسب إحداثيات مركز الثقل العام G(x,y) للمساحة المظللة الموضحة في الشكل المجاور وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة.



الجواب : x = 0 , y = 15.26 cm

مسألة رقم (2) :

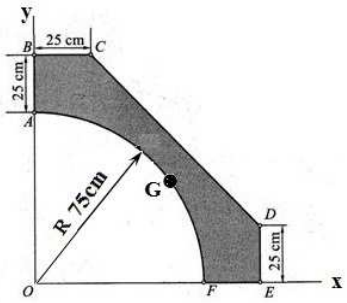
احسب إحداثيات مركز الثقل العام G(x,y) للمساحة المظللة الموضحة في الشكل المجاور وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة .



الجواب : x = 54.8 mm , y = 36.62 mm

مسألة رقم (3) :

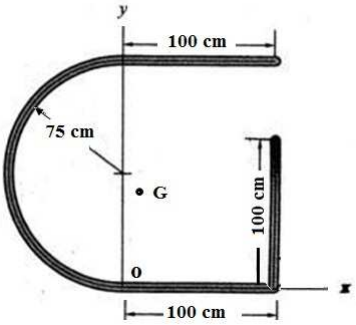
احسب إحداثيات مركز الثقل العام G(x,y) للمساحة المظللة الموضحة في الشكل وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة .



الجواب : x = y = 53.6 cm

مسألة رقم (4) :

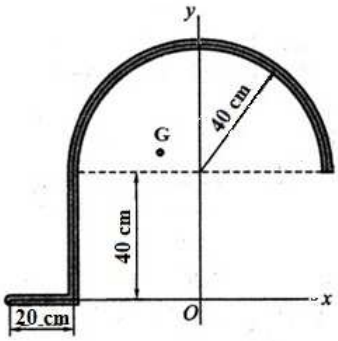
احسب إحداثيات مركز الثقل العام G(x,y) للإطار الموضح في الشكل المجاور وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة.



الجواب : x = 16.4 cm , y = 70.3 cm

مسألة رقم (5) :

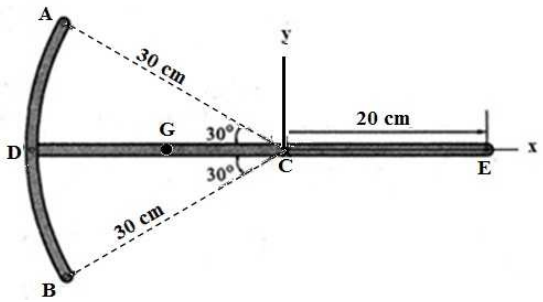
احسب إحداثيات مركز الثقل العام G(x,y) للإطار الموضح في الشكل المجاور وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة.



الجواب : x = -14 cm , y = 48.6 cm

مسألة رقم (6) :

احسب إحداثيات مركز الثقل العام G(x,y) للإطار الموضح في الشكل المجاور وذلك بالنسبة لجملة المحاور الإحداثية المفروضة.



الجواب : x = -14.13 cm , y =0