



ENSEIGNEMENT SUP PHYSIQUE

Licence



Alain Colin De Verdière
Souren Pogossian

MÉCANIQUE CLASSIQUE

COURS ET EXERCICES CORRIGÉS

Tome 2

Repères non inertiels, fluides, thermodynamique,
capillarité, introduction à la théorie du chaos

edp sciences



Alain Colin De Verdière, Souren Pogossian

.....

La collection « Enseignement Sup Physique » se présente comme une introduction sur des sujets incontournables en physique. Adaptée aux besoins des étudiants et des chercheurs, le traitement rigoureux, mais accessible, de chaque sujet est idéal pour ceux qui veulent une amorce dans un sujet donné pour les préparer à une étude ou à une recherche plus avancée.

Le climat et la transition énergétique, la physique des milieux naturels, de la micro-échelle capillaire à celle de la planète, demandent d'ajouter aux lois de Newton celles de la Thermodynamique de Carnot.

Les thèmes étudiés dans ce tome 2 sont : Rotation de la Terre et forces de Coriolis, Fluides : turbulence, vagues, marées et musique, Thermodynamique : énergie et entropie, moteurs thermiques, climat et transition énergétique, Tension de surface et capillarité, Introduction à la théorie du chaos et attracteurs étranges.

La bonne compréhension du sujet est assurée par la progression naturelle des idées, l'usage de mathématiques élémentaires, des exemples tirés de situations d'actualité et un style clair. Cet ouvrage est autonome avec des questions de réflexion et plus de 200 exercices, la solution desquels est détaillée pour les trois quarts d'entre eux. Une annexe numérique et informatique en ligne permet de trouver les solutions de problèmes complexes (langages Octave ou Matlab).

Ce tome 2 est destiné aux étudiants en deuxième année de licence, IUT ou classes préparatoires.

Alain Colin de Verdière a obtenu un doctorat du Massachusetts Institute of Technology (MIT) et de Woods Hole Oceanographic Institution (WHOI). Ses recherches portent sur la circulation océanique mondiale et les modèles simplifiés océan-atmosphère pour le climat.

Souren Pogossian a obtenu un doctorat de l'université de Brest en réalisant la majeure partie de sa thèse au CNRS de Meudon. Ses recherches concernent la propagation guidée des ondes lumineuses et neutroniques, l'optoélectronique du silicium-germanium, le couplage d'échange en magnétisme et aujourd'hui l'astrodynamique.



Prise de la Station spatiale internationale, cette vue du glacier Upsala en Patagonie montre toute la richesse des mouvements de l'eau dans ses trois phases, solide, liquide et gazeuse, qui coexistent ici.

ISBN : 978-2-7598-2671-1



9 782759 826711

Mécanique classique

Cours et exercices corrigés

Tome 2

Repères non inertiels, fluides, thermodynamique,
capillarité, introduction à la théorie du chaos

Mécanique classique

Cours et exercices corrigés

Tome 2

Repères non inertiels, fluides, thermodynamique,
capillarité, introduction à la théorie du chaos

A. Colin de Verdière et S. Pogossian

Remerciements

O. Arzel, X. Carton, N. Daniault, T. Huck, L. Géli, N. Grima et R. Scott ont accepté de relire certains chapitres et leurs remarques judicieuses ont permis de supprimer des erreurs et d'améliorer le manuscrit. J. Sirven et A. Wirth ont fait une relecture très approfondie du chapitre Thermodynamique qui a permis d'éclaircir plusieurs points délicats. Nous restons bien sûr seuls responsables des erreurs qui pourraient subsister. J. Le Bars a contribué à la frappe de notes initiales du tome 1 et partagé avec patience ses connaissances de traitement de texte.

Les reproductions de figures ont été rendues possibles grâce aux permissions de EDP Sciences, Elsevier, ESA/NASA et Thomas Pesquet, Dover, NASA, National Parks Gallery, Ocean Data Lab (Deolen).

Que tous soient chaleureusement remerciés.

Photographie de couverture : Glacier Upsala en Patagonie.

Crédit : ESA/NASA - Thomas Pesquet

Conception graphique de la couverture : CB Defretin, Lisieux

Imprimé en France

ISBN (papier) : 978-2-7598-2671-1 – ISBN (ebook) : 978-2-7598-2672-8

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du code pénal.

© EDP Sciences, 2022

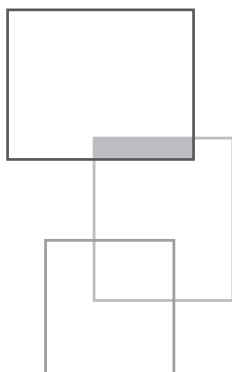


Table des matières

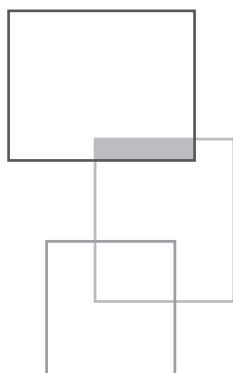
Chapitre 8 • La rotation de la Terre et la force de Coriolis	399
8.1 La force de Coriolis	400
8.2 Applications	405
8.2.1 Nombre de Rossby	405
8.2.2 Le cercle d'inertie	406
8.2.3 Chute libre sur une Terre en rotation	407
8.2.4 Analogie électromagnétique	408
8.2.5 La démonstration de la rotation terrestre : le pendule de Foucault	408
8.2.6 Exercices	411
Chapitre 9 • Mécanique des fluides	413
9.1 Introduction	413
9.2 Les forces dans un fluide	419
9.3 Statique des fluides	423
9.4 Dynamique des fluides	427
9.4.1 Les forces de pression	427
9.4.2 Les forces visqueuses	429
9.4.3 La conservation de la masse	430
9.4.4 La relation de Bernoulli	433
9.4.5 Forces aux frontières	436
9.5 Applications	436
9.5.1 Applications de la relation de Bernoulli	437

9.5.2	Écoulements visqueux de Couette et Poiseuille-Hagen	443
9.5.3	Écoulements atmosphériques	446
9.5.4	Turbulence	449
9.5.5	Ondes dans les fluides	454
9.5.6	Questions de réflexion et concepts	468
9.5.7	Exercices	469
Chapitre 10	• Thermodynamique	483
10.1	Introduction	483
10.2	Chaleur, température et la première loi de la thermodynamique	484
10.2.1	Quelques définitions	484
10.2.2	Le travail	486
10.2.3	La chaleur	489
10.2.4	La température et l'équation d'état des gaz parfaits	492
10.2.5	Gaz réels	496
10.2.6	La première loi de la thermodynamique	501
10.2.7	L'enthalpie	503
10.2.8	Phénomènes de transport	505
10.3	Thermodynamique des gaz parfaits	512
10.3.1	Chaleurs spécifiques	512
10.3.2	Transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait	513
10.3.3	Théorie cinétique des gaz	514
10.4	La deuxième loi de la thermodynamique	518
10.4.1	La détente de Joule et la formulation de la deuxième loi	519
10.4.2	L'entropie variable d'état : le cas du gaz parfait	523
10.4.3	Extension : la deuxième loi pour les systèmes fermés	524
10.4.4	Machines thermiques	527
10.4.5	L'entropie variable d'état	534
10.4.6	Variations d'entropie de quelques transformations	535
10.4.7	L'interprétation statistique de l'entropie	537
10.4.8	Les conversions d'énergie possibles	541
10.5	Potentiels thermodynamiques et principes d'extremum	547
10.5.1	Introduction	547
10.5.2	L'identité thermodynamique	548
10.5.3	L'énergie libre de Helmholtz	549
10.5.4	L'énergie libre de Gibbs	552
10.5.5	L'enthalpie	554
10.6	Les énergies disponibles	555
10.6.1	Énergie radiative	555
10.6.2	Bilan d'énergie et d'entropie de la Terre	557

10.6.3	Énergie du vivant	566
10.6.4	Énergie électrique	572
10.6.5	Énergie nucléaire	576
10.7	Les conversions d'énergie	582
10.7.1	Introduction	583
10.7.2	Centrales thermiques	586
10.7.3	La géothermie	590
10.7.4	OTEC : Ocean Thermal Energy Conversion	590
10.7.5	Éoliennes	591
10.7.6	Centrales hydroélectriques	593
10.7.7	Centrales marémotrices	596
10.7.8	Biomasse	596
10.7.9	Le solaire	597
10.7.10	Le système thermodynamique mondial	598
10.7.11	Conclusions	602
10.8	Applications	603
10.8.1	Questions de réflexion et concepts	603
10.8.2	Exercices	604
Chapitre 11	• Tension superficielle et phénomènes capillaires	629
11.1	Introduction	629
11.2	Expériences simples	630
11.3	Origine moléculaire, tension superficielle et énergie de surface	632
11.3.1	Les molécules en surface	632
11.3.2	L'énergie de surface	635
11.3.3	Applications	636
11.4	Relation de Laplace-Young et applications	637
11.4.1	La relation de Laplace-Young	637
11.4.2	Montée dans un tube capillaire	640
11.5	Phénomènes de mouillage	642
11.6	Insectes et capillarité	646
11.7	Applications	648
11.7.1	Questions de réflexion et concepts	648
11.7.2	Exercices	650
Chapitre 12	• Systèmes dynamiques	657
12.1	Introduction	657
12.2	Systèmes différentiels de dimension 1	663
12.2.1	Stabilité	663
12.2.2	Existence et unicité	663

12.2.3 Exemples	664
12.2.4 Bifurcations	666
12.3 Systèmes différentiels de dimension 2	669
12.3.1 Système linéaire	669
12.3.2 Système non linéaire	671
12.4 Systèmes différentiels de dimension 3	679
12.4.1 Le système de Lorenz	679
12.5 Équations aux différences	685
12.5.1 Points fixes et toiles d'araignées	685
12.5.2 L'équation logistique	686
12.6 Conclusion	691
12.7 Exercices	691
Références Tome 2	699
Constantes physiques fondamentales et valeurs utiles	705
Corrections des exercices du tome 2	709
Index général tomes 1 et 2	793

Une annexe numérique et informatique est disponible en ligne en libre accès sur la boutique en ligne de l'éditeur : <https://laboutique.edpsciences.fr/>



Chapitre 8

La rotation de la Terre et la force de Coriolis

Pour un physicien observant les résultats d'expériences, la rotation de la Terre pose problème puisque le référentiel terrestre n'étant pas inertiel, on ne peut pas y appliquer la 2^e loi de Newton. L'objectif est ici de voir comment cette 2^e loi doit être modifiée lorsque le référentiel est en rotation solide. Pour autant, la 2^e loi est utilisée telle quelle en permanence ! Cela veut sans doute dire que les modifications cherchées ne sont pas très importantes. Pourtant, la Terre tourne vite : à l'équateur, le point le plus éloigné de l'axe de rotation de la Terre, la vitesse vaut $\Omega R_T \approx 466 \text{ m s}^{-1}$ avec R_T le rayon terrestre $\approx 6\,370 \text{ km}$ et $\Omega = 7,292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. On découvrira ici que ces modifications sont effectivement négligeables aux échelles de temps courtes devant la période de rotation terrestre mais peuvent devenir très importantes sur des échelles de temps suffisamment longues. Et la rotation terrestre devient centrale pour les mouvements des dépressions de l'atmosphère et de la circulation océanique induisant une dynamique complètement nouvelle. On a déjà vu au chapitre 7 un effet de la rotation qui a un peu déformé la Terre en aplatissant les pôles et en induisant une gravité effective qui n'est plus radiale. Y a-t-il autre chose ?

8.1 La force de Coriolis

La façon la plus directe de voir les nouveaux effets est de considérer une particule libre dans un repère inertiel. Les modifications qui apparaissent sont assez complexes à présenter alors que leur cause est pourtant très simple : il s'agit simplement d'un changement de référentiel comme la figure 8.1 l'explique.

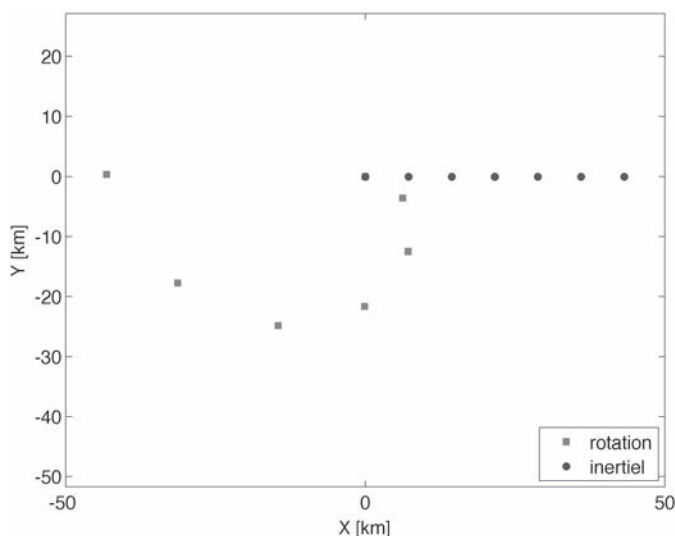


Figure 8.1

Supprimons la gravité et imaginons une particule qui part du pôle Nord avec une vitesse horizontale $U = 1 \text{ m s}^{-1}$. Comme elle n'est soumise à aucune force, l'observateur dans un référentiel inertiel la voit continuer sa route en ligne droite à *vitesse constante* dans l'espace. Elle part de l'origine $x = 0, y = 0$ et sa position est indiquée par les points ronds toutes les 2 heures. Maintenant le terrien qui tourne à la vitesse angulaire de la Terre, voit la même particule sur une trajectoire très différente (les points carrés également toutes les 2 heures).

Une particule libre (qui n'est soumise à aucune force) part du pôle Nord en ligne droite à vitesse constante (1 m s^{-1}) pour un observateur dans un référentiel inertiel (sans accélération). La particule a été lâchée de l'origine prise sur l'axe de rotation à $t = 0$. L'autre trajectoire en forme de spirale est la trajectoire de cette même particule observée dans le référentiel terrestre. Le vecteur rotation Ω , perpendiculaire à la figure, pointe vers le lecteur et le référentiel tourne dans le sens positif (le sens contraire aux aiguilles d'une montre).

Pour l'observateur immobile sur la terre, la particule de la figure 8.1 est déviée sur la droite et a complètement rebroussé chemin au bout de 12 h pour se retrouver une quarantaine de km de l'autre côté du point de départ. L'effet de la rotation de la Terre sur un corps en mouvement semble donc très important. Pour le comprendre, considérons le diagramme des vitesses de la figure 8.2.

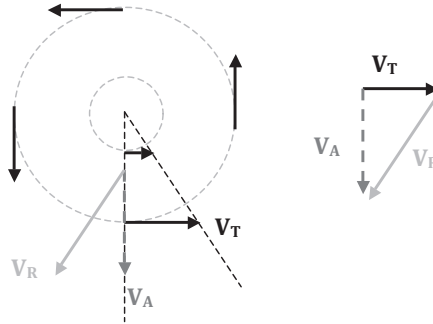


Figure 8.2

À une certaine distance du pôle Nord, un point sur la Terre tourne avec les vitesses indiquées par les flèches noires. La particule libre qui vient du pôle Nord se déplace en ligne droite avec la vitesse en pointillé gris. En revanche pour un observateur terrestre, la construction de droite montre que la particule se déplace sur la droite avec la vitesse en gris clair.

Lorsque la particule se déplace avec la vitesse constante \mathbf{V}_A , un observateur sur la terre se déplace avec la vitesse \mathbf{V}_T . Pour trouver la vitesse relative \mathbf{V}_R de la particule vue par cet observateur terrestre, on utilise l'addition des vecteurs :

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_T + \mathbf{V}_R$$

et donc :

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{V}_A - \mathbf{V}_T$$

La construction graphique sur la droite de la figure 8.2 montre cette soustraction qui explique l'orientation du vecteur \mathbf{V}_R sur la droite de \mathbf{V}_A . Plus la particule s'éloigne du pôle, plus la vitesse de rotation de la terre \mathbf{V}_T est grande et plus la déviation sera importante. Les déplacements de la particule sur la figure 8.1 ne sont que la somme des déplacements élémentaires de la particule $\mathbf{V}_R \Delta t$ durant chaque intervalle de temps Δt .

Si la particule se déplace sur cette sorte de spirale de la figure 8.1, cela signifie qu'elle a une accélération et donc que des forces apparaissent dans le repère en rotation. La 2^e loi de Newton qui ne s'applique que dans des référentiels inertiels doit donc être modifiée. Comme il n'y a aucune force dans le repère inertiel, on comprend que c'est la place de l'observateur dans le référentiel en rotation qui est la cause de ces forces, des pseudo-forces uniquement dues au choix du référentiel tournant.

Maintenant si les positions des points de la spirale sont connues en fonction du temps, on peut avoir accès aux pseudo-forces en dérivant les positions deux fois par rapport au temps. Si on connaît la position d'un point $P(x, y)$ dans un repère inertiel Oxy , le premier objectif est donc de trouver les coordonnées de ce même

point P dans le repère tournant. Supposons que le repère tournant $Ox'y'$ ait tourné d'un certain angle θ :

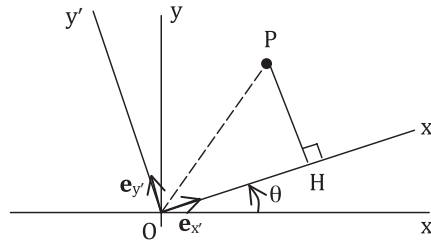


Figure 8.3

Le repère $Ox'y'$ est en rotation (autour d'un axe perpendiculaire à cette page) par rapport au repère inertiel fixe Oxy . Quelles sont les coordonnées du point P dans le repère tournant ?

Dans le repère inertiel $\mathbf{OP} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$. L'abscisse x' de P est tout simplement OH où H est la projection orthogonale de P sur Ox' . Ainsi si $\mathbf{e}_{x'}$ est le vecteur unitaire selon Ox' :

$$x' = \mathbf{OP} \cdot \mathbf{e}_{x'}$$

Les coordonnées de $\mathbf{e}_{x'}$ dans le repère Oxy sont de même les projections orthogonales de $\mathbf{e}_{x'}$ sur Ox et Oy à savoir $\cos \theta$ et $\sin \theta$ respectivement. On peut alors écrire :

$$x' = (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{e}_{x'} = x\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_{x'} + y\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_{x'} = x \cos \theta + y \cos(\pi/2 - \theta) = x \cos \theta + y \sin \theta$$

Et de même :

$$y' = \mathbf{OP} \cdot \mathbf{e}_{y'} = (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{e}_{y'} = x\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_{y'} + y\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_{y'} = x \cos(\pi/2 + \theta) + y \cos \theta = -x \sin \theta + y \cos \theta. \text{ Le changement de coordonnées du système inertiel au système en rotation est donc :}$$

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

Maintenant que l'on sait obtenir les coordonnées d'un point dans un référentiel $x'y'$ tourné d'un angle θ par rapport à un autre, on voit immédiatement que l'on sait obtenir les coordonnées dans un repère en rotation solide à la vitesse angulaire Ω dont l'axe z est perpendiculaire au plan xy . On peut choisir l'origine des angles telle que :

$$\theta = \Omega t$$

$$\text{et l'on a : } \begin{cases} x' = x \cos \Omega t + y \sin \Omega t \\ y' = -x \sin \Omega t + y \cos \Omega t \\ z' = z \end{cases} \quad 8-1$$

Les coordonnées dans la direction z de l'axe de rotation ne changent évidemment pas. Cette formule de changement de coordonnées est la seule chose dont nous ayons besoin pour relier les points d'une trajectoire dans un repère inertiel et dans un repère tournant. Si la trajectoire de la particule libre dans le repère inertiel est :

$$\begin{aligned}x &= ut \\y &= 0 \\z &= 0\end{aligned}$$

où l'on a choisi $\mathbf{x} = 0$ à $t = 0$ par simplicité, en injectant dans 8-1 la trajectoire dans le repère tournant est :

$$\begin{aligned}x' &= ut \cos \Omega t \\y' &= -ut \sin \Omega t \\z' &= 0\end{aligned} \quad 8-2$$

L'équation en coordonnées polaires r', θ montre que la trajectoire est une spirale d'Archimède :

$$\begin{aligned}r' &= |u|t \\ \theta &= -\Omega t \Rightarrow r'(\theta) = -\frac{|u|}{\Omega} \theta\end{aligned}$$

Ce sont les forces qui nous intéressent. Dans le repère inertiel aucune puisque $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0 = 0$. Dans le repère en rotation, la vitesse vaut :

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt} = u \cos \Omega t - u \Omega t \sin \Omega t \\ \frac{dy'}{dt} = -u \sin \Omega t - u \Omega t \cos \Omega t \\ \frac{dz'}{dt} = 0 \end{cases} \quad 8-3$$

et l'accélération :

$$\begin{cases} \frac{d^2x'}{dt^2} = -2u \Omega \sin \Omega t - u \Omega^2 \cos \Omega t \\ \frac{d^2y'}{dt^2} = -2u \Omega \cos \Omega t + u \Omega^2 \sin \Omega t \\ \frac{d^2z'}{dt^2} = 0 \end{cases} \quad 8-4$$

Des accélérations et donc des forces apparaissent sauf dans la direction z' (parallèle à $\mathbf{\Omega}$). Cette expression 8-4 n'est pas très intuitive et on aimerait retrouver par exemple l'accélération centrifuge qui ne dépend que de la position par rapport à l'axe de rotation (ici l'origine). Pour cela il faut éliminer le temps dans 8-4 et obtenir une expression qui ne dépende plus que des positions et vitesses instantanées.

On voit que 8-3 peut s'écrire :

$$\begin{aligned} u \cos \Omega t &= \dot{x}' - \Omega y' \\ -u \sin \Omega t &= \dot{y}' + \Omega x' \end{aligned} \quad 8-5$$

Où $u \cos \Omega t$ et $-u \sin \Omega t$ à gauche sont les composantes de la vitesse inertielle \mathbf{v} exprimées dans le repère $Ox'y'$, de sorte que 8-5 se réécrit avec le produit vectoriel :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}' \quad 8-6$$

et si grâce à 8-5 on substitue les termes en $u \cos \Omega t$ et $u \sin \Omega t$ dans 8-4, on obtient la relation cherchée valable pour tout t :

$$\begin{cases} \frac{d^2 x'}{dt^2} - 2\Omega \frac{dy'}{dt} - \Omega^2 x' = 0 \\ \frac{d^2 y'}{dt^2} + 2\Omega \frac{dx'}{dt} - \Omega^2 y' = 0 \\ \frac{d^2 z'}{dt^2} = 0 \end{cases} \quad 8-7$$

Le troisième terme est familier : ce n'est pas autre chose que l'accélération centripète $-\Omega^2 \mathbf{R}'$ car \mathbf{R}' est en effet la projection du vecteur position \mathbf{r}' sur la perpendiculaire au vecteur $\boldsymbol{\Omega}$. Le deuxième terme de composantes

$\begin{pmatrix} -2\Omega dy'/dt \\ +2\Omega dx'/dt \\ 0 \end{pmatrix}$ est nouveau.

Sous forme vectorielle avec \mathbf{v}' la vitesse de la particule dans le repère en rotation et le vecteur rotation $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$, ce terme se réécrit avec l'aide du produit vectoriel comme $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'$, l'accélération de Coriolis. Si on fait passer ces deux termes à droite dans l'expression 8-7, deux forces apparaissent pour une particule de masse m dans un repère en rotation :

$$m \mathbf{a}' = \underbrace{-2\boldsymbol{\Omega} \times m\mathbf{v}'}_{\text{Force de Coriolis}} + \underbrace{m\Omega^2 \mathbf{R}'}_{\text{Force centrifuge}} \quad 8-8$$

La première est la force de Coriolis, la deuxième la force centrifuge. La figure suivante montre la direction de la force de Coriolis :

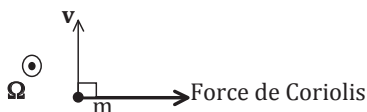


Figure 8.4

Propriétés de la force de Coriolis :

(i) Dès qu'il existe un mouvement dans le repère en rotation, apparaît une force perpendiculaire à \mathbf{v}' et sur la droite de \mathbf{v}' lorsque $\boldsymbol{\Omega}$ pointe vers le lecteur. Elle est

responsable de la déviation à droite de la trajectoire sur la figure 8.1 alors que la force centrifuge « écarte » la particule de l'origine.

(ii) Des propriétés du produit vectoriel, on déduit que si \mathbf{v}' est parallèle à $\boldsymbol{\Omega}$, la force est nulle, la raison pour laquelle il n'y a aucun terme dans la direction z' sur 8-7.

(iii) Comme la force de Coriolis est perpendiculaire à \mathbf{v}' , son travail est nul et elle ne change pas l'énergie cinétique d'un corps.

Toute cette « dérivation » a été faite pour une particule libre, non accélérée, dans un repère inertiel Oxy. Que se passe-t-il lorsque la particule est soumise à des forces \mathbf{F} et qu'elle possède une accélération \mathbf{a} dans le repère inertiel ? Comme l'expression 8-7 est instantanée, on voit qu'il y aura un seul terme supplémentaire, l'accélération propre de la particule et 8-7 se réécrit vectoriellement :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' - \Omega^2 \mathbf{R}' \quad 8-9$$

Les deux expressions 8-6 et 8-9 donnent la transformation des vitesses et des accélérations quand on passe d'un repère inertiel à un repère en rotation (les variables avec des primes). L'accélération dans le repère inertiel \mathbf{a} induite par des forces \mathbf{F} cause des accélérations relatives \mathbf{a}' dues aux forces \mathbf{F} mais également d'autres dues aux pseudo-forces de sorte que 8-8 se généralise à :

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - 2\boldsymbol{\Omega} \times m\mathbf{v}' + m\Omega^2 \mathbf{R}' \quad 8-10$$

Si on réécrit 8-10 en séparant le poids $m\mathbf{g}$ des autres forces, on fait apparaître la gravité effective \mathbf{g}_e :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_e &= \mathbf{g} + \Omega^2 \mathbf{R}' \\ m\mathbf{a}' &= -2\boldsymbol{\Omega} \times m\mathbf{v}' + m\mathbf{g}_e + \hat{\mathbf{F}} \end{aligned} \quad 8-11$$

$\hat{\mathbf{F}}$ représentant les forces autres que le poids. La relation 8-11 montre que la dynamique étudiée dans un référentiel en rotation fait intervenir essentiellement ce nouveau terme de Coriolis qui vient modifier profondément la dynamique.

8.2 Applications

8.2.1 Nombre de Rossby

Pour savoir s'il faut prendre en compte ces effets de la rotation terrestre, la première chose à faire est de comparer l'accélération d'une particule \mathbf{a}' sur la terre et l'accélération de Coriolis. Si la vitesse d'une particule change de 0 à U sur un temps T et une distance L , \mathbf{a}' est d'ordre $U/T = U^2/L$ avec $T = L/U$. Le rapport de \mathbf{a}' et de l'accélération de Coriolis $2\Omega U$ est donc de l'ordre de :

$$R_0 = \frac{U^2 / L}{2\Omega U} = \frac{U}{2\Omega L}$$

Mais on peut aussi écrire :

$$R_0 = \frac{1}{2\Omega T} = \frac{T_{1 \text{ jour}}}{4\pi T} = \frac{T_{1,9 \text{ heures}}}{T}$$

Ceci montre que pour des mouvements d'échelle spatiale suffisamment grande ou d'échelle temporelle supérieure à quelques heures, R_0 peut devenir inférieur à 1, auquel cas l'accélération de Coriolis devient prédominante. R_0 est le nombre de Rossby (du nom du météorologiste suédois du milieu du xx^e siècle, un des fondateurs de la météorologie dynamique). Pour les mouvements de la vie ordinaire, R_0 est très grand et la force de Coriolis est donc négligeable. Pour l'écoulement de l'eau de vidange d'un lavabo, $U = 0,1 \text{ m s}^{-1}$, $L = 0,5 \text{ m}$, $R_0 = 2 \cdot 10^3$, et on conclura que la rotation de la Terre n'a aucun effet sur le sens du tourbillon de vidange d'un lavabo. Par contre, pour des mouvements atmosphériques qui ont des vitesses $U \sim 10 \text{ m s}^{-1}$ et des échelles $L \sim 1\,000 \text{ km}$ typiques des dépressions des latitudes tempérées, $R_0 = 0,1$. La force de Coriolis domine les accélérations relatives sur ces grandes échelles spatiales. Les modifications qui interviennent dans la mécanique des fluides d'une Terre en rotation seront discutées au chapitre 9.

8.2.2 Le cercle d'inertie

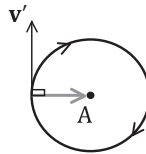


Figure 8.5

La force de Coriolis est en gris sur la figure.

Considérons un lac gelé au pôle Nord. On lance un palet de hockey sur la glace. Si on néglige le frottement sur la glace, le poids du palet est équilibré par la réaction normale à la surface et donc la force de Coriolis devient la seule force horizontale. Comme elle est perpendiculaire à la vitesse et à droite, la force de Coriolis est centripète et donc

$\frac{v'^2}{r} = 2\Omega v'$ dans la direction du centre de la trajectoire A. Dans la direction tangentielle $\frac{dv'}{dt} = 0$ et v' est constant. La trajectoire du palet est donc un

cercle de rayon $r = v'/2\Omega$ et la trajectoire s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre. Imaginons que ce palet soit lancé à 50 km/h , il exécutera alors un cercle dit « inertiel » de rayon proche de 100 km . Voilà l'une des originalités des effets de la rotation de la Terre. Si la trajectoire d'un palet au pôle Nord est d'un intérêt somme tout limité, mentionnons que ces mouvements inertiels s'observent aussi

dans l'océan. Les trajectoires de bouées de surface montrent souvent des boucles inertielles après un coup de vent. L'exercice 7 donne la solution du cercle d'inertie pour une latitude quelconque.

8.2.3 Chute libre sur une Terre en rotation

Depuis Laplace on cherchait une expérience de laboratoire pour prouver la rotation de la Terre. Au milieu du XIX^e siècle, des expériences de chute libre ont eu lieu pour déceler ces petites déviations de la verticale du fil à plomb causées par la rotation. La chute libre d'un caillou dans un puits de mine a été observé en Allemagne en 1832 (voir exercice 4). Plaçons-nous à l'équateur pour simplifier.

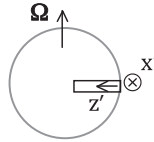


Figure 8.6

Le puits est orienté sur la verticale locale et le caillou est sans vitesse initiale ($\mathbf{v}' = 0$). Le mouvement sur la verticale (axe z) est peu influencé par la force de Coriolis et donc $v'_z \approx gt$. Dans la direction x' on a alors :

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = 2\Omega v'_z = 2\Omega gt$$

soit :

$$x' = \frac{1}{3} \Omega gt^3$$

Comme le déplacement vertical $z' \approx \frac{1}{2} gt^2$, on peut éliminer t pour obtenir :

$$x' = \frac{2^{3/2} \Omega}{3\sqrt{g}} z'^{3/2}$$

Le déplacement est vers l'est ($x' > 0$). Il faudra vérifier *a posteriori* que l'approximation faite dans la direction z' ($2\Omega dx'/dt \ll g$) est correcte. On peut aussi voir ce problème dans le repère inertiel. Comme la force est centrale, la particule conserve son moment cinétique « $m R^2 \omega$ » avec ω la vitesse angulaire autour du centre de la terre. La distance à l'axe de rotation R diminue lors de la chute et donc la vitesse angulaire ω augmente. Le caillou tourne plus vite que la Terre et tombe à l'est de la verticale locale.

8.2.4 Analogie électromagnétique

Le mouvement d'une charge électrique q dans les champs électriques \mathbf{E} et magnétiques \mathbf{B} uniformes est gouverné par :

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} + q\mathbf{E}$$

soit

$$\mathbf{a} = -\frac{q}{m} \mathbf{B} \times \mathbf{v} + \frac{q}{m} \mathbf{E}$$

En comparant avec l'accélération 8-11 pour la chute libre dans un repère non inertiel :

$$\mathbf{a}' = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{g}_e$$

l'analogie apparaît directement en faisant les correspondances :

$$\boldsymbol{\Omega} \rightarrow \frac{q}{2m} \mathbf{B} \text{ et } \mathbf{g}_e \rightarrow \frac{q}{m} \mathbf{E}$$

Les équations qui gouvernent la chute libre (à \mathbf{g}_e constant) sur une Terre en rotation uniforme sont donc les mêmes que celles qui gouvernent l'accélération d'une particule élémentaire dans un cyclotron.

8.2.5 La démonstration de la rotation terrestre : le pendule de Foucault

Les expériences prouvant la rotation de la Terre à l'échelle du laboratoire ne sont pas légion car l'effet étant faible, elles sont difficiles à réaliser. La plus concluante fut réalisée par Foucault qui observa en 1851 la déviation au fil des heures du plan d'oscillation d'un pendule simple. Le pendule fut ensuite installé au plafond du Panthéon pour une démonstration publique reprise dans de nombreux pays (voir Sommeria, 2017 pour une revue des expériences de Foucault). Sachant calculer les forces de Coriolis, on va pouvoir vérifier que cette déviation dépend bien du sinus de la latitude.

La tradition en météorologie et en océanographie est de prendre le repère terrestre local Ox vers l'est, Oy vers le nord, et Oz vers le haut selon la verticale locale. Pour exprimer l'accélération de Coriolis, calculons le produit vectoriel $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$:

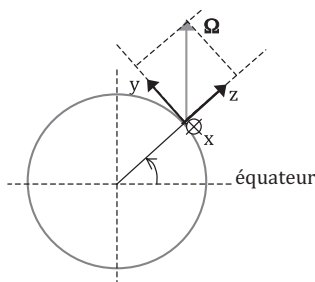


Figure 8.7

Avec θ la latitude, la figure 8.7 montre que les composantes de Ω sont $(0, \Omega \cos \theta, \Omega \sin \theta)$ et celles du vecteur vitesse (v_x, v_y, v_z) . Les composantes de $2\Omega \times \mathbf{v}$ sont alors :

$$\begin{pmatrix} 2\Omega \cos \theta v_z - 2\Omega \sin \theta v_y \\ 2\Omega \sin \theta v_x \\ -2\Omega \cos \theta v_x \end{pmatrix} \quad 8-12$$

Si la Terre était un repère inertiel, le plan d'oscillation du pendule serait fixe. Mais le plan d'oscillation n'est pas fixe et tourne au cours de la journée. Pourquoi ?

Considérons un pendule de grande longueur permettant l'approximation des petits angles (chapitre 4).

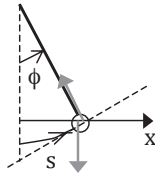


Figure 8.8

La masse du pendule se déplace sur le cercle de rayon l . On peut repérer cette position soit par l'angle ϕ soit par s l'abscisse curviligne sur l'arc de cercle :

$$s = l\phi$$

où s peut prendre comme ϕ des valeurs positives ou négatives. La 2^e loi de Newton dans la direction tangentielle s'écrit alors :

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \phi \approx -mg\phi$$

Il faut se rappeler que la direction verticale est celle de la verticale locale de sorte que g contient la modification par la composante statique de la rotation. Avec $\phi = s/l$ on retrouve l'équation différentielle déjà vue au chapitre 4 :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{g}{l}s = 0$$

dont les solutions sont harmoniques avec la pulsation $\omega^2 = g/l$. Connaissant l'abscisse curviligne, le mouvement du pendule dans le plan horizontal selon l'axe x de la figure 8.8 s'obtient via la projection : $dx = ds \cos \phi$. Mais pour les petits angles, $\cos \phi \sim 1$, ce qui implique que $x \sim s$ de sorte que le mouvement du pendule dans le plan horizontal est aussi approximativement :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Maintenant le mouvement selon Ox va être dévié par la force de Coriolis créant du mouvement selon l'axe Oy. Quand on rajoute les accélérations de Coriolis horizontales 8-12 dans le repère terrestre, les équations du pendule de Foucault deviennent :

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x - f \frac{dy}{dt} &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2y + f \frac{dx}{dt} &= 0\end{aligned}\tag{8-13}$$

Ici $f = 2\Omega \sin \theta$ est le paramètre de Coriolis, paramètre de grande importance en Sciences du climat. Comme le mouvement est quasi horizontal, on a négligé le terme en $2\Omega \cos \theta$ de l'accélération. Les forces de Coriolis introduisent un couplage entre les directions x zonales et y méridiennes. Pour trouver les solutions de 8-13, on introduit la notation complexe, commode pour traiter d'oscillations. Avec le nombre complexe $z = x + iy$, l'équation 8-13 devient :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + if \frac{dz}{dt} + \omega^2z = 0$$

Cette équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants admet des solutions exponentielles $\propto e^{rt}$. En introduisant cette forme dans l'équation, on obtient un polynôme en puissances de r :

$$r^2 + ifr + \omega^2 = 0$$

dont les racines sont :

$$r = \frac{1}{2}(-if \pm i\sqrt{f^2 + 4\omega^2})$$

Mais quand la fréquence du pendule est grande devant f ($\omega \gg f$), l'expression précédente est à peu près :

$$r \approx -\frac{if}{2} \pm i\omega$$

La solution est alors une oscillation de la forme :

$$z = e^{-ift/2} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t})$$

Les constantes C_1 et C_2 étant données par les conditions initiales sur la position et la vitesse. La solution exhibe deux fréquences distinctes : la fréquence rapide du pendule ω et la modulation de basse fréquence $f/2$. Lorsque les conditions initiales sont celles d'un mouvement plan (par exemple $x = x_0$, $dx/dt = 0$, $y = 0$ et $dy/dt = 0$ à $t = 0$), on obtient les constantes et la solution finale est obtenue en prenant la partie réelle de la solution. La rotation se borne à faire tourner le plan d'oscillation du pendule avec la vitesse angulaire $-f/2 = -\Omega \sin \theta$, c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère nord, vitesse angulaire qui dépend effectivement du sinus de latitude. La rotation complète du plan d'oscillation du pendule prend 24 h au pôle, 31,78 h à la latitude de Paris (48,85 °N) et tend vers l'infini à l'équateur. Sans doute l'expérience la plus convaincante pour montrer l'effet dynamique causé par l'existence des forces de Coriolis, même si la théorie n'est pas si simple.

8.2.6 Exercices

Ces exercices demandent l'usage de la relation 8-12 pour l'accélération de Coriolis dans le repère terrestre habituel, x vers l'est (longitudes croissantes), y vers le nord (latitudes croissantes) et z vers le haut sur la verticale locale (altitudes croissantes).

La partie centrifuge de l'accélération de Coriolis en $\Omega^2 \mathbf{R}'$ est prise en compte dans la gravité effective que l'on supposera constante dans ces exercices (à l'exception de l'exercice 6).

1. C Le vecteur \mathbf{A} a un module de 2 et fait un angle de 60° avec l'axe Ox d'un repère Oxy (vecteur unitaire \mathbf{i} et \mathbf{j}). Trouvez les composantes de \mathbf{A} . On tourne le repère de 30° dans le sens trigonométrique positif autour de l'origine O pour former un nouveau repère $Ox'y'$. Déterminez les composantes de \mathbf{A} dans ce nouveau repère. On appellera \mathbf{i}' et \mathbf{j}' les vecteurs unitaires du nouveau repère.

2. C (Holton) Une locomotive de masse $2 \cdot 10^4$ kg se déplace sur une ligne droite à 200 km h^{-1} à la latitude de 45°N . Déterminez les composantes horizontale et verticale de la force sur les rails. Comparez la composante normale selon que le train va vers l'est ou vers l'ouest.

3. C (Holton) Deux balles de même diamètre (4 cm) sont placées à 100 m l'une de l'autre sur une table horizontale sans frottement à 45°N . Les balles sont lancées l'une vers l'autre avec la même vitesse. Quelle vitesse choisir pour éviter la collision ?

4. C Depuis l'interrogation de Laplace, les expériences prouvant la rotation de la Terre étaient très recherchées. F. Reich a réalisé une expérience de chute libre dans la ville minière de Freiberg en Saxe en 1832. En moyennant sur une centaine d'expériences, il a obtenu une déviation vers l'est de 2,8 cm après une chute dans un puits de mine de 158 m. Calculez la déviation théorique et comparez. La latitude de Freiberg est de $50,91^\circ \text{N}$ et la gravité y vaut $9,811 \text{ m s}^{-2}$.

Aide : négligez la composante verticale de l'accélération de Coriolis devant g .

5. * C (Arnold) Un missile est lancé verticalement à Saint-Petersbourg (lat = $59,93^\circ \text{N}$ et $g = 9,819 \text{ m s}^{-2}$) et atteint une altitude d'un km. De combien la force de Coriolis va-t-elle déplacer le missile de sa rampe de lancement lors de sa retombée ?

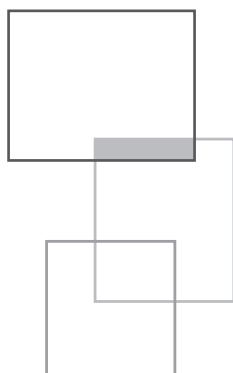
6. * C (Suite de l'exercice 5) Dans un deuxième temps, on ne néglige plus l'accélération centrifuge en $\Omega^2 \mathbf{R}'$. Écrire un programme pour calculer la trajectoire du missile et comparez avec le cas précédent. *Note* : il faudra d'abord trouver la direction verticale initiale.

7. C Montrer que le cercle d'inertie de l'exemple 8-1 devient $r = v/f$ avec $f = 2\Omega \sin \theta$, le paramètre de Coriolis, à une latitude θ quelconque.

8. C Une rivière s'écoule à une vitesse $V = 9 \text{ km h}^{-1}$ à une latitude de 45°N . Déterminez l'accélération de Coriolis. Dans quelle direction l'eau est-elle poussée ? La rivière exécute un virage de rayon r . Comparez la valeur de l'accélération centripète nécessaire pour prendre le virage et l'accélération de Coriolis. Pour quelle valeur de r sont-elles comparables ? Faire apparaître le nombre de Rossby.

9. C L'objet de l'exercice est d'expliquer pourquoi les plastiques s'accumulent dans l'océan au centre des tourbillons subtropicaux aux latitudes d'environ 35° . Ils flottent près de la surface et sont donc sensibles à la force du vent qui est vers l'est à des latitudes supérieures à 35° (les vents d'ouest) et vers l'ouest à des latitudes inférieures à 35° (les alizés).

Indice : on fait l'hypothèse qu'un équilibre se crée entre la force du vent et la force de Coriolis. En déduire les directions des courants qui agissent sur les plastiques et conclure.



Chapitre 9

Mécanique des fluides

9.1 Introduction

Connaissant les difficultés pour traiter le mouvement de plus de deux corps en interaction gravitationnelle, on peut se demander s'il est bien raisonnable de se lancer dans l'analyse du mouvement d'un fluide qui consiste de fait en une infinité de particules en interaction. La raison principale pour ne pas éluder cette difficulté est que l'on vit avec deux fluides « air et eau » présents partout autour de nous et que les applications de la mécanique des fluides sont immenses : transformations d'énergie cinétique, potentielle, thermique en électricité, formes des voitures et des trains, portance d'ailes d'avions, d'éoliennes et de voiles de bateau, design des bateaux et sous-marins, musique et acoustique, respiration et circulation sanguine, propulsion des poissons, refroidissement de réacteurs nucléaires, vagues et marées, circulations atmosphériques, océaniques et climat, intérieur de la Terre, mouvements du manteau, tectonique des plaques, noyau liquide et champ magnétique terrestre, atmosphères planétaires et étoiles...

L'air est un gaz léger, de masse volumique $\rho_{\text{air}} \cong 1,2 \text{ kg m}^{-3}$ (aux conditions ordinaires de température et de pression – voir chapitre 10), tandis que l'eau est un liquide 1 000 fois plus dense $\rho_{\text{eau}} \cong 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. La deuxième différence provient de leur compressibilité. Alors qu'on peut facilement comprimer un gaz, c'est-à-dire réduire son volume en exerçant une pression, c'est beaucoup plus difficile pour un liquide. En dépit de ces deux différences, la 2^e loi de Newton convenablement adaptée propose les mêmes équations pour calculer le mouvement des gaz et des liquides. Les équations connues depuis l'époque d'Euler (1707-1783) et de

Lagrange (1736-1813) sont générales et furent précisées pour ce qui concerne la viscosité par Navier (1785-1836) et Stokes (1819-1903). La difficulté est que ces équations sont juste très compliquées et que les solutions exactes se comptent sur les doigts d'une main, si bien que la seule issue pour progresser dans la compréhension de la physique des fluides est d'élaborer des approximations, hypothèses de travail qui restent toujours à justifier *a posteriori*. L'art d'approximer les équations générales pour un problème particulier est au cœur de la recherche en Mécanique des fluides. Au pas du progrès des calculateurs, les méthodes numériques de résolution de ces équations se sont aussi développées, mais on verra que les contraintes de résolution spatiale pèsent et continueront de peser sur ces méthodes pendant longtemps.

Simplifier les équations revient à identifier les termes dominants du flot particulier que l'on observe. Comme les équations sont différentielles, il faut mesurer la taille des dérivées de variables qui interviennent. Si on connaît les échelles (*scales*) spatiales et temporelles sur lesquelles un écoulement varie, on va pouvoir mesurer ces dérivées objectivement. Le *scaling* est cette méthode générale pour identifier la taille des termes des équations afin de négliger les plus petits. Pour faire ce bornage sur un exemple simple, observons les vitesses caractéristiques impliquées et l'échelle spatiale de l'écoulement d'une rivière.

Imaginons un profil de vitesse $u(x)$ du courant observé :

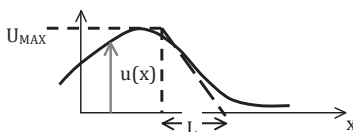


Figure 9.1

L'échelle de l'écoulement L est la distance typique sur laquelle la vitesse $u(x)$ passe de 0 à U .

La vitesse caractéristique (ou l'échelle de vitesse) de l'écoulement est définie par :

$$U = \max (|u(x)|)$$

Maintenant l'échelle spatiale L est choisie pour borner la dérivée du/dx de l'écoulement (appelée aussi cisaillement). Ainsi :

$$L = \frac{U}{\left| \frac{du}{dx} \right|_{\text{MAX}}}$$

L'échelle spatiale est donc ce qui permet d'estimer les valeurs maximales de la dérivée (en valeur absolue). Prenons l'exemple d'un courant périodique, on pourra écrire : $u(x) = u_0 \sin kx$ avec k , le nombre d'onde $= 2\pi/\lambda$ et λ la longueur d'onde. Comme la dérivée est :

$$du/dx = ku_0 \cos kx$$

Les définitions précédentes donnent les échelles $U = u_0$ et $L = u_0/ku_0 = 1/k = \lambda/2\pi$. L'amplitude u_0 et k^{-1} , l'inverse du nombre d'ondes, capturent l'ordre de grandeur de l'échelle de vitesse et de l'échelle spatiale de cet écoulement. Bien souvent on ne connaît pas assez bien l'écoulement pour être très précis et seuls les ordres de grandeur de L et de U sont connus. Mais cela suffit souvent pour faire le tri entre les processus importants et ceux qui sont négligeables pour remonter aux causes des observations. Listons quelques observations d'écoulements fluides et les échelles associées :

Tableau 9.1		
Écoulements	Échelle de vitesse U	Échelle de longueur L
Mélange du lait dans un café	1 cm s^{-1}	1 cm
Fumées de cigarettes	1 cm s^{-1}	1 cm
Mouvements dans une casserole d'eau chauffée	1 cm s^{-1}	1 cm
Écoulements autour d'un avion (voiture, bateau)	$10\text{ à }100\text{ m s}^{-1}$	$1\text{ m à }100\text{ m}$
Vagues à la surface de l'eau	10 m s^{-1} (vitesse de phase)	$1\text{ m à }1\text{ km}$
Musique (acoustique)	300 m s^{-1} (vitesse de phase)	$1\text{ mm à }100\text{ m}$
Marées océaniques	$10\text{-}200\text{ m s}^{-1}$ (vitesse de phase)	$100\text{ à }10\,000\text{ km}$
Tsunamis	$10\text{-}200\text{ m s}^{-1}$ (vitesse de phase)	$10\text{-}100\text{ km à la source}$
Circulation océanique	1 cm s^{-1}	$1\,000\text{ km}$
Mouvements dans un nuage convectif	10 m s^{-1}	$1\text{ à }10\text{ km}$
Tornades	100 m s^{-1}	100 m
Ouragans tropicaux	50 m s^{-1}	500 km
Circulation atmosphérique	10 m s^{-1}	$1\,000\text{ à }10\,000\text{ km}$
Mouvements de la croûte terrestre (viscosité élevée)	1 cm/an	$1\,000\text{ à }10\,000\text{ km}$
Convection dans le noyau liquide de la Terre (faible viscosité)	?	$1\,000\text{ à }10\,000\text{ km}$

Dans la liste du tableau apparaissent des mouvements périodiques (musique, vagues, marées, ondes sismiques) et pour ceux-là, on a indiqué la vitesse de propagation ou vitesse de phase des ondes correspondantes. On verra plus loin que cette vitesse de propagation n'a rien à voir avec la vitesse des particules fluides généralement petite devant les vitesses de propagation.

Quels sont les paramètres d'environnement importants qui gouvernent la physique des mouvements des fluides sur la Terre ?

(i) La gravité $\rightarrow g \approx 10 \text{ m s}^{-2}$. Évidemment la force gravitationnelle est la force fondamentale.

(ii) La rotation de la Terre \rightarrow Période de rotation 24 heures. On sait que la Terre n'est pas un repère inertiel et que si l'accélération d'une particule devient de l'ordre de l'accélération de Coriolis, on est obligé de tenir compte de cette dernière. L'accélération due à la rotation de la Terre subie par un mouvement de vitesse U (mesurée par un observateur terrestre) est $2\Omega U$ avec Ω la vitesse angulaire ($2\pi/\text{période}$) de la Terre.

Pour savoir si gravité et/ou rotation sont importantes pour les écoulements du tableau 9.1, il faut donc comparer les accélérations des particules fluides à g et $2\Omega U$ respectivement. Imaginons une particule de fluide passant d'une vitesse nulle à une vitesse U sur une distance (échelle) L . Ceci se passe en un temps $T = O(L/U)$ et l'accélération typique d'une particule fluide est donc :

$$a = \frac{U}{L/U} = \frac{U^2}{L}$$

Le rapport de cette accélération à g et $2\Omega U$ respectivement fait apparaître deux nombres sans dimensions :

$$F = \frac{U^2}{gL} \quad \text{Le nombre de Froude}$$

$$R_0 = \frac{U}{2\Omega L} \quad \text{Le nombre de Rossby}$$

Si $F \gg 1$ La gravité ne joue aucun rôle et inversement si $F \ll 1$.

Si $R_0 \gg 1$ La rotation ne joue aucun rôle et inversement si $R_0 \ll 1$.

Le lecteur pourra compléter les valeurs de F et R_0 pour chacun des écoulements du tableau 9.1. On verra au § 9.6.3 une définition plus adaptée du nombre de Rossby aux écoulements atmosphériques ou océaniques. Le nombre de Reynolds introduit plus loin est un autre nombre sans dimension très important qui compare les accélérations du fluide à celles induites par le frottement dû à la viscosité.

En discutant de la mécanique des corps rigides, on s'est intéressé à des blocs de matière indéformable. Par expérience, on sait que si les forces appliquées ne sont pas trop fortes, le corps se déforme juste un peu (en fait très peu) et que si on supprime la force, il reprend sa forme initiale : dans ce régime dit élastique, le corps a une mémoire de sa forme. On peut dire que les atomes ne s'écartent pas beaucoup les uns des autres à cause de l'organisation en réseau cristallin très ordonné qui prévaut aux échelles atomiques (voir § 5.5). Par contraste, un fluide n'a aucune mémoire de sa forme qui s'adapte en permanence aux frontières du bol le contenant. Une définition opérationnelle d'un fluide est alors la suivante :

« Sous l'effet d'une force de cisaillement même très faible, un fluide se met nécessairement en mouvement se déformant continuellement tant qu'il est sous l'action de cette force de cisaillement : il y a écoulement. »

Considérons un petit bloc de fluide (isolé par la frontière fictive en pointillé) à l'intérieur d'un volume de fluide plus grand :

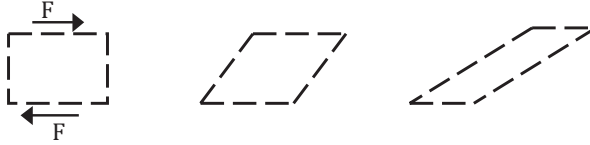


Figure 9.2

Les forces de cisaillement \mathbf{F} sont des forces tangentielles, parallèles aux surfaces délimitant le volume de contrôle. Notez que les deux forces sont opposées pour ne pas créer une nette accélération de l'ensemble du bloc vers la droite (ou vers la gauche). Sous l'effet de ce couple, le bloc de fluide se déforme sous la force la plus minime. Par ailleurs, la masse du bloc de fluide que l'on suit doit être conservée. Si la masse volumique ρ est constante, cela veut dire que le volume du fluide marqué est conservé. Si on suppose que le bloc est infini dans la direction perpendiculaire à la page, cela implique que la surface du dessin ci-dessus est conservée au cours de la déformation et c'est ce que l'on a essayé de représenter aux instants successifs sur la figure 9.2.

Si on continue la comparaison entre la mécanique d'un bloc solide et d'un bloc fluide, on sait que le mouvement du solide rigide s'analyse par la translation de son centre de masse et des rotations autour de trois axes passant par ce centre de masse, soit six équations d'évolution au maximum pour ces six variables (trois translations et trois rotations). Maintenant pour analyser le même bloc de fluide, il faut analyser le mouvement de chaque particule de fluide qui le compose, *a priori* un nombre infini de variables de type vitesse. On peut essayer de réduire ce nombre par une discussion sur la taille minimale d'une particule fluide que l'on appellera λ . Alors pour un bloc fluide de taille L , il faut suivre le mouvement de $(L/\lambda)^3$ particules et donc $6(L/\lambda)^3$ variables pour les trois composantes de position et de vitesse. On verra plus loin que d'autres variables sont encore nécessaires pour déterminer le comportement du bloc de fluide comme la pression, la masse volumique ou encore la température.

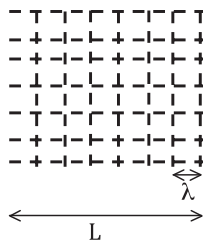


Figure 9.3

La question est : quelle valeur faut-il choisir pour λ ?

Faut-il descendre à l'échelle moléculaire et suivre chaque molécule de fluide ? Une expérience permet de répondre : quand on mesure la vitesse dans un flux d'air laminaire avec une petite hélice et un compte-tours, on observe que la vitesse moyenne à l'échelle du capteur n'est pas erratique : elle est stable et représente de fait une moyenne sur les vitesses de milliards de molécules qui percutent l'hélice sur un petit intervalle de temps. Cette expérience montre donc que l'on peut choisir $\lambda \gg 10^{-8}$ m (la distance intermoléculaire). Mais jusqu'où peut-on aller ? C'est une question très difficile à laquelle Kolmogorov en 1941 dans sa théorie de la turbulence a répondu en montrant que λ dépend de l'écoulement. On va adopter dans cette introduction une position minimaliste et dire que λ doit être petit devant l'échelle de l'écoulement qui nous intéresse, l'échelle L du tableau 9.1, soit $\lambda/L \ll 1$. Imaginons que l'on prenne $L/\lambda = 100$, alors le nombre de particules à suivre est $(100)^3$ et le nombre de composantes de la position et vitesse de ces particules est $6 \cdot 10^6$. Pour calculer les seules vitesses, il faudra déjà résoudre 3×10^6 équations couplées traduisant l'application de la 2^e loi de Newton à chacune des particules marquées, ce qui illustre la difficulté glaciale de la voie numérique.

Le volume de la particule fluide élémentaire $\delta V = \lambda^3$ ayant été défini, on peut déduire la masse volumique comme $\rho = \delta M / \delta V$ où δM est la masse contenue dans le volume δV . De façon similaire, on définit le vecteur vitesse \mathbf{U} au point \mathbf{x} d'un fluide à un instant donné t . Ces vitesses et la masse volumique seront supposées être des fonctions continues et dérivables de la position et du temps. La mécanique des fluides est aussi appelée mécanique des milieux continus en référence à cette hypothèse. La notion mathématique associée à la continuité et à la dérivation implique de faire tendre le petit volume de la particule δV vers zéro. Mais physiquement on vient de voir que l'on ne peut pas faire cela, car on se retrouve dans le domaine moléculaire. L'idée sous-jacente est que les prédictions faites sous ces hypothèses de continuité doivent être confrontées avec succès aux observations. Pour autant peut-on négliger totalement les mouvements moléculaires présents sous l'échelle λ ?



Figure 9.4

Allure de la tache de colorant à trois instants.

On peut faire par la pensée l'expérience suivante : on colore un petit volume de fluide au repos à $t = 0$. Même si la vitesse macroscopique telle que précédemment définie est nulle et reste nulle, il est observé une diffusion du colorant lente, inexorable jusqu'au moment où la couleur sera uniforme (et pâlie bien sûr) dans tout le volume disponible. Cet effet diffusif est causé par la nature moléculaire de la matière. Dans l'état final, les molécules de colorant se répartissent uniformément par marches aléatoires entre leurs voisines non colorées. Cet effet moléculaire peut

être représenté par un opérateur de diffusion dont l'intensité sera gouvernée par les vitesses moléculaires et les distances moyennes entre molécules (le libre parcours moyen). Il sera nécessaire de l'inclure si on veut que la solution des équations de cette Mécanique des fluides représente le comportement des fluides réels. On peut rappeler que les mathématiciens du XIX^e siècle avaient démontré l'impossibilité du vol d'un avion par la théorie de l'écoulement potentiel qui ignore justement ces effets moléculaires.

9.2 Les forces dans un fluide

Après avoir défini les vitesses et la masse volumique, il faut identifier les forces en présence, le poids bien sûr mais également des forces locales de contact mécanique entre particules s'exerçant à la frontière délimitant le volume de la particule fluide. Considérons un petit volume élémentaire de fluide δV au sens défini plus haut pour définir ces deux types de forces :

Les forces de volume

Dans un champ de gravité, le poids W du volume de fluide s'écrit :

$$W = \rho \delta V g \quad 9-1$$

avec ρ la masse volumique. Ce sont des forces qui agissent à distance et qui sont proportionnelles au volume.

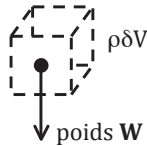


Figure 9.5

Les forces de surface

Ce sont les forces de contact mécanique fluide-fluide ou fluide-solide exercées par un bloc de fluide sur un autre bloc adjacents au premier. L'expérience suivante aide à en comprendre la nature.

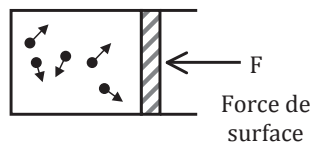


Figure 9.6

Des molécules s'agitent dans la chambre du piston à gauche. Elles cognent la surface (hachurée) du piston. Une balle qui rebondit perpendiculairement sur un mur voit sa quantité de mouvement mv devenir $-mv$ après réflexion. Ce faisant, elle a exercé une impulsion sur le mur qui est juste $2mv$ et la force moyenne est juste cette impulsion divisée par le temps moyen de collision. On peut imaginer la même chose pour les molécules qui rentrent en collision avec le piston. Pour maintenir le piston (qui coulisse sans frottements), il faut donc exercer une force F qui équilibre ces forces dues aux impacts moléculaires de l'autre côté de la paroi du piston. Si on double la surface du piston, le fluide étant dans le même état (masse volumique, température), on s'aperçoit que la force F double et donc que la force est proportionnelle à la surface A . En conséquence, on définit la pression comme :

$$p = F/A$$

La notion de pression introduit la force mécanique normale à une surface de contact entre deux volumes de fluide et donc ceci doit être complété en ajoutant que la force correspondante est normale à la surface du piston. La situation est la suivante :



Figure 9.7

Le vecteur \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à la surface δA et \mathbf{F} la force exercée par le fluide situé à droite (vers lequel \mathbf{n} pointe) sur le fluide à gauche. La force de pression est alors donnée par :

$$\mathbf{F} = -p \mathbf{n} \delta A \quad 9-2$$

Les unités de pression sont le pascal, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2}$ et son multiple le bar, $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.

Évidemment la 3^e loi de Newton reste toujours valable et la force exercée par le fluide à gauche sur le fluide à droite est juste $-\mathbf{F}$. Mais pourquoi y a-t-il un signe $-$ dans 9-2 ? Parce qu'un fluide ne peut subir que des compressions, c'est-à-dire des forces dirigées vers l'intérieur du volume considéré : les tensions sont interdites. En conséquence, on met un signe $-$ et la pression p est positive. Mais la valeur de p dépend-elle de l'orientation \mathbf{n} de la surface dans 9-2 ?

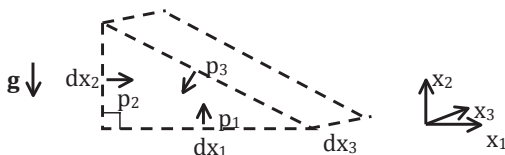


Figure 9.8

Pour répondre à cette question, on considère un volume de contrôle sous forme de prisme triangulaire élémentaire. Supposons que sous l'effet de ces forces, le prisme accélère avec une accélération $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$. La 2^e loi s'écrit dans la direction 2 verticale :

$$\rho \delta V a_2 = -\rho \delta V g + p_1 dx_1 dx_3 - p_3 \cos \alpha d/dx_3$$

où $d/d = (dx_1^2 + dx_2^2)^{1/2}$, $\delta V = \frac{1}{2} dx_1 dx_2 dx_3$ et α est l'angle entre la normale à l'hypoténuse et la direction x_2 .

Dans la direction 1 : $\rho \delta V a_1 = p_2 dx_2 dx_3 - p_3 \sin \alpha d/dx_3$

Mais comme $dx_2 = \sin \alpha d/d$ et $dx_1 = \cos \alpha d/d$

les deux équations se réécrivent :

$$\begin{cases} p_1 - p_3 = \frac{1}{2} \rho dx_1 (a_2 + g) \\ p_2 - p_3 = \frac{1}{2} \rho dx_2 a_1 \end{cases}$$

Si maintenant on fait tendre la taille du prisme vers 0 (dx_1 , dx_2 et $dx_3 \rightarrow 0$) tout en gardant sa forme ($\alpha = \text{constant}$) et que les accélérations restent finies, alors nécessairement :

$$p_1 = p_2 = p_3$$

Ce résultat garantit que la pression s'exerce de la même façon dans toutes les directions et qu'elle est donc indépendante de l'orientation \mathbf{n} de la surface de contact. Cela vient du fait que les forces de pressions varient comme dx^2 alors que masse \times accélération varie comme dx^3 et ces dernières sont donc d'un ordre de grandeur plus faible lorsque $dx \rightarrow 0$. Ce type d'argument avec passage à la limite est central en Mécanique des milieux continus.

La définition du fluide de la figure 9.2 faisait intervenir des forces tangentielles à cette surface de contact. L'origine de ces forces tangentielles dépend du mouvement relatif de couches de fluides de vitesses différentes.

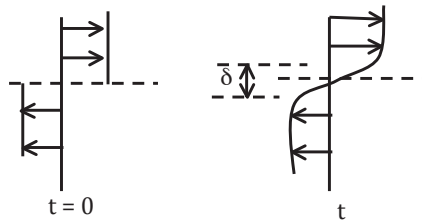


Figure 9.9

Imaginons une couche de fluide allant à la vitesse U vers la droite au-dessus d'une couche de fluide allant à la vitesse $-U$ vers la gauche. On observe au cours du temps que le saut de vitesse se lisse. L'effet est assez facile à comprendre si on repense

aux mouvements moléculaires sous-jacents. Quand une molécule rapide du haut se retrouve en bas, elle va transmettre sa quantité de mouvement à des molécules plus lentes et inversement ces dernières vont ralentir la couche du haut. L'effet est diffusif exactement comme pour le colorant de la figure 9.4. Comme il s'agit de quantité de mouvement échangée, tout se passe comme si le fluide du dessus exerçait une force tangentielle sur le fluide du dessous (le pointillé est la surface de contact). Cette force dépend certainement de la différence des vitesses entre les deux couches mais on conçoit qu'elle dépende aussi de l'épaisseur δ de la couche de transition entre les deux valeurs de la vitesse. Si δ est petit, une molécule traverse aisément du dessus au dessous alors que si δ est grand, la distance à parcourir nécessite plus de temps pour que la molécule rapide transfère sa quantité de mouvement à la couche du dessous. Le transfert ne sera pas aussi efficace car la molécule rapide aura subi beaucoup de collisions avec les molécules de la zone de transition. On s'aperçoit que la quantité naturelle dont dépend la force tangentielle est la dérivée de la vitesse, dérivée par rapport à la coordonnée y dont l'axe est perpendiculaire à la vitesse. Cette dérivée dU/dy définit ce qui est appelé le cisaillement de vitesse.

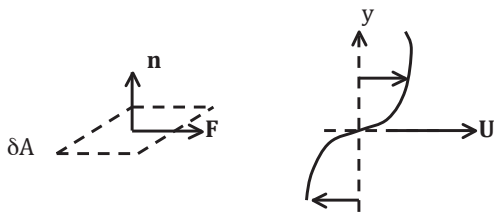


Figure 9.10

En définitive, la force \mathbf{F} tangentielle exercée par le fluide du dessus sur le fluide du dessous (et $-\mathbf{F}$ celle exercée par le fluide du dessous sur le fluide du dessus) a une intensité donnée par :

$$\frac{F}{\delta A} = \mu \frac{dU}{dy} \tag{9-3}$$

Une expression donnée par Newton dans ses *Principia* où μ est le coefficient de viscosité, une caractéristique du fluide qui mesure l'efficacité du transfert moléculaire de quantité de mouvement. La valeur de μ est déterminée expérimentalement pour chaque fluide :

Tableau 9.2

À 10 °C	ρ (kg m ⁻³)	μ (kg m ⁻¹ s ⁻¹)	$\nu = (\mu/\rho)$ m ² s ⁻¹
air	1,25	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$1,36 \cdot 10^{-5}$
eau	10^3	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$

Dans le tableau 9.2 est également mentionnée la viscosité cinématique $\nu = (\mu/\rho)$, qui a les dimensions d'un coefficient de diffusion (diffusion de vitesse) et qui sera la quantité importante en pratique.

9.3 Statique des fluides

Outre le grand nombre de particules à suivre, une autre difficulté de la mécanique des fluides réside dans le fait que des forces s'exercent sur des surfaces quand d'autres comme le poids s'exercent sur des volumes. On peut aborder cette difficulté en considérant tout d'abord le cas particulier des fluides au repos et découvrir la loi de l'hydrostatique.

Considérons de l'eau au repos dans un bocal.

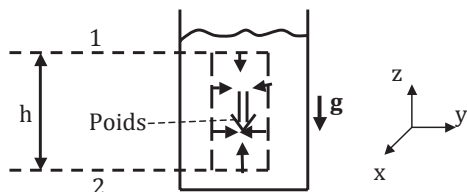


Figure 9.11

Choisissons un volume sous la forme d'un cylindre arbitraire de section δA , de hauteur h dont les génératrices sont parallèles à \mathbf{g} . On a dessiné les forces de surface toutes perpendiculaires aux surfaces du cylindre. Pourquoi ? Parce que l'on sait que si l'on met des forces tangentiels, le fluide va s'écouler. Or, par hypothèse, il est au repos. Quelles sont les forces exercées sur le volume ($\delta A \times h$) du cylindre ? Le poids et ces forces de pression de contact. On va supposer que ρ est constant (ce qui est une très bonne approximation pour l'eau) et en statique on exige évidemment que la somme des forces soit nulle, soit pour la composante verticale des forces selon Oz :

$$- p_1 \delta A + p_2 \delta A - \rho \delta A h g = 0$$

et :

$$p_2 = p_1 + \rho g h \quad 9-4$$

Considérons maintenant ce qui se passe dans le plan horizontal xy :

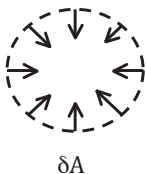


Figure 9.12

On voit que compte tenu de la symétrie par rapport au centre du cercle, la pression doit être uniforme sur la surface de contrôle afin que la résultante des forces radiales soit nulle.

La loi de l'hydrostatique pour un fluide au repos en résulte :

- 1) La pression augmente linéairement avec la profondeur.
- 2) La pression est constante dans un plan horizontal.

La pression atmosphérique

On découvre la pression atmosphérique en faisant l'expérience suivante :

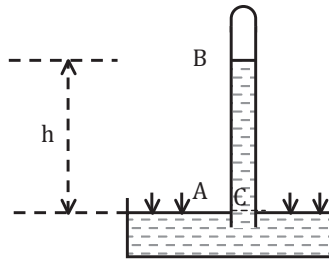


Figure 9.13

On prend un tube d'environ 1 m rempli de mercure et on place l'extrémité ouverte sur un récipient lui aussi rempli de mercure. Aussi bizarre que cela paraisse, le mercure ne s'écoule pas du tube dans le récipient. Il s'écoule un peu mais pas beaucoup et se stabilise dans la configuration dessinée sur la figure 9.13. Quand plus rien ne bouge, c'est un problème de statique. L'extrémité du tube au-dessus de B est *a priori* vide, donc la pression en B doit être nulle. La colonne BC étant à l'équilibre, on a :

$$p_C = p_s + \rho g h$$

où ρ est la masse volumique du mercure et p_s la pression dans le vide au-dessus de B. Comme on le sait, « la nature a horreur du vide » et des molécules de mercure passent de la phase liquide à la phase gazeuse et p_s est la pression de vapeur dite saturante, qui s'établit au-dessus de B. Maintenant, sur la surface horizontale, la pression en A à l'extérieur du tube est égale à la pression en C à l'intérieur du tube (la règle 2 de l'hydrostatique). L'origine de la pression en A est forcément liée à l'existence d'un air pesant au-dessus du baromètre, c'est-à-dire de la présence d'une atmosphère et on a ainsi :

$$p_{ATM} = \rho g h$$

où p_{ATM} est la pression atmosphérique (on a pris ici $p_s = 0$). Avec $\rho \sim 13,4 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $h = 760 \text{ mm}$ et $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$:

$$p_{ATM} \sim 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$$

Le bar est donc la valeur typique de la pression atmosphérique. Si on fait la même expérience avec de l'eau, $h = 10$ m d'eau, car l'augmentation de pression est à peu près $10^3 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$ Pa = 1 bar.

Mais la pression atmosphérique provient du même équilibre hydrostatique dans la colonne d'air au-dessus du baromètre. Au-dessus d'un point donné, le poids d'une colonne d'air qui monte à une centaine de kilomètres est équilibré par la pression au sol. À ceci près que la masse volumique de l'atmosphère n'est pas constante et diminue rapidement sur la verticale. Il faut alors remplacer la relation ci-dessus par :

$$P_{ATM} = \int_{z=0}^{z=100 \text{ km}} \rho g \, dz$$

Le point remarquable est que la relation hydrostatique reste vraie pour une atmosphère en mouvement tant que les phénomènes sont de grande échelle horizontale par rapport à la profondeur du fluide, ce qui est le cas pour les structures énergétiques des événements météorologiques ou océaniques. La profondeur de l'atmosphère à considérer pour les dépressions de 1 000 km de diamètre qui balaient l'Europe de l'Ouest en hiver est la troposphère dont l'épaisseur est de l'ordre de 15-20 km. On en déduit qu'une pression basse (haute) sur les cartes de prévision des journaux correspond à une distribution de la masse volumique faible (élevée) et donc à une distribution de température haute (basse) au-dessus du point considéré. En météorologie, on veut savoir comment p varie dans le temps et dans l'espace car des variations de pression sur l'horizontale vont naître les accélérations et donc les vents.

Les corps flottants

Comme on l'aura remarqué, on flotte dans l'eau, on ne sent plus son poids : tout se passe donc comme si la gravité avait disparu. Comment est-ce possible ?

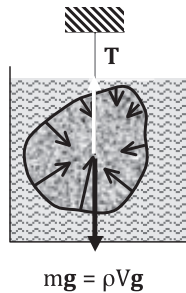


Figure 9.14

Imaginons un sac de plastique de masse négligeable rempli d'eau que l'on immerge dans une piscine : il est alors en équilibre hydrostatique. Quelles sont les forces appliquées sur ce sac ? Le poids bien sûr, ρVg où V est le volume d'eau contenu dans le sac et les forces de pression normales avec la pression p qui augmente linéairement avec la profondeur (règle 1 de l'hydrostatique). Les pressions étant plus élevées en bas, la force nette intégrée sur la surface du sac est dirigée vers le haut. Cette force est ce qu'on appelle la force d'Archimède. On se dit que cela doit être assez difficile à calculer car il faut faire une intégrale sur la surface de forces normales à la surface élémentaire avec p qui varie linéairement sur la verticale ; on peut s'éviter ce calcul très simplement : comme le sac est en équilibre hydrostatique, cette intégrale n'est pas autre chose que le poids de l'eau dans le sac ρVg . Maintenant remplaçons ce sac d'eau par une pierre qui ait exactement la même forme que le sac et maintenons-la par un fil qui passe par le centre de masse. Clairement les pressions exercées par l'eau sur la pierre sont exactement les mêmes que celles exercées sur le sac d'eau. On conclut :

« Un fluide au repos exerce sur un corps immergé une force de flottabilité (la force d'Archimède) dirigée vers le haut qui est égale au poids du volume de fluide déplacé par le corps. »

Avec T la tension du fil, l'équilibre de la pierre (dans la direction z vers le haut) est alors :

$$T + \rho Vg - \rho_{\text{pierre}} Vg = 0$$

ou

$$T = (\rho_{\text{pierre}} - \rho) Vg$$

Si on coupe le fil, évidemment la pierre accélère vers le bas et tombe au fond. L'équilibre au fond se fait avec la réaction normale N du fond de la piscine sur la pierre qui est égale à la tension du fil. Finalement tout se passe comme si le poids apparent d'un corps de masse volumique arbitraire ρ^* plongé dans un fluide de masse volumique ρ était $(\rho^* - \rho) Vg$. Si $\rho^* > \rho$, la force est dirigée vers le bas. Si $\rho^* = \rho$ (le sac d'eau), on s'est effectivement débarrassé de la gravité et si $\rho^* < \rho$, la force de gravité est vers le haut. En 1783, les frères Montgolfier construisent un premier ballon rempli d'air chaud qui atteint une altitude de 2 km. En 1804, la pression, la température et l'humidité sont observées par Gay-Lussac en fonction de l'altitude grâce à un ballon qui atteint 8 km et les ballons-sondes font partie aujourd'hui des observations de routine de l'atmosphère.

L'application majeure des forces de flottabilité concerne les bateaux dont on n'a aucune envie qu'ils finissent comme la pierre au fond de l'eau.

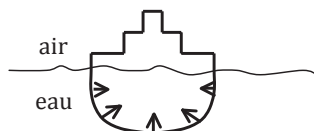


Figure 9.15

Le bateau de la figure 9.15 est en équilibre sous l'effet de son poids et de la force de pression sur le volume immergé de la coque. Il y a aussi la force de pression due à l'air sur la partie émergée qui augmente d'autant la pression dans l'eau : le corps étant en équipression vis-à-vis de la pression atmosphérique, celle-ci ne joue aucun rôle. En équilibrant poids et force de pression dans l'eau :

$$\text{Poids} = \rho V_i g$$

où V_i est le volume immergé de la carène. On appelle déplacement d'un bateau la masse d'eau déplacée ρV_i qui est donc aussi égale à sa propre masse. Imaginons le bateau à sec et l'eau montant le long du bord. Le bateau va flotter quand le volume immergé sera suffisant pour accommoder ce déplacement. Bien entendu, des vagues vont perturber cet équilibre et il faudra examiner la stabilité de l'équilibre.

9.4 Dynamique des fluides

On ne va pas dériver formellement dans cette introduction les équations de la mécanique des fluides dites de Navier-Stokes, mais on en verra des exemples simples. Il y a par ailleurs un certain nombre de lois intégrales qui permettent de dire pas mal de choses, une approche diagnostique que l'on développe ici pour un fluide dit incompressible. Une brève incursion dans le domaine compressible sera faite pour les ondes acoustiques au § 9.5.5.3.

9.4.1 Les forces de pression

Pour traduire la 2^e loi de Newton pour un petit volume de fluide, il faut écrire que les forces sur un élément de volume élémentaire δV sont égales à la masse de l'élément de volume, $\rho \delta V$ fois son accélération \mathbf{a} . Pour le poids c'est facile, simplement $\rho \delta V \mathbf{g}$. En revanche, c'est moins direct pour les forces de surface.

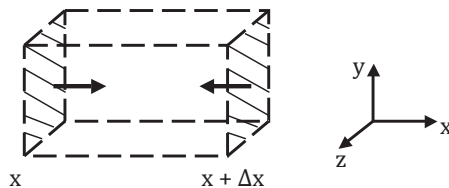


Figure 9.16

Considérons d'abord les forces de pression sur un petit parallélépipède de taille Δx , Δy et Δz et commençons par regarder dans la direction x . La force de pression est $p(x) \Delta y \Delta z$ au point x et $p(x + \Delta x) \Delta y \Delta z$ en $x + \Delta x$. Si $p(x + \Delta x)$ est différent de

$p(x)$, il apparaît ainsi une force nette dans la direction x s'appliquant sur le volume $\Delta x \Delta y \Delta z$:

$$[p(x) - p(x + \Delta x)] \Delta y \Delta z$$

En faisant un développement limité de Taylor de $p(x + \Delta x)$ à l'ordre 1 :

$$p(x + \Delta x) = p(x) + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x$$

Donc si le volume $\Delta x \Delta y \Delta z$ est infinitésimal, la force nette est :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z = -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta V$$

Ainsi la force par unité de volume dans la direction x est : $-\frac{\partial p}{\partial x}$.

On utilise la notation de dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x}$ (plutôt que $\frac{d}{dx}$) car p est aussi fonction de y, z , voire de t et là on doit dériver juste par rapport à x en gardant constantes les autres variables y, z et t . La même opération peut être faite dans les deux autres directions et la force nette par unité de volume s'écrit vectoriellement :

$$-\nabla p \quad 9-5$$

où $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ est l'opérateur vectoriel gradient. Ainsi pour mettre un fluide en mouvement, il faut un gradient de pression et cette force de volume pointe dans la direction opposée au gradient c'est-à-dire des hautes vers les basses pressions. Imaginons le champ de pression illustré par les contours $p = \text{constant}$ (appelés isobares) dans le plan de la page avec $p_0 < p_1$.

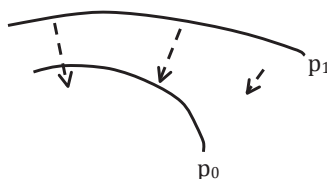


Figure 9.17

La force est perpendiculaire aux contours et dirigée des hautes pressions vers les basses pressions. Sur le dessin ci-dessus, le fluide va accélérer vers les basses pressions selon les flèches. Les flèches sont plus petites (grandes) quand les isobares sont plus espacées (serrées).

9.4.2 Les forces visqueuses

Considérons maintenant les forces tangentielles liées à la viscosité du fluide avec le même volume de contrôle que sur la figure 9.16 :

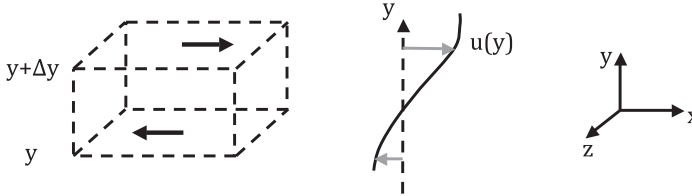


Figure 9.18

Supposons pour simplifier que l'écoulement u soit dans la direction x et ne dépende que de y , la somme des forces tangentielles appliquées aux surfaces $\Delta x \Delta y$ aux niveaux y et $y + \Delta y$ dans la direction x est alors :

$$[F(y + \Delta y) - F(y)] \Delta x \Delta z$$

Mais d'après 9-3 :

$$F(y) = \mu \frac{du}{dy}$$

Avec un développement limité au premier ordre :

$$F(y + \Delta y) = F(y) + \frac{dF}{dy} \Delta y$$

Quand le volume $\Delta x \Delta y \Delta z$ devient infinitésimal :

$$[F(y + \Delta y) - F(y)] \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{dF}{dy} \Delta x \Delta y \Delta z = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \Delta V$$

et la force par unité de volume devient :

$$\frac{dF}{dy} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \quad 9-6$$

Pour que de telles forces visqueuses changent l'accélération, la dérivée seconde de u doit être non nulle. L'apparition de ces dérivées secondes dans les équations du mouvement complique sévèrement la recherche de solutions analytiques et la question se pose de savoir si on a réellement besoin de ces forces visqueuses. Un ordre de grandeur aide à y voir plus clair lorsque le flot d'échelle U varie sur l'échelle L . Une échelle de temps T naturelle est $T = L/U$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Masse} \times \text{Accélération} &\sim \rho \delta V \times \frac{U}{T} \\ \text{Force visqueuse} &\sim \mu \times \frac{U}{L^2} \delta V \end{aligned}$$

et

$$\frac{\text{Masse} \times \text{accélération}}{\text{Force visqueuse}} = O\left(\frac{L^2}{T \mu/\rho}\right)$$

$\mu/\rho = \nu$ est ce qu'on appelle la viscosité cinématique (voir tableau 2), de sorte que :

$$\frac{L^2}{T \mu/\rho} = \frac{UL}{\nu} = \text{Nombre de Reynolds}$$

Compte tenu des faibles valeurs de ν (tableau 9.2), beaucoup des écoulements du tableau 9.1 ont un nombre de Reynolds très grand, ce qui veut dire sur la base de cet argument rudimentaire que les forces de viscosité sont *a priori* négligeables. À l'inverse, cela veut dire que les forces de viscosité seront importantes si l'écoulement est lent et de petite échelle spatiale. Ce sera notamment le cas lorsque le fluide s'écoule au voisinage d'une paroi solide qui freine localement l'écoulement puisque la vitesse tangentielle est nulle à la paroi pour les fluides visqueux.

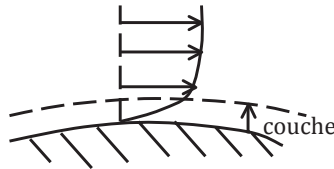


Figure 9.19

Les forces de viscosité sont négligeables dans l'intérieur, mais redeviennent importantes dans une couche limite mince collée à la paroi.

La mécanique des fluides non visqueux (on dit aussi fluide idéal) est très développée car elle est plus facile, mais la négligence totale des forces tangentielles crée des difficultés insurmontables lors de la comparaison avec les fluides réels : un avion ne pourrait pas voler dans un fluide idéal, le paradoxe de d'Alembert. Ainsi dire que la viscosité est nulle (nombre de Reynolds infini) ou dire que la viscosité tend vers zéro (nombre de Reynolds très grand) conduit à des conclusions opposées dans ce cas. Une approximation ne se justifie au final que par comparaison avec la réalité (une expérience).

9.4.3 La conservation de la masse

Si on prend une photographie de petites billes flottant dans un écoulement avec un certain temps de pose Δt , on va obtenir des petits segments qui donnent le déplacement des billes pendant Δt . On voit cela sur des photos de pluie prises à vitesse lente. Si on divise la longueur des segments par Δt et que l'on sait orienter le déplacement, on obtient une image instantanée du champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

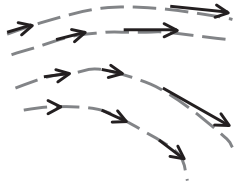


Figure 9.20

Si on reprend des photos successives et que les vitesses \mathbf{u} ne changent pas, on dit que l'écoulement est stationnaire ou permanent. Ce sera souvent le cas si l'écoulement est forcé de la même façon pendant une longue période, car à partir d'un moment il n'évolue plus. Plutôt que de regarder des petites flèches, on préfère visualiser les lignes tangentes à \mathbf{u} en tous points, appelées lignes de courant (en pointillé sur le dessin). Les lignes de courant donnent directement la direction de l'écoulement. Comme elles ne peuvent pas se couper, elles se serrent dans un tube convergent, ce qui indique une augmentation de la vitesse et s'élargissent dans un divergent indiquant un ralentissement. Notez qu'en général lignes de courant et trajectoires des particules diffèrent sauf si l'écoulement est permanent (voir exercices 16 et 17). Un champ de vitesse tel que 9-20 définit l'advection par le fluide : si on met un colorant dans ce champ, on dit que le champ de vitesse advecte le colorant.

Considérons maintenant un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur une petite surface δA . On appelle cela un tube de courant.

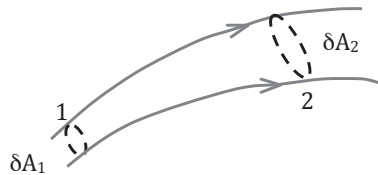


Figure 9.21

Considérons la masse qui rentre dans le tube de courant à la position 1 pendant le temps δt :

$$\text{Masse entrant en 1} \quad \rho_1 u_1 \delta t \delta A_1$$

$$\text{Masse sortant en 2} \quad \rho_2 u_2 \delta t \delta A_2$$

En effet $u_1 \delta t$ est le déplacement des particules qui rentrent dans le tube pendant δt . Maintenant la masse ne peut pas sortir par la surface latérale du tube puisque par définition le flot est tangent à cette surface ; si on suppose de plus que la masse

volumique du fluide dans le tube ne varie pas dans le temps, la conservation de la masse demande que ce qui rentre en 1 soit égal à ce qui sort en 2 :

$$\rho_1 u_1 \delta A_1 = \rho_2 u_2 \delta A_2 \qquad 9-7$$

Le débit (massique) $\rho u \delta A$, défini comme la masse qui traverse la surface δA par unité de temps, est alors un invariant du tube de courant : il est constant sur un tube constitué des mêmes lignes de courant.

La masse volumique est fonction de la pression, de la température et l'équation d'état du fluide relie toutes ces quantités à l'équilibre thermodynamique. Bien sûr un fluide en mouvement n'est pas à l'équilibre, mais la mise à l'équilibre thermodynamique d'un volume de fluide s'effectue sur un temps court par rapport aux échelles de temps de la dynamique, et l'équation d'état reste utilisable dans ce contexte. Le coefficient de compressibilité déjà rencontré indique comment le volume dépend de la pression. Il s'écrit en fonction de la masse volumique :

$$k = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho}{\Delta p}$$

La variation relative de masse volumique sous un changement de pression est donc :

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = k \Delta p$$

On verra un peu plus loin que les variations de pression dans un fluide en mouvement sont de l'ordre de ρU^2 pour des variations de vitesse U . Ainsi :

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \approx k \rho U^2 = \left(\frac{U}{c_{\text{SON}}} \right)^2$$

La dernière formulation utilise la vitesse du son $c_{\text{SON}} = (1/\rho k)^{1/2}$, ce qui permet de définir le nombre de Mach sans dimension $M_{\text{ACH}} = U/c_{\text{SON}}$ (voir § 9.5.5.3). Le tableau suivant permet alors d'estimer ces variations relatives de ρ pour des valeurs de U typiques.

Tableau 9.3

	Air : $U = 10 \text{ m s}^{-1}$, $p = 1 \text{ bar}$, $k \approx 1/p$	Eau : $U = 1 \text{ m s}^{-1}$, $k = 4,6 \cdot 10^{-10} \text{ pa}^{-1}$
c_{SON}	320 m s^{-1}	$1\,470 \text{ m s}^{-1}$
$\Delta \rho / \rho$	10^{-3}	$4,6 \cdot 10^{-7}$

On voit que pour ces écoulements typiques, les variations de masse volumique sont très faibles tant pour les liquides que pour l'air. L'approximation dite du fluide incompressible fait l'hypothèse que la masse volumique ne dépend pas de la pression. C'est une très bonne approximation pour les liquides sur une large gamme de vitesses. En revanche, en s'approchant de la vitesse du son, l'approximation devient

intenable pour l'air si U dépasse 100 m s^{-1} . À température constante, l'équation d'état du fluide incompressible se réduit donc à :

$$\rho = \text{constant}$$

Pour les écoulements incompressibles, l'invariant du tube de courant est alors le débit volumique $u\delta A$:

$$u\delta A = \text{constant} \quad 9-8$$

Cette dernière relation est souvent appelée relation de continuité. Elle prédit immédiatement que si les lignes de courant sont serrées (δA petit), l'écoulement est rapide (u grand) et inversement.

Imaginons maintenant un flot incompressible dans un tuyau de section variable.

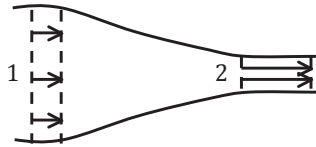


Figure 9.22

Le flot accélère par continuité lorsque la section diminue pour conserver le même débit en 1 et 2. Mais on a déjà vu que si un flot accélère, la pression diminue, donc la pression doit baisser en 2 lorsque la section diminue. Une remarquable relation, la relation de Bernoulli, permet de rendre cela quantitatif.

9.4.4 La relation de Bernoulli

On suppose le fluide idéal (non visqueux). Considérons le tube de courant suivant d'un écoulement stationnaire de masse volumique constante qui change de hauteur – il monte de z_1 à z_2 .

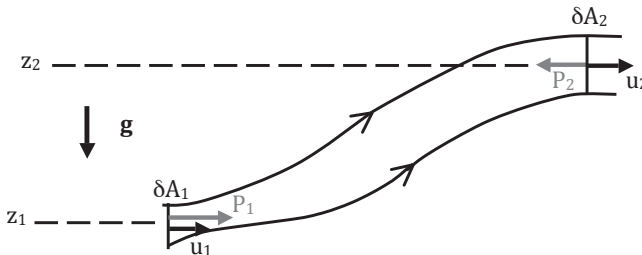


Figure 9.23

Les vitesses sont en noir et les forces de pression en gris sur le volume du tube entre les sections 1 et 2.

En l'absence de viscosité, les seules forces de surfaces sont les forces de pression. On va simplement appliquer le théorème de l'énergie cinétique, à savoir que le travail des forces pendant un certain intervalle de temps est égal à la variation de l'énergie cinétique. La variation d'énergie cinétique n'intervient qu'aux frontières du tube. En effet, l'écoulement étant permanent, l'énergie cinétique du fluide contenu dans le tube est constante. Pendant le temps δt , une masse Δm rentre par la section 1 et la même masse sort en 2. Comme on l'a vu :

$$\Delta m = \rho u_1 \Delta t \delta A_1 = \rho u_2 \Delta t \delta A_2$$

Le travail des forces de gravité correspond à déplacer cette masse Δm de z_1 en z_2 :

$$W_G = -\Delta m g (z_2 - z_1)$$

Sur la paroi latérale du tube, le travail des forces de pression est nul (puisque \mathbf{F} est perpendiculaire à \mathbf{u}). Aux frontières, le travail des forces de pression sur les sections 1 et 2 :

$$W_p = p_1 u_1 \Delta t \delta A_1 - p_2 u_2 \Delta t \delta A_2$$

Le signe $-$ apparaît en 2 puisque la force est opposée au déplacement sur la figure 9.23.

La variation d'énergie cinétique correspond juste à la différence entre l'énergie cinétique qui sort et celle qui rentre pendant le temps Δt :

$$\Delta E_C = \frac{1}{2} \Delta m u_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m u_1^2$$

En écrivant que $W_G + W_p = \Delta E_C$, on obtient :

$$\Delta V \left(\frac{1}{2} \rho u_2^2 - \frac{1}{2} \rho u_1^2 \right) = \Delta V \rho g (z_1 - z_2) + (p_1 - p_2) \Delta V$$

En simplifiant par ΔV , on obtient la relation de Bernoulli :

$$B = \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g z + p = \text{constant} \quad 9-9$$

La quantité B est un invariant du tube et traduit la conservation de l'énergie pour un fluide. Le premier terme est l'énergie cinétique par unité de volume, le deuxième est l'énergie potentielle par unité de volume et le troisième la pression qui joue le rôle d'une sorte d'énergie potentielle des forces de contact à l'échelle macroscopique. En effet, on peut dire que la force de pression par unité de volume $-\nabla p$ dérive d'un potentiel qui est justement p . Les forces de pression sont donc conservatives alors que les forces tangentielles liées à la viscosité, supposées négligeables ici, ne le sont pas. Ce sont elles qui sont responsables de la dissipation d'énergie dans un fluide et elles jouent un peu le même rôle que les forces de frottement entre surfaces solides.

Lorsque la section du tube tend vers zéro, le tube devient ligne de courant et on peut dire que B est constant sur une ligne de courant. Si on connaît B au point amont d'une ligne de courant, alors on connaît B en aval sur cette même ligne. Ainsi même si on ne connaît pas le détail de la ligne de courant, cette conservation de B permet

de déduire des éléments importants sur un écoulement. Les seules hypothèses sont que les forces visqueuses soient négligeables et que l'écoulement soit permanent (la vitesse ne dépend pas du temps) et pour que l'écoulement soit permanent, il suffit d'attendre que les effets transitoires aient disparu. Beaucoup d'écoulements naturels sont turbulents, la vitesse variant dans le temps de façon irrégulière, et on ne pourra pas y appliquer la relation 9-9. On qualifie d'écoulement laminaire un écoulement permanent bien structuré auquel 9-9 s'appliquera. Si on applique 9-9 (à z constant) dans le tuyau de la figure 9.22, la différence de pression amont-aval peut s'exprimer directement en fonction des vitesses :

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (V_2^2 - V_1^2) \quad 9-10$$

Mais la continuité dit aussi que $A_1 V_1 = A_2 V_2$, si bien que :

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho V_2^2 \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2} \right)$$

Un tube de Venturi est un tube qui possède un rétrécissement. La vitesse augmente et la pression chute dans le rétrécissement. En mesurant la différence de pression entre 1 et 2 comme sur la figure 9.22, cette formule permet de trouver la vitesse V_2 et donc le débit dans la canalisation par la formule ci-dessus.

La relation ci-dessus semble impliquer que la relation de Bernoulli est tout aussi valable dans un tuyau convergent que divergent. En fait, il n'en est rien... Tous les fluides réels sont visqueux et dans une couche limite attachée à la paroi, la vitesse tangentielle s'ajuste à zéro. Si cette couche limite reste attachée à la paroi, tout se passe bien, le flot reste laminaire et la relation de Bernoulli est valable dans presque tout le volume de fluide. La figure 9.24 montre à gauche un flot convergent lorsque la section diminue. Si on renverse le signe des vitesses, le flot est divergent.

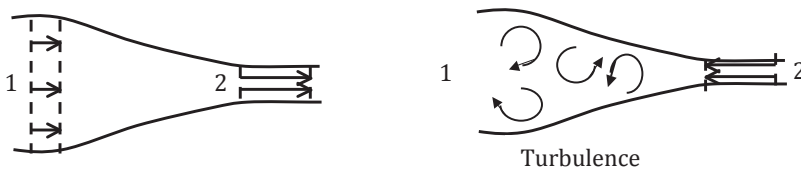


Figure 9.24

À gauche dans le convergent, les particules de fluide accélèrent des hautes vers les basses pressions en aval. On observe que le flot reste laminaire. À l'inverse, le flot de droite se déplace dans une direction où la pression augmente et le flot ralentit. La couche limite sur le bord du tube se sépare et les forts cisaillements présents dans la couche limite envahissent l'intérieur et la turbulence apparaît. Il y a donc une asymétrie complète dans la physique de l'écoulement. Si on veut prévenir l'apparition de turbulence, il faut se méfier des situations où le flot va contre la pression et donc bannir les divergents avec des élargissements de tuyau trop brutaux.

9.4.5 Forces aux frontières

Après avoir considéré la conservation de la masse et de l'énergie, penchons-nous sur les forces qui s'appliquent sur le fluide du convergent en régime permanent de la figure 9.25. Considérons le bloc de fluide compris entre les sections 1 et 2 avec un axe orienté dans la direction de l'écoulement. Ce bloc est soumis à la force $p_1 A_1$ en amont, à la force $-p_2 A_2$ en aval. En l'absence de viscosité, la réaction exercée par les parois sur le fluide est normale aux parois et possède donc une résultante \mathbf{R} qui va à l'encontre du flot. La deuxième loi de Newton indique que l'ensemble de ces forces induit une variation de la quantité de mouvement des particules qui composent le bloc de fluide. Pendant le temps Δt , ce bloc de fluide se déplace de $V_1 \Delta t$ en amont et de $V_2 \Delta t$ en aval. Il n'y a aucune variation de la quantité de mouvement de l'intérieur du bloc de fluide quand l'écoulement est permanent.

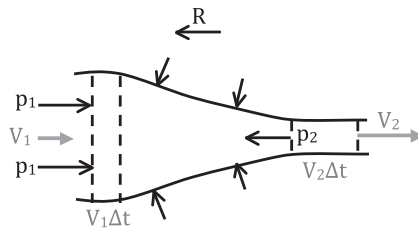


Figure 9.25

Les variations de quantité de mouvement sont exclusivement limitées à ce qui se passe aux frontières du bloc. Pendant le temps Δt , la figure 9.25 permet de voir que ce bloc de fluide augmente son volume à l'avant de $A_2 V_2 \Delta t$, augmente sa masse de $\Delta m = \rho A_2 V_2 \Delta t$ et augmente donc sa quantité de mouvement de $\Delta m V_2$. À l'arrière, le bloc perd le volume $A_1 V_1 \Delta t$, perd la masse $\Delta m = \rho A_1 V_1 \Delta t$ et perd la quantité de mouvement $\Delta m V_1$. Pendant le temps Δt , la deuxième loi de Newton s'écrit donc :

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 - R = \rho A_2 V_2^2 - \rho A_1 V_1^2 \quad 9-11$$

Dans le cas du tuyau convergent, la relation 9-10 s'applique et 9-11 permet alors de déduire la force R directement à partir des conditions amont en 1.

9.5 Applications

La mécanique des fluides s'applique dans des champs aussi divers que les écoulements autour d'obstacles, ailes d'avion, voiles ou coques de bateaux, que le flot du sang dans les artères et les veines, du pétrole dans les pipe-lines, qu'en géophysique, vagues, marées, circulation océanique et atmosphérique, noyau liquide de la Terre, sans oublier la musique ou les bulles de savon. La difficulté du sujet provient de ce que beaucoup de ces écoulements peuvent se retrouver dans un régime turbulent

(c'est-à-dire irrégulier, chaotique, difficilement prévisible) dont la complexité élude les approches théoriques sauf dans des cas particuliers. La turbulence d'un écoulement se caractérise par une richesse en échelles spatiales et temporelles et est une conséquence de deux instabilités fondamentales, celle des écoulements cisailés et celle des fluides chauffés par-dessous. Elle reste un des grands problèmes non résolus de la physique dont l'étude reste fondamentale pour la vie sur cette planète.

Ce paragraphe est simplement une ouverture à quelques-unes de ces situations dont beaucoup sont toujours le sujet de recherches actives tant expérimentales que numériques ou théoriques.

9.5.1 Applications de la relation de Bernoulli

En reliant pression, hauteur et vitesse, la relation de Bernoulli est un outil fantastique qui permet de produire beaucoup de résultats, (i) si l'écoulement est permanent et (ii) si les forces de viscosité sont négligeables. Comme ces forces sont toujours présentes au voisinage des parois, la relation de Bernoulli ne pourra être utilisée qu'à une distance respectueuse de ces dernières. Il faut réaliser aussi que la relation de Bernoulli n'est utile que si on a déjà une idée de l'écoulement. Elle n'est pas autre chose qu'un diagnostic qui permet de dire des choses sur la vitesse si la pression est connue ou sur la pression (et donc les forces) si la vitesse est connue. Sa beauté vient de sa nature intégrale : elle est valable sur une ligne de courant. Cette nature intégrale de la relation de Bernoulli permet des conclusions très puissantes sans avoir à calculer un champ de vitesse en tous points, une entreprise bien plus complexe. On n'a pas besoin de connaître le flot partout, il suffit juste de connaître les conditions aux limites (pression, hauteur, vitesse) à une extrémité de la ligne de courant et 9-9 assure que la quantité B reste constante sur cette ligne de courant. Dans tous les exemples qui suivent, la première chose à faire est de visualiser les lignes de courant, ces courbes tangentes au vecteur vitesse.

9.5.1.1 La formule de Torricelli

On veut connaître la vitesse du jet en sortie d'un bocal ci-dessous :

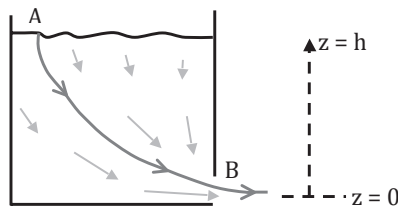


Figure 9.26

On a représenté quelques vecteurs vitesses plausibles sur la figure 9.26. La courbe continue qui part de la surface libre en A à la sortie en B est tangente à ces vecteurs vitesses. Quand l'écoulement est permanent, la relation de Bernoulli s'applique sur

cette ligne de courant hypothétique qui connecte la surface libre qui descend lentement au jet de sortie. La clé est qu'entrée et sortie se font à la pression atmosphérique. De plus si la surface dans le bocal est grande par rapport à l'aire de l'orifice de sortie, la conservation du débit indique que la vitesse en A est négligeable devant celle en B. Ainsi on peut dire que :

$$P_{\text{ATM}} + \rho g h = P_{\text{ATM}} + \frac{1}{2} \rho V^2$$

en A en B

et la vitesse en B est : $v = (2gh)^{1/2}$

où h est la profondeur de l'orifice de sortie par rapport à la surface libre du bocal. De façon assez remarquable, la vitesse de sortie est celle de la chute libre d'une hauteur h . En effet, il n'y a aucun travail net des forces de pression dans cet exemple. Si la vitesse en A est négligeable, le seul rôle des forces de pression est de changer la direction de la vitesse de sortie qui devient horizontale (quand l'orifice est sur le côté).

9.5.1.2 La portance des ailes

On pourrait se dire que les avions flottent dans l'air comme les bateaux dans l'eau à cause de la force d'Archimède, mais la masse volumique de l'air est si faible que l'effet n'est possible que pour les montgolfières qui combinent un grand volume de gaz plus léger que l'air environnant et un petit poids à transporter. Il est complètement négligeable pour les ailes d'avions et il faut chercher autre chose. On a longtemps cherché et il n'est pas faux de dire que les avions ont volé avant que la physique n'ait élucidé les principaux mécanismes. En 1878, Rayleigh étudia le flot sur un cylindre et montra que si le cylindre est en rotation autour de son axe, une force perpendiculaire à la direction du vent sur le cylindre tournant est produite, l'effet Magnus que l'on voit en pratique sur les courts de tennis lorsque le joueur frappe la balle en lui donnant une rotation. L'effet permet d'amplifier ou d'aplatir la courbure de la trajectoire parabolique selon le sens de rotation imparti (*lift* ou *slice*). L'existence de cette circulation (rotation) autour d'un obstacle est au cœur de l'explication de la portance des ailes, mais il fallut attendre Lanchester, Kutta et Joukowski dans la première moitié du ^{xx}e siècle pour qu'une théorie de la portance apparaisse où la circulation du flot autour de l'aile joue le rôle central. Sur la figure 9.27 ci-après, l'écoulement possède effectivement une circulation dans le sens des aiguilles d'une montre (le sens trigonométrique négatif) autour de l'aile et cette circulation accélère l'écoulement au-dessus de l'aile et le ralentit en dessous. Dans l'effet Magnus, c'est la rotation du cylindre ou de la balle qui crée la circulation dans le fluide. En revanche, l'origine de la circulation autour de l'aile est beaucoup plus subtile. Lorsque l'écoulement démarre sur l'aile fixe au repos, un écoulement se met en place. Mais le fluide négocie mal le virage autour du bord de fuite acéré et la couche limite visqueuse se sépare en aval éjectant dans le sillage un vortex qui tourne dans le sens positif. C'est ce *starting vortex* qui est à l'origine de la circulation. Il est en effet impossible de créer de la circulation dans un fluide à partir de rien, un résultat fondamental connu sous le nom de théorème de Kelvin. Ainsi sur un grand contour fluide qui englobe l'aile

et le starting vortex, il n'y a pas de circulation. Si un vortex de rotation positive se forme dans le sillage, doit alors apparaître autour de l'aile une circulation dans le sens opposé pour annuler la circulation sur le grand contour. Et l'effet de cette circulation est tout aussi remarquable : elle régularise le flot au bord de fuite de l'aile et permet de supprimer la séparation de la couche limite et donc l'apparition du *starting vortex*. Chaque fois que l'écoulement accélère, il génère un nouveau *starting vortex* qui modifie la circulation et régularise les vitesses au bord de fuite... Bien que le vortex de sillage provienne de la couche limite, le temps d'ajustement est rapide d'ordre l/U avec l la largeur de l'aile. Une photo de l'écoulement est montrée sur la figure 9.27.



Figure 9.27

Flot autour d'une aile avec incidence peu de temps après le démarrage. On voit encore la présence du *starting vortex* à l'arrière dans le sillage qui tourne dans le sens positif. Pour le contrebalancer, une circulation négative s'organise autour de l'aile. Source : Von Karman.

La figure 9.28 est le résultat d'un calcul du flot avec incidence autour d'une plaque plane avec circulation qui permet de comprendre l'origine de la force exercée par l'air sur l'aile.

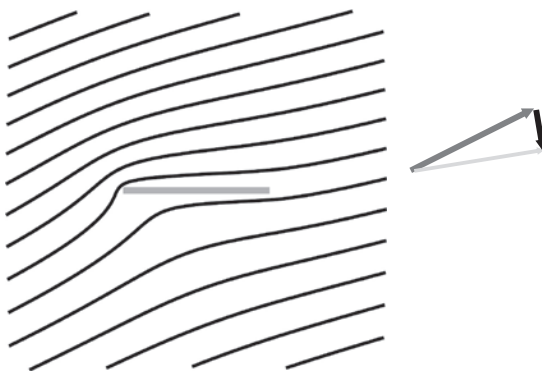


Figure 9.28

Une solution théorique donne les lignes de courant qui arrivent sur une plaque plane depuis la gauche sous une incidence de 20° . Sur le diagramme de droite les flèches grises indiquent la quantité de mouvement d'une particule d'air en amont et en aval de la plaque. La flèche noire indique alors la force nécessaire pour effectuer cette variation de quantité de mouvement. D'après : Lighthill.

Sur la figure 9.28, les lignes de courant d'un écoulement sont calculées autour d'une plaque plane. Il s'agit d'une solution théorique, mais l'écoulement autour d'une aile épaisse de la figure 9.27 ressemble beaucoup à celui de cette figure. Considérons les deux lignes de courant #1 passant au-dessus de la plaque et #2 au-dessous. Les deux partent de l'amont (à gauche) où les conditions de pression et de vitesse sont identiques. On va comparer les pressions et vitesses aux points A et B, juste au-dessus et juste au-dessous de la plaque. On écrit la relation de Bernoulli pour les deux lignes de courant :

$$\text{Pour 1 :} \quad p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 = p_A + \frac{1}{2} \rho U_A^2$$

$$\text{Pour 2 :} \quad p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho U_B^2$$

$$\text{soit :} \quad p_B - p_A = \frac{1}{2} \rho (U_A^2 - U_B^2)$$

Comme le flot en A est rapide (lignes de courant serrées) et lent en B (lignes de courant étalées), $p_B - p_A$ est positif et donc la force exercée par le fluide en mouvement sur la plaque est vers le haut. La « portance » de l'aile est donc due à cette vitesse du fluide plus importante au-dessus qu'au-dessous de la plaque.

On peut aussi voir la portance sous un autre angle en notant que l'effet de la plaque change la direction de la quantité de mouvement de l'air entrant sur la figure 9.28. La plaque crée cette force responsable de la variation de la quantité de mouvement des particules d'air qui voyagent dans l'écoulement. Inversement, l'air exerce une force égale et opposée sur la plaque en vertu de la troisième loi.

Note :

Il subsiste des explications tout à fait fausses de la portance d'une aile. La plus courante est de dire que comme une aile est plate en dessous et convexe au-dessus (arrondie), l'air a plus de distance à parcourir au-dessus qu'au-dessous de l'aile et il faudrait soi-disant que l'air du dessus et du dessous mettent le même temps pour atteindre le bord de fuite. La vitesse de l'air au-dessus est donc plus grande que celle de l'air au-dessous, ce qui implique la différence de pression et donc la portance. Deux éléments de réponse : certes les ailes d'avion ont cette courbure, mais elle n'est pas essentielle puisque la plaque plane de la figure 9.28 fait l'affaire. Le point central est d'avoir un angle d'incidence entre l'air et l'aile. La deuxième erreur est de dire que les temps de transit d'une particule d'air du bord d'attaque au bord de fuite au-dessus et au-dessous de l'aile sont identiques. Évidemment non, la vitesse au-dessus est plus grande et les particules du dessus atteignent le bord de fuite bien plus rapidement.

En pratique, on décompose la force sur une aile en deux composantes, une force perpendiculaire à l'écoulement en amont, **L** appelée portance et une force de traînée **D** dans la direction de l'écoulement qui freine l'aile.

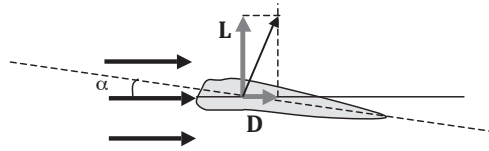


Figure 9.29

Une aile est placée dans un écoulement avec une incidence α . La force de l'air sur cette aile en noir est décomposée en portance L perpendiculaire à l'écoulement et traînée D dans la direction de l'écoulement. L'angle d'incidence α est l'angle entre la direction de l'écoulement amont et le profil de l'aile.

La traînée D est toujours dans le sens de l'écoulement. Elle est minimale si α est nul et maximale si α vaut 90° . La portance L est nulle si $\alpha = 0$ ou 90° et change de signe si α change de signe. Le maximum de portance est obtenu pour des angles α relativement faibles entre 5° et 20° , valeurs qui dépendent de la forme de l'aile. Les forces D et L proviennent de ce que la direction du flot d'air change le long de l'aile. Cette variation de la quantité de mouvement demande une force de réaction de l'aile sur le flot. La masse d'air qui interagit avec l'aile est de l'ordre de ρAU par unité de temps. L'air est dévié par l'angle α , de sorte que la variation de vitesse est de l'ordre de U . Ainsi la variation de la quantité de mouvement de l'air et donc la force est de l'ordre de ρAU^2 . On écrit ainsi :

$$L = \frac{1}{2} \rho U^2 C_L A$$

$$D = \frac{1}{2} \rho U^2 C_D A$$

avec U la vitesse de l'écoulement en amont, ρ la densité de l'air, A la surface de l'aile et C_L et C_D sont des coefficients sans dimension. De quoi peuvent-ils bien dépendre ? De trois facteurs, de l'angle d'incidence du flot, de la forme de l'aile et d'un autre nombre sans dimension important, le nombre de Reynolds, qui mesure le rapport entre accélération et force de viscosité. Il est possible de mesurer portance L et traînée D en soufflerie sur des modèles réduits. Pour obtenir C_L et C_D au moyen d'une expérience sur une aile de dimension réduite, il faut faire l'expérience avec la même incidence, la même forme et avec le même nombre de Reynolds ($= UL/\nu$) qu'en conditions réelles. Si on diminue la taille de l'aile par 10, il faut augmenter la vitesse de l'écoulement en soufflerie par 10, ce qui peut poser problème vis-à-vis de l'hypothèse incompressible (il faut rester en régime subsonique avec le nombre de $M_{ACH} \ll 1$). Les expériences de laboratoire sont donc fréquemment faites avec des nombres de Reynolds plus petits qu'en réalité. En simulation numérique ou en laboratoire, la bataille pour approcher les plus grands nombres de Reynolds des écoulements aérodynamiques est toujours d'actualité.

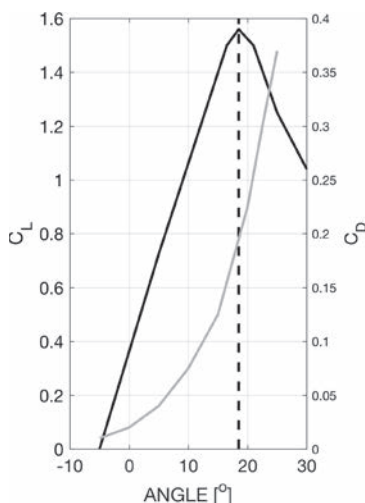


Figure 9.30

Les courbes donnent C_L (noir) avec l'axe de gauche, C_D (gris) avec l'axe de droite en fonction de l'angle d'incidence en degrés pour une aile de profil Clark (un profil asymétrique). Le maximum de portance est obtenu à un angle critique de $18,5^\circ$ (la ligne en pointillé) au-delà duquel l'aile décroche (*stall*).

La mesure de L et D permet de trouver les coefficients de portance C_L et de traînée C_D , coefficients qui dépendent de l'angle d'incidence α et de la géométrie (profil) de l'aile. La figure 9.30 illustre la dépendance avec l'angle d'incidence. Le coefficient de portance C_L augmente à peu près linéairement avec α jusqu'à une valeur de $18,5^\circ$. Au-delà la portance décroît fortement, la turbulence apparaît et on dit que l'aile décroche (*stall*). Lorsque l'angle d'incidence de l'aile est trop fort, les couches limites visqueuses ne restent plus attachées aux parois et envahissent le sillage qui devient turbulent (comme dans le cas du tuyau divergent) et la portance est fortement diminuée. L'aile fonctionne bien aux incidences modérées quand C_L est $O(1)$ et C_D est alors d'un ordre de grandeur plus faible.

9.5.1.3 Un anémomètre : le tube de Pitot

Pour qu'un pilote connaisse la vitesse de son avion ou pour mesurer la vitesse d'un écoulement, on utilise un tube de Pitot (la panne de ces sondes a eu des conséquences dramatiques sur le vol Rio-Paris du 1^{er} juin 2009).

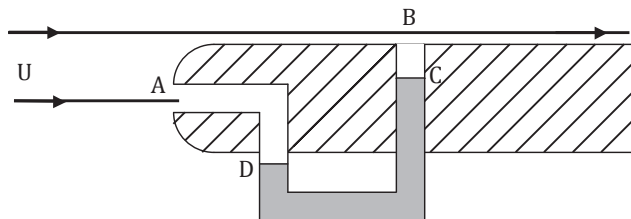


Figure 9.31

On peut déterminer la vitesse U d'un écoulement en mesurant la différence de pression dans un manomètre (un tube rempli d'huile par exemple) raccordé aux points A et B sur la figure 9.31. Si le tube de Pitot est assez petit, il modifie peu l'écoulement en amont. Puisque les lignes de courant sont rectilignes, la constante de Bernoulli sur toutes les lignes de courant est la même et on écrit l'égalité amont-aval :

$$p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U^2 = p + \frac{1}{2} \rho q^2.$$

En A, le flot s'arrête, donc $q = 0$, et donc :

$$p(A) = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U^2$$

En B, après une certaine distance, le flot est à nouveau rectiligne et possède donc une pression :

$$p(B) = p_{\infty}$$

puisque toutes les lignes de courant non perturbées possèdent cette propriété. On obtient alors :

$$p(A) - p(B) = \frac{1}{2} \rho U^2$$

La différence de niveau (hydrostatique) entre C et D est donc proportionnelle à la différence de pression entre A et B qui est égale à $\frac{1}{2} \rho U^2$ et permet donc de déterminer la vitesse U .

9.5.2 Écoulements visqueux de Couette et Poiseuille-Hagen

9.5.2.1 Le flot de Couette

Reprenons l'expérience de Newton pour déterminer la viscosité d'un fluide : une plaque horizontale se déplace à une vitesse U au-dessus d'une autre au repos. Que devient le fluide entre les deux ?

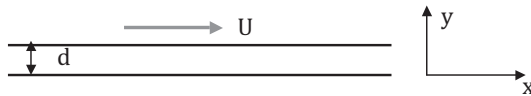


Figure 9.32

Si la viscosité du fluide est nulle, la plaque glisse sans frottement sur le fluide, il n'y a aucune façon de le mettre en mouvement et il reste au repos. Si la viscosité n'est pas nulle, les forces tangentielles vont pouvoir agir. Puisque la distance entre plaques est constante, la continuité 9-8 dit que la vitesse u ne dépend pas de x . Mais si c'est le cas, alors la pression n'en dépend pas non plus, car sinon il y aurait des accélérations

selon x . La pression ne varie donc que selon la direction verticale y pour équilibrer le poids, elle est donc hydrostatique et n'intervient pas dans la dynamique. On écrit alors la 2^e loi de Newton dans la direction x pour chaque particule de fluide de volume δV :

$$m \frac{\partial u}{\partial t} = F$$

Comme u est une fonction de y et de t , on utilise la notation de la dérivée partielle $\partial / \partial t$ qui précise que l'on dérive par rapport à t à y constant. Comme la force visqueuse est donnée par 9-6, on obtient :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ou en divisant par ρ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad 9-12$$

La vitesse entre les deux plaques est gouvernée par la célèbre équation de diffusion découverte par Fourier dans le domaine thermique. Lorsque l'effet de la plaque supérieure a eu tout le temps d'agir, le flot a atteint son régime permanent et donc :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Si la dérivée seconde est nulle, la vitesse est linéaire en y de la forme $u = C_1 y + C_2$. Pour trouver ces deux constantes, on se sert des conditions aux limites aux plaques. Le fluide colle à la paroi pour un fluide visqueux. En revanche si le fluide est idéal-non visqueux, le fluide glisse à la paroi sans qu'aucune force ne soit appliquée par la paroi. Ici on a donc les deux conditions aux limites $u(y=0) = 0$ et $u(y=d) = U$. On en déduit le flot de Couette le plus simple :

$$u = U \frac{y}{d}$$

Cette solution dit simplement que la force visqueuse est constante entre les deux plaques. Si elle ne l'était pas, des accélérations seraient toujours présentes. La question suivante est de savoir combien de temps cela prend pour atteindre ce régime permanent. On peut le savoir très simplement en écrivant les ordres de grandeur de l'équation de diffusion 9-10. Quand l'échelle de vitesse est U , l'échelle de longueur d et l'échelle de temps inconnue T_D , on écrit :

$$\frac{U}{T_D} = \nu \frac{U}{d^2}$$

et donc :

$$T_D = \frac{d^2}{\nu}$$

Le temps de mise en régime de ce flot est le temps de diffusion qui varie comme d^2 , très court si les plaques sont proches, beaucoup plus grand quand elles sont éloignées. Plus le fluide est visqueux et plus le temps de diffusion est petit.

9.5.2.2 Le flot de Poiseuille-Hagen

Ce deuxième exemple de flot visqueux fait intervenir les forces de pression. Il fut découvert à peu près en même temps par Poiseuille et Hagen. Hagen, en 1839, montra la relation linéaire qui existait entre le gradient de pression et le débit de l'eau dans des tubes en laiton. Poiseuille, en 1840, étudiait l'écoulement du sang dans les vaisseaux. Ceux-ci étant très fins, on s'attend effectivement à ce que les forces de viscosité jouent un rôle important et il choisit de faire des expériences avec des tubes capillaires de diamètre compris entre 15 et 600 microns. La différence avec l'exemple précédent est que le flot est maintenant forcé par une différence de pression amont-aval $\Delta p = p_1 - p_2$ (induite dans le cas du sang par la pompe cardiaque).

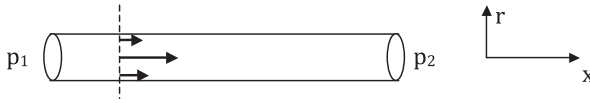


Figure 9.33

Le tube circulaire a une section constante de sorte que la continuité 9-8 demande que la vitesse u dans la direction x ne dépende pas de x . La force de pression par unité de volume 9-5 est donc constante dans le tube et égale à $\Delta p/L$. En régime permanent, elle est équilibrée par la force visqueuse 9-6 que l'on doit écrire en coordonnées cylindriques (x, r) comme :

$$-\frac{\Delta p}{L} = \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right)$$

Avec $k = -\Delta p/\mu L$, l'intégration donne :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= k \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} \\ u &= k \frac{r^2}{4} + C_1 \ln(r) + C_2 \end{aligned}$$

La solution u doit être bien sûr régulière en $r = 0$ et donc $C_1 = 0$, tandis que C_2 est obtenu en écrivant que le flot colle à la paroi du tube $u(r = a) = 0$. Le flot de Poiseuille-Hagen est donc :

$$u(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L} (a^2 - r^2) \quad 9-13$$

On peut alors relier le débit dans le tube à la différence de pression aux extrémités. Comme $2\pi r dr$ est l'élément de surface sur lequel agit la vitesse $u(r)$, le débit est :

$$D = \int_0^a u \, 2\pi r \, dr = \frac{\pi \Delta p}{8\mu L} a^4$$

La solution 9-13 est l'une des solutions exactes des équations de Navier-Stokes. Mais pour que cette solution stationnaire s'applique aux écoulements réels, encore faut-il qu'elle soit stable vis-à-vis des perturbations de l'écoulement. Cette question abordée par la théorie de la stabilité reste encore ouverte aujourd'hui. Pour les tubes fins, la stabilité est observée dans les expériences de laboratoire pour des nombres de Reynolds $Re = U(2a)/\nu$ variant de 1 500 à 10 000 selon l'amplitude des perturbations en entrée. Qu'en est-il pour des tubes de diamètre plus grand d'écoulement d'eau ou de pétrole dans des canalisations pour lesquelles Re est beaucoup plus grand ? C'est précisément cette question qui a été à l'origine des premières études quantitatives des flots turbulents par Reynolds en 1883 (voir § 9.5.4).

9.5.3 Écoulements atmosphériques

Sur la figure ci-après on observe les pressions au sol sur l'Atlantique nord et l'Europe le 30 janvier 2019. Ces pressions varient de façon significative. Au § 9.4.1, on voit qu'il en résulte une force horizontale de composantes $\left(-\frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{\partial p}{\partial y}\right)$ normale aux isobares et dirigées des hautes vers les basses pressions. Le vent va-t-il accélérer des hautes vers les basses pressions ?

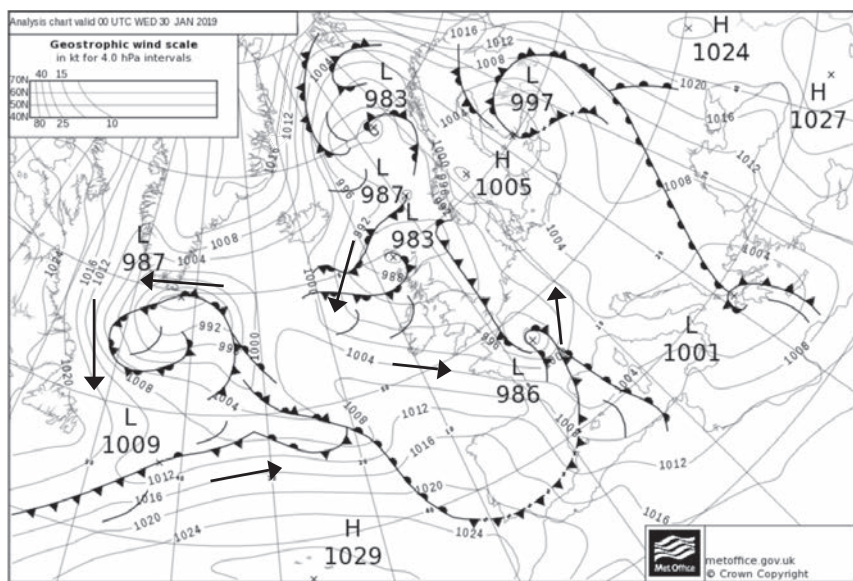


Figure 9.34

La pression au niveau de la mer le 30 janvier 2019 (tempête Gabrielle, le minimum de 986 hPa sur la France), fournie par l'analyse du Met-Office d'observations de toutes sortes (baromètres sur terre et navires commerciaux, bouées de surface). L'unité est le hectopascal, hPa (anciennement milibar) : 1 hPa = 100 Pa. La pression varie entre un minimum dépressionnaire (*Low*) de 983 hPa et un maximum sur l'anticyclone des Açores (*High*) de 1 029 hPa. Les flèches noires indiquent le vent géostrophique. Source : Met-Office (UK).

La discussion du § 8.2 indique que le nombre de Rossby associé avec les structures atmosphériques de grande échelle de la figure 9.34 est petit. Les accélérations de Coriolis dominent alors les accélérations relatives dans l'équation 8-11 et on est conduit à examiner l'équilibre entre forces de pression et forces de Coriolis pour expliquer cette carte météo. Pour exprimer la force de Coriolis horizontale susceptible d'équilibrer les forces de pression, commençons par calculer le produit vectoriel $2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}$ dans le repère local Ox vers l'est, Oy vers le nord, et Oz vers le haut selon la verticale locale :

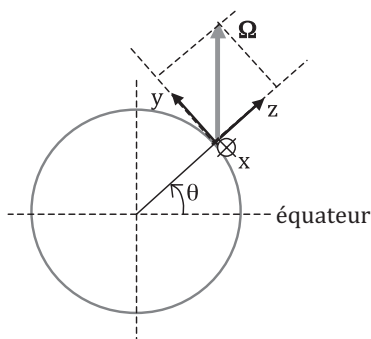


Figure 9.35

Le repère traditionnel utilisé en géophysique. θ est la latitude.

Avec θ la latitude, la figure 9.35 montre que les composantes de $\mathbf{\Omega}$ sont $(0, \Omega \cos \theta, \Omega \sin \theta)$ et celles du vecteur vitesse sont (u_x, u_y, u_z) . Les composantes de $2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}$ sont d'après le chapitre 1 :

$$\begin{pmatrix} 2\Omega \cos \theta u_z - 2\Omega \sin \theta u_y \\ 2\Omega \sin \theta u_x \\ -2\Omega \cos \theta u_x \end{pmatrix}$$

Comme les vitesses verticales sont très petites par rapport aux vitesses horizontales et que la pression est hydrostatique, les termes en $\cos \theta$ de l'expression ci-dessus sont négligeables. En définitive, seule compte la projection du vecteur rotation sur la verticale soit $\Omega \sin \theta$. L'équilibre entre le gradient de pression et la force de Coriolis s'écrit dans le plan horizontal :

$$\begin{aligned} -\rho f u_y &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ +\rho f u_x &= -\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \quad 9-14$$

$f = 2\Omega \sin \theta$ est le paramètre de Coriolis. La présence de la masse volumique ρ intervient, car les termes ont toujours la dimension de forces par unité de volume. La relation 9-14 traduit le fameux équilibre géostrophique qui permet de déduire le

vent de la connaissance de la distribution spatiale de la pression mesurée en chaque point par un baromètre (la carte 9-34). Il traduit le fait que pour les écoulements de grande échelle sur une sphère en rotation, tout se passe comme si la Terre tournait autour d'un axe vertical. En effet cette approximation de la force de Coriolis s'exprime avec le produit vectoriel comme :

$$-\rho f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_H = \begin{pmatrix} \rho f u_Y \\ -\rho f u_X \end{pmatrix}$$

avec \mathbf{k} le vecteur unitaire vertical vers le haut et \mathbf{v}_H la vitesse horizontale. La relation 9-14 montre que cette force est égale et opposée à la force de pression horizontale :

$$-\rho f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_H - \nabla_H p = 0$$

Supposons que la pression ne varie que selon y , la direction sud-nord, pression forte aux Açores, faible sur l'Islande. L'équation 9-14 prédit une vitesse u positive (un vent d'ouest) puisque la pression p diminue avec y . La situation est la suivante :

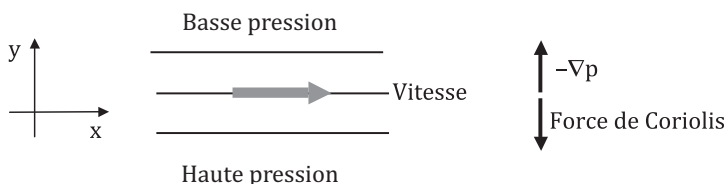


Figure 9.36

L'équilibre géostrophique prédit donc des vitesses le long des isobares, avec les hautes pressions à droite de la vitesse dans l'hémisphère nord : les forces de pression sont vers le nord et équilibrées par la force de Coriolis vers le sud. La force de Coriolis est à la droite de la vitesse comme cela a été vu au chapitre 8. On peut alors compléter la carte 9-34 en y plaçant des vecteurs vitesses (les flèches noires) avec cette règle. Notons aussi que le module de la vitesse est d'autant plus grand que les isobares sont serrées. Pour un gradient de pression donné, les vitesses vont aussi être d'autant plus grandes que f est petit et la latitude basse. Évidemment l'expression 9-14 n'est plus valable à l'équateur puisque $f = 0$. Dans l'hémisphère sud, f est négatif et la vitesse géostrophique a maintenant les basses pressions sur sa droite. Rappelons que cet effet provient simplement de ce que l'axe vertical sur lequel on projette le vecteur rotation a changé de sens. Notons finalement que l'équilibre géostrophique permet de diagnostiquer les vitesses si on connaît le gradient de pression mais il ne permet pas de prédire le temps qu'il fera demain. Puisque les accélérations $d\mathbf{u}/dt$ ont été mises à zéro, aucune évolution temporelle n'est possible avec 9-14. Comparons ces accélérations avec l'accélération de Coriolis. Pour un écoulement de vitesse U et d'échelle spatiale L , l'accélération est d'ordre U^2/L et le rapport avec l'accélération

de Coriolis 9-14 donne un nombre de Rossby plus adapté à la géophysique que celui introduit au chapitre 8 :

$$R_0 = \frac{U}{fL}$$

Pour un vent de 10 m s^{-1} et une dépression d'échelle 500 km aux moyennes latitudes ($f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$), R_0 est égal à $0,2$, certes petit mais pas tant que ça. Le modèle quasi géostrophique, une des percées théoriques majeures du xx^{e} siècle en météorologie, permet de faire revenir l'accélération $d\mathbf{u}/dt$ comme une petite perturbation de la géostrophie. Ce modèle a ouvert la voie à l'identification de l'instabilité barocline, l'instabilité hydrodynamique qui explique l'écoulement turbulent de la figure 9.34.

En résumé, sans rotation, les flots accélèrent des hautes vers les basses pressions. La dominance de la rotation terrestre pour les écoulements lents de grande échelle spatiale dans l'océan et l'atmosphère crée des flots orientés plutôt le long des isobares, une dynamique totalement différente de celle des canalisations et des ailes d'avion qu'il faut maîtriser si on s'intéresse entre autres au changement climatique.

9.5.4 *Turbulence*

9.5.4.1 Introduction

Que ce soit dans les tuyaux, sur les ailes d'avion ou les voiles de bateau, la turbulence peut apparaître dans tous ces écoulements avec des effets très négatifs sur les performances souhaitées. L'eau d'une casserole sur le feu devient également turbulente rapidement et les écoulements atmosphériques des moyennes latitudes juste mentionnés sont toujours turbulents, turbulence à l'origine de l'impossibilité de leurs prédictions au-delà de quelques jours. La turbulence peut être facilement présentée au travers des effets associés. Les caractéristiques d'un écoulement turbulent sont les suivantes :

1) L'irrégularité

Un flot turbulent est irrégulier avec une irrégularité provenant d'une grande richesse d'échelles spatiales et temporelles de l'écoulement où le mot échelle l est ici associé avec le nombre d'ondes de Fourier k (spatial ou temporel), $l = 1/k$. Un écoulement turbulent est constitué d'un grand nombre de valeurs de k , par opposition à une onde monochromatique associée avec une seule valeur de k .

2) L'efficacité du mélange

Le plus simple est de visualiser le mélange du nuage de lait dans la tasse de thé lorsque le thé a été mis en mouvement par un coup de cuiller énergique. Les volutes de fumée au-dessus d'un feu l'illustrent aussi. Lorsque l'on discute mélange, on utilise l'approche lagrangienne qui consiste à suivre des particules de fluide dans leur mouvement. Les particules de lait viennent se mélanger avec les particules de thé et réciproquement.

3) La forte dissipation de l'énergie cinétique

Les mouvements dans la tasse de thé disparaissent rapidement. À l'inverse, une onde isolée persiste très longtemps. Si vous regardez le sillage d'un bateau à moteur, l'hélice crée un sillage turbulent alors que la coque force des vagues régulières (des ondes de gravité) et on peut constater la persistance de ces dernières alors que la mer est redevenue lisse beaucoup plus rapidement dans le sillage.

9.5.4.2 L'origine de la turbulence

Un écoulement régulier, laminaire, ne devient turbulent que si une instabilité hydrodynamique est active. En l'absence de rotation, il n'y a que deux instabilités possibles, l'instabilité de cisaillement associée avec le nom de Rayleigh et l'instabilité du fluide chauffé par-dessous dite de Rayleigh-Bénard.

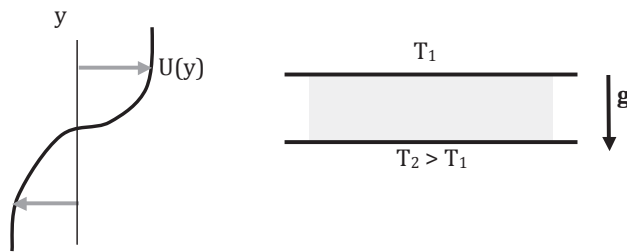


Figure 9.37

Les deux sources de turbulence : un écoulement cisailé à gauche et un fluide chauffé par-dessous à droite (expériences de Bénard).

À gauche, un écoulement cisailé $U(y)$ peut être instable s'il possède un point d'inflexion, un des résultats fondamentaux de la théorie hydrodynamique non visqueuse de Rayleigh. À droite, un fluide chauffé par-dessous peut également devenir instable. Les forces de flottabilité responsables de la convection thermique sont déstabilisantes (voir chapitre 10) tandis que les forces visqueuses amortissent les mouvements. Dans ces expériences, la masse volumique varie avec la température et revient dans les équations par l'intermédiaire du terme de gravité $\rho \mathbf{g}$. Même de faibles variations de la densité redeviennent dynamiquement importantes quand elles sont couplées avec le terme de gravité : une particule chaude (légère) monte alors qu'une froide (lourde) descend sous l'effet de la force de flottabilité (Archimède). Un certain seuil $\Delta T = T_2 - T_1$ doit être franchi pour que l'instabilité de Rayleigh-Bénard se déclenche. Les mouvements de convection thermique dans la casserole sont aussi ceux que l'on peut observer grâce aux formations nuageuses de type cumulus. La complexité de ces nuages montre que l'on est clairement dans un régime turbulent.

Lorsqu'il s'agit de la genèse de la turbulence, l'étude mathématique des instabilités hydrodynamiques est devenue depuis plus d'un siècle un champ de recherches considérable. L'analyse s'effectue toujours de la même manière :

- recherche d'une solution permanente des équations de l'hydrodynamique pour un écoulement de base \mathbf{U} (+ pression, température, etc.) ;
- introduction d'une perturbation \mathbf{u}' de l'écoulement qui devient $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$. On détermine alors l'équation satisfaite par \mathbf{u}' . La première étape est de supposer que la perturbation est petite, ce qui permet de linéariser l'équation en question ;
- solution des équations pour les perturbations en modes normaux et recherche des perturbations les plus instables de l'écoulement ;
- analyse des perturbations d'amplitude finie qui conduit à des équations non linéaires pour les perturbations.

La difficulté de l'exercice commence dès la première étape par la recherche d'une solution stationnaire pour l'écoulement de base. Compte tenu de cette difficulté, seule l'analyse d'écoulements très idéalisés a pu être effectuée, comme ceux de la figure 9.37 les premiers étudiés.

L'approche expérimentale

Compte tenu des difficultés théoriques dans l'approche de la turbulence, les expériences de laboratoire continuent de jouer un rôle important. La première d'entre elles due à Reynolds (1883) fournit un cadre pertinent, car les liens entre expérience et théorie restent encore d'actualité.

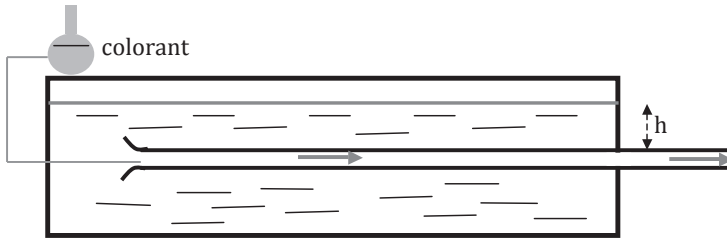


Figure 9.38

L'expérience de Reynolds, 1883, du flot dans un tube circulaire. La surpression en amont est due à la hauteur de la surface libre h .

De l'eau remplit un bac rectangulaire. Le fluide du tube horizontal placé à une profondeur h dans ce bac est soumis à l'entrée à une pression $p_{\text{ATM}} + \rho gh$ et à la pression atmosphérique p_{ATM} en sortie. La chute de pression amont-aval ρgh accélère le fluide dans le tube. Lorsqu'un régime permanent est établi, le flot est celui qui correspond à la situation de l'écoulement parabolique de Poiseuille-Hagen donnée par 9-13. Lorsque du colorant est introduit à l'entrée du tube en un point, ce colorant trace une ligne droite sur la ligne de courant marquée à l'entrée. Reynolds

observe cela tout au moins au début. Lorsque la vitesse U dans le tube augmente (pour ce faire il augmente h), il observe que le colorant commence par osciller latéralement pour un nombre de Reynolds $Re \approx 2\,500$ (ici $Re = U \times \text{diamètre}/\nu$), pour finir par se mélanger complètement dans le tube pour des valeurs de Re plus grandes encore. Mais si la turbulence mélange le colorant, elle doit aussi mélanger la quantité de mouvement du flot moyen et c'est effectivement ce qui est observé.



Figure 9.39

Le flot laminaire parabolique de la solution théorique 9-11 à gauche. Sous l'effet de la turbulence à droite, le flot moyen devient beaucoup plus plat dans l'intérieur (loin des bords). Les forts cisaillements sont repoussés sur les bords augmentant la force visqueuse en proche paroi. Source : Von Karman.

Aux grandes valeurs du nombre de Reynolds, l'écoulement intérieur varie assez peu, toutes les variations étant repoussées sur les bords, ce qui veut dire que les contraintes visqueuses vont devenir très grandes au voisinage des parois. Cela illustre toute la difficulté du sujet. Le nombre de Reynolds étant le rapport de l'accélération sur les forces visqueuses, ces dernières doivent être négligeables quand il est grand. Mais elles ne sont négligeables que dans l'intérieur de l'écoulement et redeviennent dominantes dans des couches limites minces près des parois. La dissipation visqueuse est dominée par ces termes de parois. La transition laminaire turbulent dans l'expérience de Reynolds ne se fait pas à un Reynolds critique, mais dépend beaucoup de la qualité de l'expérimentation. La forme de trompette à l'entrée du tube sur la figure 9.38 est justement là pour diminuer les perturbations en entrée. Le flot laminaire de Poiseuille-Hagen a ainsi pu être observé jusqu'à des Reynolds de 10^4 sous certaines conditions. Il n'y a donc pas de seuil bien précis pour la perte de stabilité comme c'est le cas pour l'instabilité de Rayleigh-Bénard. Ceci a conduit la théorie à s'orienter vers l'instabilité causée par des perturbations d'amplitudes finies c'est-à-dire le régime non linéaire.

À la suite des expériences de Reynolds et compte tenu des difficultés théoriques sur la stabilité, de nombreuses autres ont été et continuent d'être réalisées avec des liquides différents, des vitesses différentes, des diamètres différents. Pour autant, la géométrie des expériences, le tube circulaire lisse et les conditions aux limites (pressions amont-aval imposées) sont les mêmes. La question est alors de savoir comment exprimer cette similarité. L'analyse dimensionnelle permet d'y répondre. Soit U la vitesse, D le diamètre, ρ la densité du fluide et μ la viscosité cinématique. La gravité ne joue pas de rôle dans cette expérience sauf pour varier hydrostatiquement la pression en amont. On peut donc dire que le gradient de pression selon le tube (l'axe x) varie de façon générale comme :

$$\frac{dp}{dx} = f(U, D, \rho, \mu) \quad 9-15$$

Les unités pour dp/dx et μ sont :

$$\left[\frac{dp}{dx} \right] = [U]^2 [D]^{-1} [\rho]$$

$$[\mu] = [U][D][\rho]$$

On peut donc adimensionnaliser dp/dx et μ ainsi :

$$\Pi_1 = \frac{dp/dx}{U^2 D^{-1} \rho} \quad \text{et} \quad \Pi_2 = \frac{\mu}{UD\rho}$$

de sorte que 9-15 se réécrit :

$$\frac{dp}{dx} = f(U, D, \rho, \mu) = U^2 D^{-1} \rho \Phi\left(\frac{\mu}{UD\rho}\right)$$

soit encore :

$$\Pi_1 = \frac{D}{U^2 \rho} \frac{dp}{dx} = \Phi(\text{Re}) \quad \text{avec} \quad \text{Re} = \frac{UD}{\nu} \quad 9-16$$

L'expression 9-16 est la loi de similarité pour le flot dans le tube circulaire lisse exprimant que le gradient de pression adimensionnel Π_1 ne peut être fonction que du nombre de Reynolds Re . On s'attend donc à ce que les résultats de toutes les expériences de ce type se rassemblent sur une courbe unique $\Pi_1 = f(\text{Re})$ et c'est précisément ce que montre la figure 9.40 réalisée par Stanton et Pannell en 1914.

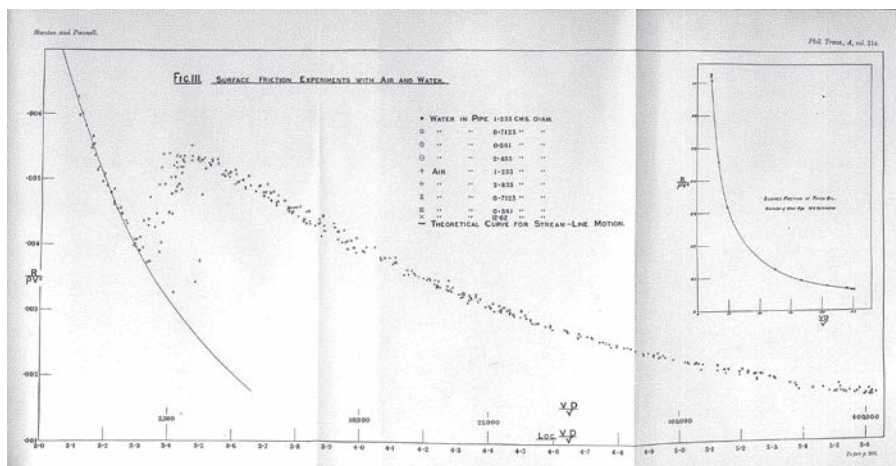


Figure 9.40

La figure originale de Stanton et Pannell, 1914, qui illustre Π_1 en fonction de Re pour de nombreuses expériences réalisées avec de l'air, de l'eau, de l'huile, des tubes de différents diamètres et des débits variés. Tous les points expérimentaux se rassemblent sur une seule courbe $\Pi_1 = f(\text{Re})$. Aux petits Re , on observe la solution visqueuse (la courbe continue), aux grands Re le régime turbulent. Seule la région de transition autour de $\text{Re} = 2500$ semble échapper à la loi de similarité. Les valeurs minimales et maximales de Re sur la figure sont de 10^3 et $4,3 \times 10^5$ respectivement.

À faible Reynolds, $Re < 2\,000$, les points expérimentaux du régime laminaire se positionnent sur la courbe $\Pi_1 = 32/Re$. Le lecteur vérifiera qu'il s'agit de la forme adimensionnelle de la solution 9-13 de Poiseuille-Hagen lorsque le nombre de Reynolds est calculé en prenant pour U la vitesse moyennée sur le diamètre du tube. Pour Re entre 1 760 et 3 000, on observe une région de transition avec l'apparition de bouffées de turbulence, le flot hésitant entre le régime laminaire et le régime turbulent, et dans cette région de transition la loi de similarité ne marche pas bien. Dans le régime turbulent établi, pour des Re jusque 10^5 , les points expérimentaux sont bien capturés par la solution de Blasius, $\Pi_1 = 0,16 Re^{-1/4}$. Une revue actuelle du sujet est celle de Mullin (2011).

Note :

Portances et traînées mesurées en soufflerie sur des ailes d'avion ou des voiles de bateau peuvent se rassembler de la même façon en régime subsonique par des expressions sans dimension fonction de l'angle d'incidence α et du nombre de Reynolds Re :

$$C_D = \frac{\text{Force de traînée}}{\text{Surface} \times \rho U^2 / 2} = f(\alpha, Re)$$

$$C_L = \frac{\text{Force de portance}}{\text{Surface} \times \rho U^2 / 2} = f(\alpha, Re)$$

9.5.5 Ondes dans les fluides

Nous avons rencontré des mouvements qui oscillent dans le temps, des pendules, des ressorts, mais il existe aussi des mouvements qui oscillent dans le temps **et** dans l'espace, et les fluides sont un terrain privilégié pour les montrer, l'exemple le plus commun étant celui des vagues que l'on voit se propager pour finir par se briser sur une plage. Ce paragraphe permet de découvrir ces phénomènes ondulatoires qui jouent un si grand rôle en optique, dans les télécommunications ou en musique. Ce sujet est souvent introduit dans les livres de physique par la propagation des ondes sur une corde tendue. L'occasion est ici donnée d'aborder le sujet par le point de vue fluide et d'explorer quelques-unes des nombreuses applications. Les ondes dans les fluides sont des objets fascinants : comment en effet obtenir un tel degré d'organisation dans un fluide qui ne demande qu'à se déformer en prenant si facilement les formes les plus complexes ? Apparemment, les vagues, les marées et l'acoustique sont là pour nous rappeler que des oscillations harmoniques régulières existent aussi bel et bien dans les fluides. Qui dit oscillation dit nécessairement force de rappel et deux catégories d'oscillations apparaissent. Les forces de rappel peuvent être dues, soit à des forces externes comme la gravité, la tension de surface, les forces de Coriolis, soit aux propriétés mécaniques du fluide lui-même, comme la résistance à la compression. On va se concentrer sur un type particulier d'ondes de gravité qui explique la propagation des marées et des tsunamis, et dont la dynamique est analogue à celle des ondes acoustiques. Les vagues que l'on rencontre en mer sont générées par le vent et la force de rappel est aussi due à la gravité, mais leur dynamique est plus complexe et ne sera abordée qu'en fin du paragraphe.

9.5.5.1 L'équation d'onde

Nous allons étudier les ondes longues de gravité à une dimension par simplicité, l'extension à plusieurs ne présentant pas de difficultés puisque ces ondes sont isotropes : elles se propagent de façon identique dans n'importe quelle direction horizontale. Pour l'instant nous n'avons considéré que des solutions d'écoulement permanent où la vitesse u dépend de la position, mais ne dépend pas du temps. Exprimer l'accélération d'une particule fluide dans un champ de vitesse qui dépend aussi du temps est donc la première chose à faire. Imaginons un écoulement à une dimension connu par la fonction $u(x,t)$. Supposons une particule fluide qui soit en x_0 à l'instant $t = 0$. À l'instant $t + \Delta t$, elle se trouvera à la position $x + \Delta x$ et aura donc subi l'accélération :

$$a = \frac{u(x + \Delta x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$$

En effectuant le développement de Taylor à l'ordre un de la fonction des deux variables indépendantes x et t du numérateur pour des petits Δx et Δt , on obtient :

$$a \approx \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x_0, t=0} + \frac{\Delta x}{\Delta t} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0, t=0}$$

mais lorsque Δx et Δt tendent vers zéro, $\Delta x / \Delta t$ tend vers u et ceci se réécrit à la limite :

$$a = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \quad 9-17$$

L'expression de la composante selon x de l'accélération d'une particule fluide se compose de deux termes, un premier qui vient de la variation temporelle de u et un deuxième qui vient de la variation spatiale. L'accélération de la particule fluide dans le tube convergent de la figure 9.22 est due au deuxième terme. La part qui nous intéresse dans cette section est le premier. Pour le voir, supposons que la vitesse u ait justement une forme harmonique de propagation dans l'espace et dans le temps. Il est souvent très commode d'utiliser les notations complexes pour les oscillations et on postule donc la forme $u = \text{Partie réelle}[u_0 e^{ik(x-ct)}]$ avec k le nombre d'onde (la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$), la fréquence de l'onde $\omega = ck$ (la période $T = 2\pi/\omega$) et la phase $\theta = kx - \omega t$. La quantité u_0 est l'amplitude (complexe) de l'onde. On remarque que u conserve sa forme lorsque $x - ct$ est constant. Si par exemple :

$$x - ct = x_0 - ct_0$$

alors $c = (x - x_0)/(t - t_0)$. Si l'observateur se déplace à la vitesse de phase c , il reste en face de la même valeur de u , un maximum, un minimum ou n'importe quelle autre valeur. La vitesse c est la vitesse de translation de l'onde et s'appelle vitesse de phase dont la détermination va être l'objectif central. Si on reporte l'expression de u dans 9-17, on obtient :

$$-iku_0 e^{i\theta} + iku_0^2 e^{2i\theta}$$

Le module du premier terme de cette expression est $kc|u_0|$ et le deuxième $k|u_0|^2$, de sorte que le rapport des modules du second terme au premier est u_0/c . Si les vitesses

des particules fluides u_0 sont petites devant la vitesse de phase c , le premier terme à droite de 9-17 domine. Nous allons faire cette approximation classique de petites oscillations qui permet de ne garder que ce premier terme et nous débarrasser du terme non linéaire en $u \frac{du}{dx}$. Il faudra bien sûr vérifier au final que cette approximation est correcte et capture une réalité intéressante. La deuxième loi de Newton s'écrit alors pour le mouvement dans la direction x :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad 9-18$$

L'approximation suivante est de supposer que la pression reste hydrostatique et que 9-4 reste valable. La validité de cette approximation sera rediscutée à la fin. Lorsque le fluide est au repos, la surface libre est horizontale ($z = 0$). Appelons $\eta(x,t)$ la déflexion verticale de la surface libre due au mouvement de l'onde.

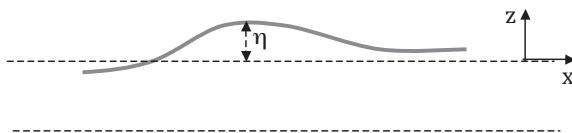


Figure 9.41

La pression à un niveau z arbitraire ne dépend que de la hauteur $\eta - z$ entre la surface libre η et ce niveau z . D'autre part la pression en surface est égale à la pression atmosphérique et donc $p(x,z,t) = p_{\text{ATM}} + \rho g(\eta - z)$. Ainsi lorsque p_{ATM} et ρ sont constants, le gradient de pression horizontal s'exprime simplement en fonction de la pente de la surface libre :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

En introduisant dans 9-18, on obtient la première équation fondamentale :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad 9-19$$

Comme le forçage de l'accélération à droite ne dépend pas de z , la vitesse à gauche est aussi indépendante de z et le fluide se déplace comme un bloc // à z . Il faut trouver une deuxième équation pour déterminer les deux variables u et η . Cette deuxième équation est la conservation du volume 9-8 déjà rencontrée. Une figure permet de comprendre la situation :

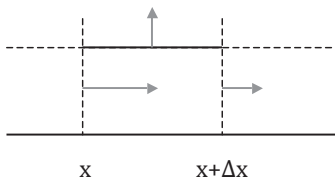


Figure 9.42

Si l'épaisseur du fluide est H , le débit entrant en x pendant l'intervalle de temps Δt est $H u(x)$ et le débit sortant en $x + \Delta x$ est $H u(x + \Delta x)$. La seule façon de conserver le volume est que la surface libre monte pendant l'intervalle de temps Δt du débit adéquat soit $\Delta x \Delta \eta / \Delta t$. La conservation du volume donne :

$$H u(x) - H u(x + \Delta x) = \Delta x \Delta \eta / \Delta t$$

À la limite lorsque $\Delta x, \Delta t$ tendent vers zéro, il reste :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad 9-20$$

La vitesse verticale en surface vient équilibrer les variations spatiales de la vitesse horizontale dans 9-20. On pourrait faire l'objection que la profondeur n'est pas exactement la même en x et $x + \Delta x$ puisque la surface libre varie. Mais à nouveau les ondes sont de petite amplitude et on fait l'approximation $|\eta| \ll H$. Les deux équations 9-19 et 9-20 gouvernent les oscillations de gravité cherchées. Le plus direct est d'éliminer l'une des deux variables, par exemple u , en effectuant l'opération :

$$\frac{\partial}{\partial x} (9-19) - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial t} (9-20)$$

pour obtenir :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gH \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad 9-21$$

où l'on reconnaît la fameuse équation d'onde de la physique classique qui apparaît notamment dans les contextes de la propagation de la lumière, du son ou encore des ondes sismiques.

9.5.5.2 La relation de dispersion et applications géophysiques

L'équation 9-21 admet des ondes de translation de la forme :

$$\eta = f(x - ct), \text{ avec } f \text{ dérivable deux fois.}$$

En injectant dans 9-21, on obtient la condition :

$$(c^2 - gH) f'' = 0$$

qui est satisfaite si :

$$c = \pm (gH)^{1/2}$$

L'analyse dynamique a donc permis de trouver la vitesse de phase. Il y a deux solutions possibles. Lorsque c est positif, l'onde se déplace dans la direction des x positifs et dans le sens opposé si c est négatif. Évidemment une solution harmonique de la forme $\eta = \text{Partie réelle}[\eta_0 e^{i(kx - \omega t)}]$ est également solution si :

$$\omega^2 = gH k^2 \quad \text{ou} \quad \omega = \pm \sqrt{gH} k \quad 9-22$$

La relation 9-22 impose ainsi une relation entre ω et k pour que la forme choisie soit solution de 9-21. Cette relation est appelée relation de dispersion qui a ceci de particulier que les harmoniques de nombre d'onde k se propagent tous à la même

vitesse $c = \omega/k$. Comme 9-21 est une équation linéaire, une superposition d'harmoniques est aussi solution et se propage à la même vitesse c . Comme n'importe quelle fonction peut s'exprimer en série de Fourier (une combinaison linéaire de cos ou de sin), on réalise qu'un signal de forme arbitraire n'est pas déformé durant la propagation. Pour cette raison ces ondes sont dites non dispersives, leur principale qualité en télécommunications ou pour juste pouvoir parler à quelqu'un.

Pour prendre un exemple concret, considérons une telle onde progressive pour rendre compte de la marée dite lunaire semi-diurne M_2 de période $T \approx 12,40$ h qui rentre en Manche par l'ouest et ressort par la mer du Nord. Sa période est fixée de façon astronomique (par la période orbitale de la Lune et la rotation de la Terre). Prenons une profondeur moyenne de la Manche $H = 60$ m. La vitesse de phase $c = 24,3$ m s⁻¹ soit 87 km h⁻¹, la vitesse de l'onde de marée. Si Brest a une pleine mer (PM) à un instant donné, il faudra rouler à cette vitesse pour rester en phase avec la pleine mer. La longueur d'onde $\lambda = cT = 1\,078$ km. Ainsi quand Brest a une PM, il y a au même instant une basse mer (BM), 539 km plus loin à l'est, en Normandie, puis une PM quelque part en Belgique. L'amplitude typique de la marée à Brest est $\eta_0 = 3$ m (le marnage, la hauteur de PM moins la hauteur de BM est alors de 6 m). Pour trouver la vitesse du courant u , on injecte la solution pour η dans 9-19 ou 9-20 pour trouver :

$$u = \sqrt{\frac{g}{H}} \eta$$

Le courant est en phase avec la hauteur : à PM, le courant montant vers l'est est maximum et ne s'annule que ~ 3 h après la PM. Connaissant l'amplitude η_0 , on trouve l'amplitude du courant $u_0 = 1,2$ m s⁻¹ ou $\sim 2,4$ nœuds qui est l'ordre de grandeur des courants de marée observés en Manche. Le point important est que la vitesse des particules fluides est très petite devant la vitesse de phase, justifiant une des hypothèses centrales de ce calcul. Bien entendu la géométrie de la côte vient compliquer cette description idéalisée. La présence du Cotentin crée une résonance dans la baie de Saint-Malo qui augmente l'amplitude d'un facteur deux. La rotation de la Terre et les forces de Coriolis ont été oubliées, or la période n'est pas petite, juste la moitié de la période de rotation. Quand elles sont prises en compte, les forces de Coriolis expliquent la différence d'amplitude de marée qui existe entre la côte française et la côte anglaise.

Reste l'hypothèse de pression hydrostatique admise sans justification. Pour être valable, il faut que les accélérations verticales soient petites devant le gradient de pression verticale. La vitesse verticale est maximum en surface et vaut $\partial\eta/\partial t$. L'ordre de grandeur des deux termes en question est indiqué ci-dessous :

$$\begin{array}{ll} \rho \frac{\partial w}{\partial t} & \frac{\partial p}{\partial z} \\ \rho \omega^2 \eta_0 & \frac{\rho g \eta_0}{H} \\ \omega^2 \frac{H}{g} & 1 \\ (kH)^2 = 4\pi^2 \frac{H^2}{\lambda^2} & \ll 1 \end{array}$$

La dernière ligne montre que si la longueur d'onde est grande devant la profondeur, les accélérations verticales sont négligeables et la pression reste hydrostatique. Cette dynamique est celle des ondes longues de gravité et l'exemple de la Manche satisfait pleinement cette hypothèse. Il en est de même pour les tsunamis générés par des écroulements du fond sous-marin. En plein océan, la propagation d'une onde de tsunami se fait à la vitesse de phase $c \sim 200 \text{ m s}^{-1}$ soit plus de 700 km h^{-1} pour une profondeur de $4\,000 \text{ m}$. Les populations côtières, alertées par les ondes sismiques qui se propagent encore plus vite dans la croûte terrestre, ont malgré tout peu de temps pour se mettre à l'abri des vagues dont l'amplitude négligeable au large augmente considérablement par petits fonds.

L'océan et l'atmosphère sont des fluides minces, peu profonds pour les mouvements de grande échelle qui régissent le climat et cette approximation des ondes longues joue un rôle central (avec bien sûr la rotation de la Terre).

9.5.5.3 L'analogie acoustique

Pour traiter des ondes acoustiques dans l'air, il faut revenir sur l'hypothèse du fluide incompressible puisque ces ondes doivent leur existence à la résistance à la compression. On ne peut donc plus utiliser l'approximation de la conservation du volume et il faut revenir à la conservation de la masse. En revanche on peut négliger la gravité qui n'a aucune influence aux petites longueurs d'onde. L'introduction du sujet est encore faite à une dimension puisque les ondes sont isotropes dans les trois dimensions. On choisit des ondes d'amplitude infinitésimales et on suppose que le fluide est un gaz parfait (§ 10.2.4). Les perturbations de masse volumique ρ' petites devant la masse volumique du fluide au repos ρ_0 s'écrivent :

$$\rho(x, t) = \rho_0 + \rho'(x, t) \text{ avec } |\rho'| \ll \rho_0$$

La discussion du bilan de masse d'un petit cube de volume $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ est similaire à la discussion qui a conduit à l'équation 9-20. Pendant le temps Δt , une masse $\rho_0 u(x) \Delta t \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ rentre en x dans le volume de contrôle au travers d'une surface $\Delta y \cdot \Delta z$ et la masse $\rho_0 u(x + \Delta x) \Delta t \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ sort en $x + \Delta x$. Si ces quantités ne sont pas égales, la masse volumique du cube doit changer pour que la masse totale soit conservée. Le changement de masse du cube pendant l'intervalle de temps Δt est : $\partial \rho' / \partial t \Delta t \Delta x \Delta y \Delta z$ et cette quantité doit être précisément égale au déficit ou au gain de masse par les sections latérales du volume :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} \Delta t \Delta x \Delta y \Delta z &= \rho_0 u(x) \Delta t \Delta y \Delta z - \rho_0 u(x + \Delta x) \Delta t \Delta y \Delta z \\ &= \rho_0 [u(x) - u(x + \Delta x)] \Delta t \Delta y \Delta z \\ &\approx -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

soit au final cette version simplifiée de l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad 9-23$$

que l'on pourra comparer avec 9-20. La deuxième loi de Newton 9-18 reste toujours valable pour les perturbations sauf que l'on peut négliger dans cette équation les petites variations ρ' et écrire :

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p'}{\partial x} \quad 9-24$$

Mais trois variables u , ρ' et p' sont encore présentes pour seulement deux équations 9-23 et 9-24. Il faut se rappeler alors de l'équation d'état du fluide qui s'écrit pour un gaz parfait (voir § 10-2-4) :

$$pV = nRT$$

avec n le nombre de moles et R la constante des gaz parfaits. En divisant par la masse m de fluide dans le volume V , on fait apparaître ρ :

$$\frac{p}{\rho} = R^* T \quad 9-25$$

où $R^* = R/M$ avec M la masse molaire du gaz choisi et $n = m/M$. Masse volumique ρ_0 , pression p_0 et température T_0 du fluide au repos sont donc reliées par :

$$\frac{p_0}{\rho_0} = R^* T_0$$

Certes 9-25 est une nouvelle équation, mais elle introduit une nouvelle variable, la température. La température reste-t-elle constante dans la propagation acoustique ? Quand on gonfle un pneu de vélo, on voit que ce n'est pas le cas, l'air comprimé s'échauffe, et si on dégonfle le pneu, l'air détendu se refroidit. Le travail de compression augmente l'énergie interne du gaz et comme cette énergie est proportionnelle à la température, le gaz s'échauffe sans qu'aucune quantité de chaleur n'ait été fournie : le processus est adiabatique. Pour qu'il en soit autrement, lorsque le passage de l'onde comprime un volume de fluide, il faudrait que la perte de chaleur par diffusion thermique soit grande. Cela prendrait beaucoup de temps, car les coefficients de diffusion dans les fluides sont très petits. L'effet est donc négligeable compte tenu de la rapidité des ondes acoustiques et de la faiblesse de la diffusion thermique. Laplace a montré la relation supplémentaire $pV^\gamma = \text{constante}$ qui existe entre pression et volume lorsque les processus sont adiabatiques, avec $\gamma = C_p/C_v$ le rapport des capacités calorifiques du gaz à pression et volume constants. Cette relation, démontrée au § 10.3.2, s'écrit ici :

$$p = C \cdot \rho^\gamma \quad 9-26$$

avec C une constante. Cette équation est non linéaire, mais on peut la linéariser autour de l'état moyen pour les petites perturbations. Il suffit de faire un développement de Taylor de 9-26 à l'ordre 1 :

$$p - p_0 = \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_0 (\rho - \rho_0)$$

soit :

$$p' = c^2 \rho' \text{ avec } c^2 = \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_0 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} = \gamma R^* T_0 \quad 9-27$$

où nous avons noté arbitrairement c^2 la dérivée $dp/d\rho$ pour l'état de repos. L'équation 9-27 est la relation linéaire qui existe entre la perturbation de pression et la perturbation de masse volumique, une loi de type Hooke qui traduit le régime élastique du gaz. On va maintenant démontrer que c est effectivement la vitesse de phase des ondes acoustiques. En éliminant ρ' dans 9-23 au profit de p' , on obtient :

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad 9-28$$

Les équations 9-24 et 9-28 sont alors identiques aux équations 9-19 et 9-20 des ondes longues de gravité, pourvu que l'on fasse les correspondances $p' \rightarrow \rho_0 g \eta$ et $c^2 \rightarrow gH$. Tout ce que l'on a dit sur les ondes de gravité s'applique aux ondes acoustiques et en particulier c qui apparaît dans 9-27 est bien la vitesse de phase des ondes acoustiques et vaut :

$$c = \sqrt{\gamma R^* T_0} \quad 9-29$$

Pour l'air sec, $R^* = 287,04 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ et $\gamma = 7/5$, 9-29 prédit une vitesse du son à 15°C égale à 340 m s^{-1} , une valeur 18 % plus élevée (par le facteur $\sqrt{\gamma}$) que la valeur de Newton sous l'hypothèse d'une propagation isotherme. Si p' est une solution harmonique de la forme $p' = \text{Partie réelle}[p_0 e^{i(kx - \omega t)}]$, 9-28 permet de trouver la vitesse u des particules qui est en phase avec la pression :

$$u = \frac{p'}{\rho_0 c}$$

Considérons une onde de déplacement de la forme :

$$x = A \cos(kx - \omega t)$$

La vitesse des particules u est :

$$u = \omega A \sin(kx - \omega t)$$

La relation précédente permet de trouver les fluctuations de pression :

$$p' = \rho_0 c \omega A \sin(kx - \omega t)$$

L'intensité d'un son est défini par la moyenne sur une période de l'énergie qui passe à travers une surface par unité de surface et par unité de temps. Cette quantité est une puissance par unité de surface [W m^{-2}] soit une pression fois la vitesse. Pour trouver l'intensité du son, il faut calculer la moyenne sur une période de pu :

$$I = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} p u \, dt = \rho_0 c \omega^2 A^2 \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \sin^2(kx - \omega t) \, dt$$

La dernière intégrale vaut juste $T/2$ et :

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 c \omega^2 A^2$$

On voit tout de suite pour une même intensité, un son de basse fréquence demande un déplacement A plus grand (visible sur un haut-parleur). On préfère souvent exprimer I en termes de la pression maximale de l'onde $p_{\text{MAX}} = \rho_0 c \omega A$:

$$I = \frac{1}{2} \frac{p_{\text{MAX}}^2}{\rho_0 c}$$

où I est ici indépendant de la fréquence. Le son le plus faible audible par l'oreille humaine a une intensité $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$. Compte tenu des grandes variations de I , on utilise une échelle log avec le décibel (db) défini par :

$$\beta = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

L'oreille humaine est capable d'entendre des fréquences f entre 20 Hz et 20 kHz. Le son détectable le plus faible est donc de 0 db et devient difficile à supporter lorsque β dépasse 120 db. La relation précédente entre I et p_{MAX} donne des pressions pour l'oreille humaine comprises entre $2 \cdot 10^{-5}$ et 30 Pa. Pour cette valeur de 30 Pa, la vitesse des particules d'air atteint $7 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$, très inférieure à la vitesse de phase c justifiant la linéarisation de l'accélération 9-21. Le déplacement maximum de l'air, $u/2\pi f$, est de $5,6 \times 10^{-7} \text{ m}$ à 20 000 Hz et de $5,6 \times 10^{-4} \text{ m}$ ($= 0,56 \text{ mm}$) à 20 Hz, les basses occasionnant les plus forts déplacements.

Les analogies ondes longues - ondes acoustiques se poursuivent dans le domaine non linéaire lorsque les vitesses fluides ne sont plus négligeables devant la vitesse de phase. Les fortes amplitudes permettent l'apparition de chocs, des discontinuités causées par la dépendance de c avec l'amplitude des perturbations, dont quelques manifestations sont le bourrelet d'eau au fond d'un évier, le mascaret dans les rivières, le mur du son en aéronautique supersonique. Notons néanmoins une différence, les ondes acoustiques existent en trois dimensions alors que les ondes longues de gravité n'existent qu'en deux (le plan horizontal).

9.5.5.4 Les vagues ou ondes de gravité en eau profonde

Paradoxalement les vagues observées couramment en mer ont une dynamique plus complexe que celles des ondes longues résumées par l'équation des ondes 9-21. La nouveauté est que la pression n'est plus hydrostatique. La présentation se simplifie néanmoins un peu lorsque la longueur d'onde est petite devant la profondeur, le cas en plein océan. Puisque la propagation est toujours isotrope, on peut étudier le système à deux dimensions, selon une direction horizontale arbitraire Ox et la direction verticale vers le haut Oz avec l'origine en $z = 0$ prise sur la surface libre au repos (voir figure 9.41). La pression vaut alors $p_0 = p_{\text{ATM}} - \rho g z$. Il est commode d'utiliser comme variable l'excès de pression lorsque le fluide est en mouvement soit $p_E = p - p_0$. On conserve l'hypothèse des petits mouvements (onde d'amplitude

infinitésimale). Sur la surface libre à $z = \eta$ la pression est atmosphérique $p = p_{\text{ATM}}$ et donc $p_E = \rho g \eta$. Les équations du mouvement sont donc :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p_E}{\partial x} \quad (a) \quad 9-30$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = - \frac{\partial p_E}{\partial z} \quad (b)$$

avec u et w les vitesses horizontales et verticales respectivement et la densité ρ constante. En utilisant le même type de raisonnement aboutissant à 9-20, la conservation du volume de fluide élémentaire $\Delta x \cdot \Delta z$ se traduit maintenant par l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad 9-31$$

À ces trois équations pour le fluide intérieur, il faut ajouter les conditions aux limites en surface et en profondeur. Il y a deux conditions à satisfaire à la surface libre $z = \eta$. Premièrement, la pression est continue donc atmosphérique, ce qui entraîne $p_E = \rho g \eta$ et, deuxièmement, la vitesse verticale w en surface est liée au mouvement de la surface libre. Les particules sur la surface libre $z = \eta(x, t)$ restent sur cette surface et ceci se traduit par :

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \approx \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

Dans une approche « petites oscillations », le deuxième terme à droite est négligé puisqu'il est d'ordre (amplitude)². Ces deux conditions aux limites s'expriment en fonction des variables p_E et w par :

$$\rho g w = \frac{\partial p_E}{\partial t} \quad \text{en } z = 0 \quad 9-32$$

appliquée en $z = 0$ puisque l'amplitude η est infinitésimale. Comme le fluide est infiniment profond, l'autre condition au limite est que les mouvements tendent vers 0 à grande profondeur :

$$\lim (u, w, p_E) \rightarrow (0, 0, 0) \text{ quand } z \rightarrow -\infty \quad 9-33$$

Solution

Les trois équations 9-30 (a) et (b) et 9-31 et les deux conditions aux limites 9-32 et 9-33 définissent la dynamique en eau profonde des ondes de gravité de petite amplitude. On peut déjà éliminer la variable p_E entre les équations 9-30 (a) et (b) pour obtenir :

$$\frac{\partial(\partial u / \partial z - \partial w / \partial x)}{\partial t} = 0$$

Cette quantité dont la dérivée est nulle est la composante horizontale de la vorticité, le rotationnel du champ de vitesse. Cette équation indique que la vorticité est invariante : si elle est nulle à $t = 0$, elle reste nulle à t . Ce résultat vient de ce que les accélérations sont forcées dans 9-30 par un gradient de pression dont le rotationnel

est nul par définition et donc les forces de pression ne peuvent pas induire de vorticité dans le fluide. On dit que le mouvement est irrotationnel et on pose :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad 9-34$$

On peut maintenant éliminer la variable u entre 9-31 et 9-34 pour obtenir :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad 9-35$$

La vitesse verticale obéit à l'équation de Laplace. Si on suppose une propagation horizontale de la forme $w = \text{Partie réelle}[\mathbb{W}(z)e^{i(kx - \omega t)}]$, l'insertion dans 9-35 donne l'équation satisfaite par $\mathbb{W}(z)$:

$$\frac{d^2 \mathbb{W}}{dz^2} - k^2 \mathbb{W} = 0$$

Elle admet pour solutions les exponentielles réelles e^{kz} ou e^{-kz} . Avec l'équation de Laplace 9-35, on s'aperçoit que si la solution est ondulatoire dans une direction, elle varie exponentiellement dans l'autre. Ici la condition aux limites en profondeur 9-33 impose le choix e^{kz} . La vitesse d'une onde de surface de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ décroît exponentiellement sur la verticale avec l'échelle $1/k$ ($= \lambda/2\pi$). La pénétration dans l'intérieur est d'autant plus faible que l'onde est courte. Pour $z = \lambda$, l'amplitude n'est plus que la fraction $e^{-2\pi} = 1,8 \cdot 10^{-3}$ de la valeur de surface. Pour que cette solution reste valable dans un fluide de profondeur H , il faut donc que $kH \gg 1$, soit des longueurs d'onde faible devant la profondeur, l'approximation opposée de celle des ondes longues du § 9.5.5.2. La dynamique de l'onde ne peut provenir que de l'autre condition aux limites en surface 9-32. On sait maintenant que w et p_E sont de la forme :

$$\begin{aligned} w &= \text{Partie réelle}[A_1 e^{kz} e^{i(kx - \omega t)}] \\ p_E &= \text{Partie réelle}[A_2 e^{kz} e^{i(kx - \omega t)}] \end{aligned}$$

En injectant ceci dans les équations 9-30 (b) et 9-32 qui gouvernent w et p_E , on obtient le système linéaire satisfait par les constantes A_1 et A_2 :

$$\begin{aligned} i\omega \rho A_1 - k A_2 &= 0 \\ \rho g A_1 + i\omega A_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ce système homogène ne possède des solutions non nulles que si le déterminant des coefficients est nul (on peut aussi éliminer l'une ou l'autre des deux variables), ce qui donne :

$$\omega^2 = gk \quad 9-36$$

L'équation 9-36 est la relation de dispersion qui détermine la propagation des ondes courtes en eau profonde. La vitesse de phase c ($= \lambda/T$ avec T la période) est alors :

$$c = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2} = \left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{1/2} \quad 9-37$$

Ce qui donne numériquement en unités SI :

$$c = 1,25 \lambda^{1/2}$$

$$T = 0,8 \lambda^{1/2}$$

La grande nouveauté ici est que la vitesse de phase c ne soit plus constante et qu'elle dépende de la longueur d'onde. Chaque harmonique a sa propre vitesse de phase. Ainsi une déformation arbitraire se dispersera dans l'espace au lieu de se propager en bloc : les ondes de gravité en eau profonde sont le prototype des ondes dispersives. Des variations assez considérables de c et T apparaissent avec la longueur d'onde : pour des longueurs d'onde de 1 à 100 m, c varie de $1,25 \text{ m s}^{-1}$ à $12,5 \text{ m s}^{-1}$ et la période de 0,8 s à 8 s. En plein océan, λ peut atteindre 1 000 m puisque la profondeur moyenne est de l'ordre de 4 000 m. Vers les petites valeurs, cette dynamique reste encore valable pour des longueurs d'onde atteignant 10 cm en dessous desquels les effets de tension de surface deviennent importants (voir § 11.7).

Connaissant w , on peut calculer la vitesse horizontale u avec 9-31 :

$$w = A_1 e^{kz} \cos(kx - \omega t)$$

$$u = -A_1 e^{kz} \sin(kx - \omega t)$$

où l'on a choisi A_1 réel. Alors que les vitesses verticales étaient très petites devant les vitesses horizontales pour les ondes longues du § 9.5.5.2, elles sont ici du même ordre, avec la vitesse u en retard de phase de 90° sur la vitesse verticale. On peut en déduire les trajectoires d'une particule fluide en intégrant les équations :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = A_1 e^{kz} \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -A_1 e^{kz} \sin(kx - \omega t)$$

Pour des ondes de petite amplitude, les déplacements sont négligeables devant la longueur d'onde et on considère donc x et z comme des constantes dans le membre de droite pour obtenir :

$$z - z_0 = -\frac{A_1}{\omega} e^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t)$$

$$x - x_0 = -\frac{A_1}{\omega} e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t)$$

ce qui montre que les trajectoires des particules fluides sont des cercles de rayon proportionnel à e^{kz_0} qui diminuent exponentiellement avec la profondeur et qui sont parcourus en phase sur la verticale. La figure suivante illustre ces vitesses sur une demi-longueur d'onde pour une surface libre donnée par :

$$\eta = -\frac{A_1}{\omega} \sin(kx - \omega t)$$

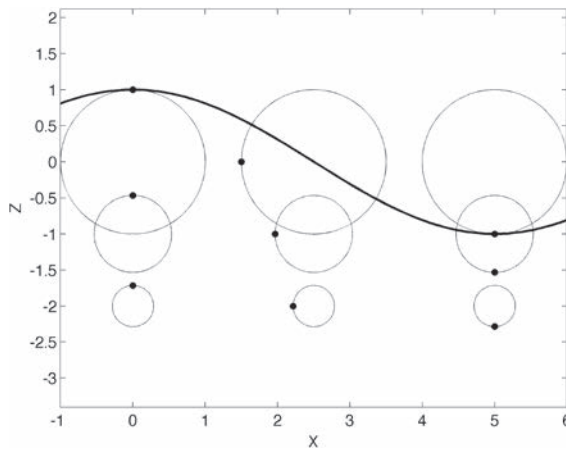


Figure 9.43

La surface libre d'une onde de longueur d'onde de 10 m est illustrée à l'instant $\omega t = \pi/2$. Les cercles représentent les trajectoires des particules sur une période en surface puis en $z = -0,1 \lambda$ et $-0,2 \lambda$. Les points noirs indiquent la position de la particule à l'instant où la surface libre est représentée. Notez l'amortissement rapide des mouvements en profondeur (unités x et z en mètre).

Propriétés dispersives

Si la phase se déplace avec la vitesse c donnée par 9-37, la vitesse qui joue un rôle fondamental pour les ondes dispersives est la vitesse de groupe :

$$C_G = \frac{d\omega}{dk} \quad 9-38$$

On peut comprendre son importance en considérant deux ondes de même amplitude a et de fréquence et nombre d'onde voisins, (ω_1, k_1) et (ω_2, k_2) respectivement. Chacune de ces ondes obéit à la relation de dispersion 9-36 et leur somme est donc aussi solution puisque le système est linéaire :

$$\eta = a \cos(k_1 x - \omega_1 t) + a \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

En transformant la somme en produit, cette expression se réécrit :

$$\eta = 2a \cos\left[\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right] \times \cos\left[\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right]$$

Le premier terme montre une onde dont les caractéristiques sont la moyenne des fréquences et nombre d'onde initiaux. Le deuxième en revanche apparaît comme une modulation d'amplitude qui varie sur une longueur d'onde beaucoup plus grande. Cette expression de η est illustrée sur la figure 9.44.

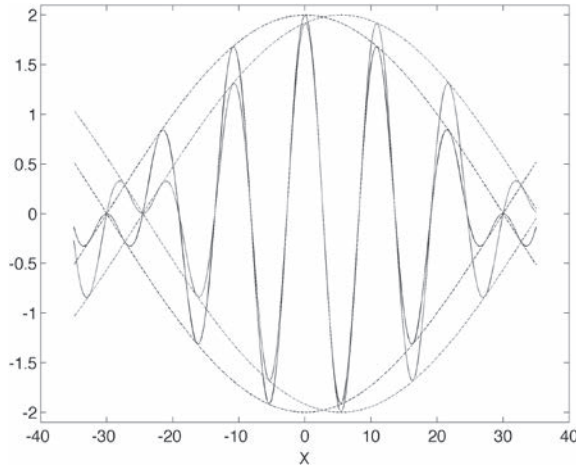


Figure 9.44

La somme des 2 cosinus de longueur d'onde 10 m et 12 m est représentée à un instant $t = 0$ (noir) et une période plus tard (gris). Le cosinus de la modulation lente est aussi représenté aux mêmes instants. On voit qu'il a progressé sur une distance distinctement plus faible.

Pour que le cos de la modulation garde sa valeur maximale +1, un observateur devra se déplacer à la vitesse :

$$\frac{x}{t} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

qui n'est autre que la vitesse de groupe C_G lorsque k_2 tend vers k_1 . Cet exemple montre que l'amplitude du groupe se déplace à cette vitesse C_G . On peut montrer plus généralement que C_G est la vitesse de propagation de l'énergie d'un groupe de vagues. En dérivant 9-36, on obtient :

$$C_G = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{k} \right)^{1/2} \quad 9-39$$

soit la moitié de la vitesse de phase 9-37. On peut aussi exprimer C_G en fonction de la fréquence via 9-36 :

$$C_G = \frac{g}{2\omega} \quad 9-40$$

Supposons maintenant que l'on lance une pierre dans l'eau en $x = 0$ à $t = 0$. La déformation initiale est compacte, mais on peut toujours la voir comme une superposition d'ondes de Fourier élémentaires e^{ikx} prenant toutes les valeurs de k possibles. Sur la base de l'argumentation précédente, chacune de ces ondes élémentaires propage son nombre d'ondes et sa fréquence à sa propre vitesse de groupe. On sait alors comment ces fréquences et nombre d'ondes se dispersent dans l'espace puisque :

$$C_G = \frac{x}{t} = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{k} \right)^{1/2} = \frac{g}{2\omega}$$

On peut alors exprimer k et ω en fonction de x et t :

$$k = \frac{gt^2}{4x^2} \quad 9-41$$

$$\omega = \frac{gt}{2x}$$

En d'autres termes, si un observateur veut rester en phase avec une onde de Fourier de fréquence et nombre d'ondes fixé, il doit se déplacer à la vitesse de groupe. On peut donc dire que k et ω se déplacent à la vitesse de groupe. Les expressions 9-39 et 9-40 montrent que les longues périodes et grandes longueurs d'ondes sont les plus rapides, suivies par des ondes de plus en plus courtes. Avec 9-41, la phase $\theta = kx - \omega t$ devient :

$$\theta = -\frac{gt^2}{2x}$$

Le $\cos \theta$ est illustré ci-dessous pour des temps longs et loin de l'origine quand la dispersion a eu le temps d'agir.

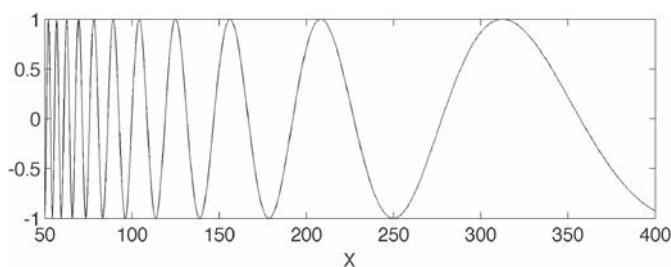


Figure 9.45

La forme du signal $\cos(gt^2/2x)$ à $t = 20$ sec suite à un jet de pierre en $x = 0$ à $t = 0$. L'amplitude du signal n'est pas prédite par cette fonction.

La figure 9.45 montre les vagues les plus longues à l'avant et les plus courtes à l'arrière. Les vagues générées en mer lors de tempêtes restent visibles longtemps car elles se dissipent peu (elles sont sans vorticité). Les relations 9-41 ont permis de relier des vagues observées sur la côte Sud de la Californie (San Diego) à des zones de génération de tempêtes localisées dans les « *roaring forties* » de la ceinture Antarctique.

9.5.6 Questions de réflexion et concepts

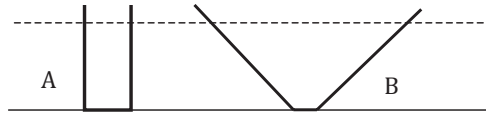
- R1. Quelle est la différence entre force et pression ?
- R2. Quelles sont les contraintes (forces par unité de surface) dans un fluide ?
- R3. En quoi consiste l'approximation d'un fluide incompressible ?
- R4. Qu'est-ce qu'un fluide parfait (ou idéal) ?

R5. Qu'est-ce qu'un écoulement permanent ?

R6. Quelle est l'origine de la viscosité d'un fluide ? Quand peut-on la négliger ?

R7. Comment la pression au robinet dans votre maison dépend-elle de la hauteur du château d'eau voisin si vous vivez à la campagne ?

R8. Les verres A et B sont remplis à la même hauteur, mais le verre B contient deux fois plus d'eau que le verre A. Pour quel verre la pression est-elle la plus forte au fond ? Est-ce que la force de pression au fond peut être plus petite que le poids de l'eau dans les verres ?



R9. Comment un navire composé d'un matériau comme l'acier qui coule dans l'eau peut-il bien flotter ?

R10. Un aqueduc est fait de tuyaux de différents diamètres. Comment la pression se compare-t-elle dans une partie de petit diamètre et une partie de grand diamètre ?

R11. Qu'est-ce que la relation de dispersion pour une onde ? Que veut-on dire par onde non dispersive ? par onde dispersive ?

R12. L'oreille humaine est sensible aux fréquences de 20 Hz à 20 kHz. Quelles sont les longueurs d'onde correspondantes ?

R13. L'histoire raconte que Newton détermina une valeur de la vitesse du son en tapant du pied régulièrement à un bout du cloître de Trinity College en utilisant l'écho réfléchi à l'autre bout. Réfléchissez à une façon précise de faire cela. Pourrait-on détecter la différence de vitesse du son entre l'hiver (0 °C) et l'été (25 °C) ?

9.5.7 Exercices

Statique des fluides

1. C Une salle à l'étage a des dimensions de largeur $W = 3,5$ m, longueur $L = 4,2$ m et hauteur $H = 2,4$ m.

(i) Quel est le poids de l'air dans la pièce ?

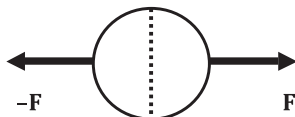
(ii) Quelle est la force exercée par l'atmosphère sur le sol ? Comparez avec (i). Pourquoi le plancher ne s'écroule-t-il pas ?

Masse volumique de l'air $\rho = 1,2$ kg m⁻³.

2. C L'équipage tente de s'échapper d'un sous-marin bloqué à 100 m de profondeur. Quelle force est nécessaire pour ouvrir un capot de 1 m sur 50 cm ? On suppose que la pression atmosphérique règne dans le sous-marin.

3. C Machine hydraulique et le principe de Pascal : la pédale de frein d'une voiture commande par un tube (diamètre $d = 10 \text{ mm}$), rempli de liquide de frein un piston (diamètre $D = 50 \text{ mm}$) qui vient appuyer un patin sur le tambour de la roue. Si on appuie sur la pédale de frein avec une force de 100 N , quelle est la force appliquée par le piston sur la roue ?

4. C En 1654, Otto von Guericke fit une démonstration pour montrer que deux attelages de huit chevaux ne pouvaient pas séparer deux hémisphères métalliques dans lesquels on a fait le vide.



Les demi-sphères sont minces de rayon R . Montrez que la force nécessaire pour séparer les hémisphères a pour module $F = \pi R^2 \Delta p$ avec Δp la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur.

A.N. : pour $p_{\text{EXT}} = 1 \text{ bar}$, $p_{\text{INT}} = 0,1 \text{ bar}$ et $R = 30 \text{ cm}$.

5. Un petit bateau chargé d'une grosse pierre flotte dans une piscine. Si la pierre tombe par-dessus bord et se retrouve au fond, le niveau de la piscine a-t-il augmenté, diminué ou est-il resté le même ? Ce problème est devenu célèbre, car posé à de grands physiciens, les réponses furent assez variées...

6. C Quand vous nagez dans la mer Morte, environ $1/3$ de votre corps est émergé. Quelle est la densité de l'eau ?

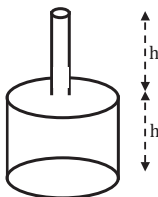
7. C Une coque sphérique creuse de rayon r , d'épaisseur t , de densité $d = 8$ flotte sur l'eau et est à demi-submergée.

Montrez que son épaisseur t vaut :

$$t = r/48$$

Que peut-on dire de la stabilité de cet équilibre ? Qu'est-ce que cela suggère sur la stabilité des navires ?

8. Le tonneau de Pascal

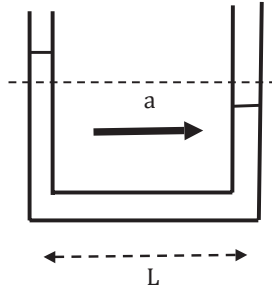


Le tuyau mince au-dessus et le tonneau ont même hauteur $h = 1,80 \text{ m}$, mais des rayons très différents, $r = 5 \text{ cm}$ pour le tuyau, $R = 50 \text{ cm}$ pour le tonneau.

Calculez le rapport entre le poids total de l'eau contenue et la force de pression exercée au fond du tonneau. Pourquoi n'est-il pas égal à un ?

Pascal montra que l'on peut faire exploser un tonneau assez facilement en ajoutant une très petite quantité d'eau dans un long tube fin disposé verticalement au-dessus du tonneau. Expliquez.

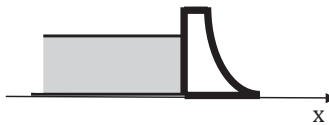
9. C Tube en U



Ce tube en U est posé dans une voiture qui accélère vers la droite avec une accélération horizontale constante a . Déterminez la différence de niveau qui s'établit entre les deux branches du tube à l'équilibre. On pourrait d'ailleurs se servir de cette expérience pour déterminer a .

Indice : examinez séparément les branches verticales et la base horizontale.

10. C Un barrage de montagne bloque l'eau d'un lac de profondeur D sur une largeur W .



- (i) Calculez la résultante des forces de pression sur le barrage.
- (ii) Calculez la résultante du moment des forces par rapport au sol (l'axe x sur le dessin).

En déduire le point d'application de la résultante des forces fournissant le même moment résultant.

11. C Calculez la masse de l'atmosphère de la Terre à partir de la pression atmosphérique moyenne au sol et du rayon de la Terre $R_T = 6\,370 \text{ km}$.

12. C Les gouttes de pluie assez grosses, de rayon compris entre 0,6 mm et 2 mm, ont des vitesses limites qui résultent de l'équilibre entre force de traînée en v^2 (voir l'expression complète dans le chapitre) et leur poids. En déduire la loi de la vitesse terminale v en fonction du rayon r des gouttes $v = f(r)$. Rendre la relation quantitative sachant que $v = 6 \text{ m s}^{-1}$ pour $r = 1 \text{ mm}$.

Note : les plus grosses gouttes de pluie ne dépassent pas 3 mm.

Conservation de la masse

13. La section de l'aorte d'une personne normale est de 3 cm^2 et la vitesse du sang de 30 cm s^{-1} . Un vaisseau capillaire a un diamètre de 6 microns et la vitesse du sang dans les capillaires n'est que de $0,05 \text{ cm s}^{-1}$. Combien de vaisseaux capillaires une personne normale possède-t-elle ?

14. C Au large de la côte américaine, le Gulf Stream a un débit de $100 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Sa largeur est de 100 km et la profondeur est de 4 000 m. Estimez la vitesse moyenne du courant sur la section.

15. Sur les instructions de la Ville de Paris, une bouche d'incendie garantit un débit de $60 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$ à une pression minimale de 1 bar en sortie. Une lance d'incendie se termine par un embout conique convergent. Le premier nombre est le diamètre d'entrée en cm, le deuxième le diamètre de sortie en cm. Une lance d'incendie de 100/25 est connectée à cette bouche. Quelle vitesse de jet est atteinte en sortie ? La hauteur du toit de Notre-Dame est de 43 m. L'eau de cette lance aurait-elle atteint le toit ? Et les tours qui culminent à 69 m ?

Avec la relation de Bernoulli, calculez la pression amont nécessaire dans la bouche d'incendie pour garantir ce débit de sortie à 1 bar.

Lignes de courant et trajectoires des particules fluides

Une ligne de courant est une courbe tangente au vecteur vitesse en tous points de l'écoulement à un instant t . La conservation de la masse indique que la vitesse (module) est d'autant plus forte lorsque les lignes de courant se rapprochent. Une particule fluide a une vitesse égale à la vitesse de l'écoulement au point et à l'instant où elle se trouve. Quand l'écoulement est permanent, ligne de courant et trajectoires des particules sont identiques, mais ce n'est plus le cas quand le vecteur vitesse dépend du temps. Pour un champ de vitesse bidimensionnel (u_1, u_2) fonction de x_1, x_2 et du temps t , l'équation des lignes de courant est :

$$\frac{dx_1}{u_1} = \frac{dx_2}{u_2}$$

avec t fixé.

L'équation de la trajectoire d'une particule fluide située en x_{10} , x_{20} à $t = 0$ est donnée par :

$$\frac{dx_1}{dt} = u_1(x_1, x_2, t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = u_2(x_1, x_2, t)$$

avec les conditions initiales :

$$x_1(t=0)=x_{10} \text{ et } x_2(t=0)=x_{20}$$

Connaissant la trajectoire de la particule d'équations $x_1(t)$, $x_2(t)$, il est facile de calculer son accélération, le point de vue de Lagrange :

$$a_1 = \frac{d^2 x_1}{dt^2}$$

$$a_2 = \frac{d^2 x_2}{dt^2}$$

Mais on peut aussi calculer l'accélération de la particule directement à partir du champ de vitesses (u_1 , u_2) fonction de x_1 , x_2 et du temps t , le point de vue d'Euler, une généralisation de 9-17 :

$$a_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

$$a_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

une expression qui révèle toute la complexité de la deuxième loi de Newton pour les fluides.

16. C Soit le champ de vitesse bidimensionnel dans le repère x_1 , x_2 :

$$u_1 = -cx_1$$

$$u_2 = cx_2$$

Calculez les trajectoires des particules fluides et les lignes de courant.

En déduire l'accélération d'une particule fluide. Calculez aussi l'accélération par le point de vue d'Euler et comparez.

17. La circulation horizontale des vents en altitude est décrite par le champ de vitesse suivant, avec l'axe x_1 vers l'est et l'axe x_2 vers le nord :

$$u_1 = u_0$$

$$u_2 = v_0 \cos(kx_1 - \omega t)$$

où u_0 , v_0 , k et ω sont des constantes. La vitesse positive u_1 vers l'est représente les vents d'ouest du *jet stream* tandis que la vitesse u_2 vers le nord est une propagation vers l'est modélisant le passage des dépressions quand k et ω sont positifs.

Déterminez la ligne de courant et la trajectoire des particules passant par l'origine $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ à $t = 0$. Expliquez la différence.

Étudiez les cas limites $k = 0$ et $\omega = 0$.

Relation de Bernoulli

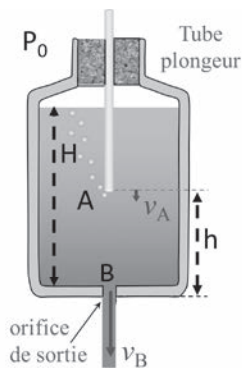
18. C Dans une bonne tempête d'hiver curieusement le vent a tendance à vouloir soulever le toit d'une maison. Pourquoi ?



Indice : comparez les pressions sur deux lignes de courant venant de l'infini, l'une peu perturbée passant au-dessus du toit et l'autre s'arrêtant sur un mur (auquel cas la vitesse est nulle). La pression en un tel point de stagnation est supposée la même que dans la maison.

19. C Un bocal cylindrique (surface A , hauteur H) se vide grâce à un trou situé au fond de surface a . Combien de temps cela prend-il pour que le bocal se vide ?

20. Le vase de Mariotte : un dispositif à débit constant.

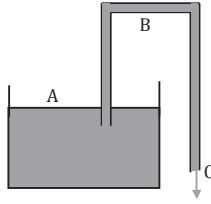


Il s'agit d'un dispositif ingénieux pour maintenir un débit constant en sortie en B. Un tube qui communique à l'air libre plonge dans le liquide jusqu'au point A. Le bouchon ne laisse pas passer l'air.

(i) Trouvez la vitesse en B et montrez qu'elle est constante.

(ii) Si P_0 est la pression atmosphérique, indiquez comment la pression de l'air dans le bocal évolue quand il se vide.

21. * C Très pratique, mais comment marche un siphon ?



Le tube a une section constante. De quoi dépend la vitesse en C ?

Appliquez la relation de Bernoulli sur une ligne de courant qui part de la surface libre dans le bocal en A, rentre dans le tube et sort en C. De quoi dépend le débit en C ? On examinera aussi comment varie la pression le long du tube. Que vaut-elle en B ? Une expérience facile à faire.

22. C De Young-Freeman. Du sang circule dans une grosse artère coronaire et on voudrait savoir si elle est partiellement obstruée par des plaques de cholestérol. On mesure la vitesse V_1 en amont de 30 cm s^{-1} . La pression est $p_1 = 1,2 \times 10^4 \text{ Pa}$ en amont et $p_2 = 1,2 \times 10^4 \text{ Pa}$ en aval. La masse volumique du sang est $\rho = 1,06 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$. Quelle est la fraction de la section de l'artère qui est obstruée ? À la différence de l'exercice 13, on néglige ici les effets de la viscosité car le tube artériel est grand.

23. C Le jet vertical qui sort d'un robinet s'amincit au cours de sa descente. Pourquoi ? Trouvez comment la vitesse de l'eau varie en fonction de la hauteur de chute. Trouvez comment l'aire de la section du jet varie en fonction de cette hauteur puis comment le rayon du jet varie en fonction de la distance au robinet.

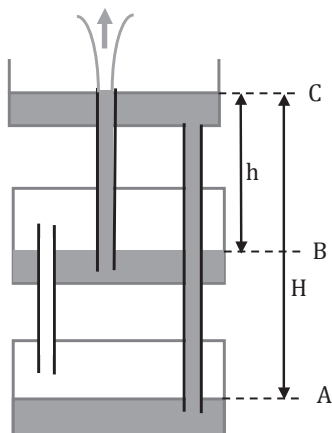
24. C L'eau de la ville arrive dans une maison par une canalisation, un tuyau de rayon 1 cm , à la pression de $2,5 \text{ bars}$ avec une vitesse de $1,5 \text{ m s}^{-1}$. L'eau est amenée 4 m plus haut dans une salle de bain par un tuyau plus fin de $0,5 \text{ cm}$ de rayon. Déterminez la pression, la vitesse et le débit au niveau de la salle de bain. On néglige le frottement, les pertes dans les coudes des tuyaux, etc. et on étudie le régime permanent.

25. C L'effet Coanda



Quand on met une cuiller ou son doigt à moitié dans le jet d'un robinet, celui-ci est fortement dévié vers la cuiller ou le doigt. Expliquez.

26. C La fontaine de Heron se présente ainsi :



Son avantage est que toute l'hydraulique se trouve cachée sous le bac supérieur qui reste seul visible. Sur la figure, l'eau est grisée, l'air est en blanc.

Calculez la vitesse du jet au niveau de sortie C sur la figure en fonction de h et H ainsi que la hauteur à laquelle il s'élève.

Indice : calculez la pression hydrostatique en A et B, puis appliquez la relation de Bernoulli sur une ligne de courant entre les surfaces libres B et C.

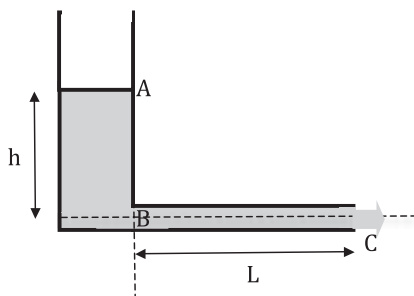
27. C Le shoot banane d'après l'entraîneur G. Lamprey (joueur de classe mondiale)

Quand on frappe le ballon sur le côté, on donne une rotation à la balle. Quand vous frappez sur la droite, le ballon exécute une courbe vers la gauche et inversement. La courbe est d'autant plus prononcée que la rotation du ballon est forte. Expliquez.

Note : il faut visualiser correctement l'écoulement de l'air autour du ballon et appliquer la relation de Bernoulli.

Viscosité

28. * C Viscosimètre



La figure montre un grand réservoir de surface A et de hauteur h connecté à un tube circulaire fin horizontal de rayon R et de longueur L . Le fluide est visqueux et on veut utiliser ce dispositif pour déterminer sa viscosité. On suppose que le réservoir est grand de sorte que h reste à peu près constant. On pourrait aussi utiliser le dispositif de l'exercice 20 pour stabiliser le débit. On supposera aussi que l'on peut négliger les accélérations et que les conditions de l'écoulement permanent restent valables. Notez que l'expérience est semblable à celle de Reynolds pour montrer l'apparition de la turbulence.

(i) Indiquez sous quelle condition on peut considérer l'équilibre comme hydrostatique dans le grand réservoir. Calculez alors la pression en B.

(ii) En utilisant l'écoulement de Poiseuille-Hagen dans le tube fin, trouvez la relation entre le débit en C et la hauteur h du réservoir (la longueur AB).

(iii) Comme il est plus difficile de mesurer un débit, on se propose de mesurer le temps T nécessaire pour vider le réservoir de moitié. Trouvez la relation entre T et la viscosité.

Pour que le débit soit stable, l'expérience de Reynolds indique que le flot devient turbulent et n'obéit plus à la loi de Poiseuille-Hagen si le nombre de Reynolds UR/ν dépasse environ 10^3 . En déduire une limite sur la hauteur h pour respecter cette condition.

29. Le débit du sang dans une artère mince gouverné par la relation de Poiseuille-Hagen varie rapidement avec le diamètre. Il peut donc être sérieusement diminué par une présence de cholestérol assez faible dans cette artère. Si le débit diminue de 50 %, de combien le diamètre de l'artère est-il réduit ? On suppose que le gradient de pression imposé par le cœur reste le même.

Flots circulaires

30. * C Quand on donne un coup de rame, on observe un ou deux petits tourbillons dans l'eau. Dans tous les cas on observe un creux de la surface libre associé avec le tourbillon (et jamais une bosse). Pourquoi ?

Indice : la seule force horizontale disponible pour faire tourner le fluide est la force de pression et pour avoir un mouvement circulaire, il faut une force centripète. En déduire une relation entre le gradient de pression radiale et la vitesse du tourbillon.

Les tourbillons de petite taille dans l'eau ou dans l'air (les tornades) ont des profils de vitesse qui sont souvent des rotations solides près du centre et des décroissances en $1/r$ à grande distance du centre. Ce type de structure est un vortex de Rankine. Le champ de vitesse tangentielle du tourbillon de Rankine a la forme suivante :

$$r \leq r_0 \quad v = \Omega r$$

$$r \geq r_0 \quad v = \Omega \frac{r_0^2}{r}$$

Calculez la déflexion de la surface libre du tourbillon dans l'eau.

A.N. : $r_0 = 50 \text{ cm}$ et $v(r_0) = 1 \text{ m s}^{-1}$.

La même physique permet de trouver comment la pression varie dans une tornade. Trouvez la chute de pression au centre de la tornade pour des valeurs observées typiques $r_0 = 100 \text{ m}$ pour un vent maximal $v(r_0) = 100 \text{ m s}^{-1}$. Pour en savoir plus, voir l'article de Baker et Sterling, 2017, "Modelling wind fields and debris flights in tornadoes", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, **168**, 312-321.

31. * C Montrez que la surface libre d'un bocal tournant en rotation solide prend la forme d'un parabololoïde de révolution : $z = z_0 + \frac{\Omega^2 r^2}{2g}$ (z_0 est la profondeur sur l'axe de rotation, Ω la vitesse angulaire et r la distance à l'axe de rotation).

Indice : écrire les équations du mouvement dans les directions radiale et verticale puis trouvez le champ de pression. La surface libre est une surface de pression constante ($p_{\text{ATM}} = \text{constante}$).

32. Un fleuve s'écoule à 5 km h^{-1} .

(i) Quel équilibre dynamique détermine le champ de pression (et donc la surface libre) lorsque le fleuve effectue un virage de rayon r ?

(ii) Le frottement près du fond ralentit l'écoulement alors que le gradient de pression est le même. Du coup l'eau doit s'écouler des hautes vers les basses pressions entraînant le transport du sédiment. En déduire la forme du fond causée par l'accumulation des sédiments dans un méandre. Cette physique mentionnée par Einstein est la même que celle qui explique l'accumulation des feuilles de thé au centre de la tasse lorsqu'on remue le liquide de façon circulaire.

Géostrophie

33. C Le Gulf Stream est un courant océanique majeur. Il se dirige vers le nord le long de la côte américaine (35°N). C'est une veine d'eau de 100 km de large et la surface libre augmente de 1 m vers l'est sur cette largeur. Utilisez l'équilibre géostrophique pour trouver la vitesse du courant. *Indice* : utilisez la relation hydrostatique pour trouver la variation de pression à travers le courant.

34. Estimez la vitesse du vent géostrophique en quelques points sur la carte 9-34.

35. C Les régatiers de l'hémisphère nord savent que les nuages qu'ils voient devant eux passent généralement sur leur gauche quand ils reçoivent le vent de face. Le vent en altitude (au niveau des nuages) est géostrophique mais le vent au niveau de la mer n'est plus exactement géostrophique car le frottement au sol intervient.

Ce frottement induit une petite composante du vent au sol dirigée des hautes vers les basses pressions. Expliquez la logique de la règle de régale ci-dessus.

Ondes dans les fluides

36. La surface libre d'une onde longue de gravité est donnée par : $\eta(x,t) = a \cos(kx - \omega t)$ dans un fluide de profondeur H (k et ω sont positifs). Calculez la vitesse u puis les quantités $\partial\eta/\partial t$ et $\partial u/\partial t$. Représentez graphiquement sur une longueur d'onde toutes ces quantités à l'instant $t = 0$. Expliquez la propagation de l'onde vers les x positifs entre $t = 0$ et $t = \Delta t$ en vous servant des équations du mouvement 9-19 et 9-20.

37. * C Considérons l'oscillation des ondes de gravité dans un lac étroit de longueur L (problème à une dimension). La nouveauté est l'existence de conditions aux limites de vitesse nulle $u = 0$ aux extrémités du lac en $x = 0$ et $x = L$. Supposez une solution de l'équation des ondes 9-21 de la forme $\eta(x, t) = f(x) \exp(-i\omega t)$.

(i) Déterminez l'équation satisfaite par f . Quelles conditions aux limites sur η et donc sur f faut-il imposer en $x = 0$ et $x = L$? Montrez que des solutions n'existent que pour certaines fréquences discrètes. Ces solutions libres sont appelées *modes propres* et jouent un grand rôle en physique.

(ii) Calculez la période la plus longue T_1 et dessinez la solution correspondante en fonction de x . Comparez T_1 avec les données suivantes :

Lac de Genève : $L = 70$ km, $H = 160$ m, $T = 73,5$ min

Loch Earn (Écosse) : $L = 10$ km, $h = 60$ m, $T = 14,5$ min

Lac Baïkal : $L = 665$ km, $h = 680$ m, $T = 4,64$ h

38. Trouver la longueur d'un tuyau d'orgue oscillant à la fréquence f_1 fondamentale du clavier $f_1 = 440$ Hz. Prendre $T_0 = 15$ °C. L'approche de l'exercice 22 peut être adaptée compte tenu de l'analogie onde de gravité - onde acoustique. Déterminez d'abord l'équation d'onde pour la pression p' en éliminant u entre les équations 9-24 et 9-28. Ici les conditions aux limites sont celles d'un tuyau fermé en $x = 0$, donc $u(x = 0) = 0$ mais *ouvert* en $x = L$. La pression s'ajuste en ce point à la pression atmosphérique extérieure p_0 et donc $p'(x = L) = 0$.

39. * C Supposons qu'une oscillation de marée $\eta = \eta_0 \cos \omega t$ soit imposée à l'entrée d'un canal de longueur L et de profondeur H . Le canal communique avec l'océan en $x = 0$ et est fermé en $x = L$. Le but de l'exercice est de calculer la réponse forcée (hauteur et courant) dans le canal à la fréquence ω . On choisira une solution forcée de la forme $\eta = f(x) \cos \omega t$ et on cherchera une équation différentielle gouvernant $f(x)$. Montrez que les deux conditions aux limites à satisfaire sont $f(x = 0) = \eta_0$ et $f'(x = L) = 0$. Montrez que la solution devient infinie pour des fréquences de résonance que l'on déterminera. Expliquez. Il est conseillé de relire le premier exemple

du § 6.8.1 sur le phénomène de résonance. Conclure sur l'importance de la marée lunaire semi-diurne dite M_2 de période $T = 12 \text{ h } 25 \text{ min}$ pour expliquer le marnage de 17 m (entre marée haute et marée basse) dans la baie de Fundy au Nouveau-Brunswick, Canada. On prendra $L = 270 \text{ km}$ et $H = 75 \text{ m}$. Calculez le coefficient d'amplification de la marée M_2 dans la baie.

40. On peut mesurer la vitesse du son à l'aide d'un tube de Kundt. Le tube est fermé à une extrémité et muni d'un piston à l'autre, piston qui peut osciller avec une fréquence donnée. On répand de la poudre dans le tube. Pour certaines fréquences à déterminer, une onde stationnaire s'établit et la poudre se rassemble en certains nœuds. Montrez que la distance entre deux nœuds adjacents est une demi-longueur d'onde. En déduire la vitesse du son et le coefficient γ du gaz considéré. Cet exercice est l'analogue acoustique de l'exercice précédent pour les ondes longues, la nouveauté est d'identifier les zones de convergence de la poudre.

41. L'échographie médicale envoie une onde sonore dans le corps humain et analyse l'écho réfléchi différent selon les frontières entre organes. L'écho reçu est ensuite inversé pour remonter à la forme provoquant la réflexion. Ce sont les petites variations de la vitesse de phase, autour de 1500 m s^{-1} , dans le corps qui permettent de discerner l'intérieur. Les fréquences des ultrasons utilisés sont dans le régime 2 à 20 MHz. Pour avoir une bonne résolution spatiale de l'image, les longueurs d'onde ne doivent pas dépasser le mm. Calculez les longueurs d'onde utilisées et commentez.

42. Une onde de pression acoustique de la forme $p = p_{\text{MAX}} \sin(kx - \omega t)$ avec $p_{\text{MAX}} = 10^{-2} \text{ Pa}$ et une fréquence $f = 2000 \text{ Hz}$ se propage dans l'air à 20°C . Calculez la vitesse du fluide puis son déplacement. Calculez leurs amplitudes respectives. En déduire I , l'intensité sonore en décibel. Pour la connaître, il faudra calculer le flux moyen d'énergie par unité de surface et par unité de temps $\langle p u \rangle$, les symboles $\langle \dots \rangle$ dénotant la moyenne sur une période.

43. C Des vagues assimilables à des ondes de gravité en eau profonde sont générées par une tempête au point x_0 à l'instant $t = 0$. Ces vagues sont ensuite observées par des surfeurs à la côte en x . Ils arrivent à déterminer la période T des vagues et donc leur fréquence ω . Expliquez comment la longueur d'onde et la fréquence vont évoluer dans le temps. Comment pourraient-ils prédire la distance de la tempête $|x - x_0|$?

44. C Les bateaux créent des ondes de gravité (en eau profonde) et le transfert d'énergie du bateau vers ces vagues est la cause de la force de résistance des vagues. Celle-ci devient l'obstacle majeur de la résistance à l'avancement quand la vitesse U est grande.

(i) Le nombre de Froude $F = \frac{U}{\sqrt{gL}}$ avec U la vitesse du bateau, g la gravité et L la longueur du bateau à la flottaison est le nombre utilisé quand on discute de la résistance de vagues. La longueur à la flottaison est la longueur de la coque en contact avec l'eau. Montrez que F est sans dimension.

(ii) Le bateau génère des vagues telles que $c = U$ avec c la vitesse de phase. Les vagues sont alors stationnaires dans le référentiel du bateau. Donnez la valeur du nombre de Froude en fonction du nombre n de vagues générées le long de la coque.

(iii) En déduire comment la vitesse maximale des bateaux varie avec leur longueur à la flottaison L .

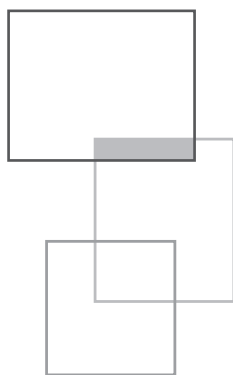
Un des meilleurs voiliers à quille, le Dragon, atteint une vitesse limite $U_{\text{LIM}} = 1,4 \sqrt{L}$, avec U en nœuds (1 mille marin = 1 852 m à l'heure) et L en pieds (1 pied = 0,3048 m). Comparez avec la valeur théorique ci-dessus.

Note : un engin léger et muni d'une forte puissance de propulsion peut dépasser cette limite de vagues. C'est le régime du surf des planches à voile ou des bateaux à foils du Vendée Globe ou de la coupe de l'America de 2021.

45. Reprendre la dynamique des ondes de gravité en eau profonde, mais en introduisant la présence du fond en $z = -H$. Montrez que la relation de dispersion est maintenant dans le cas général :

$$\omega^2 = gk \tanh(kH)$$

Explorez les deux limites $kH \ll 1$ et $kH \gg 1$. Montrez que la vitesse de phase $c = \omega/k$ est correcte à 3 % près dans la limite onde longue si $H < 0,07 \lambda$ et est correcte aussi à 3 % près dans la limite onde courte si $H > 0,28 \lambda$.



Chapitre 10

Thermodynamique

10.1 Introduction

Réflexions sur la puissance motrice du feu, c'est par ce titre que Carnot jeta en 1824 les fondements de la Thermodynamique. Un article d'ingénieur qui, analysant les machines à vapeur, découvrit la deuxième loi de la thermodynamique qui régit toutes les transformations énergétiques dans l'univers. La question centrale à l'époque était de pouvoir optimiser la conversion de chaleur en travail mécanique, l'inverse, la transformation d'un travail mécanique en chaleur, étant déjà connu au Paléolithique dans la façon de frotter deux bouts de bois l'un contre l'autre pour faire du feu. En 1842, Mayer découvrit que la chaleur était elle-même une énergie qui pouvait être transformée en d'autres formes d'énergie. Les lois de la Thermodynamique permirent de trouver comment améliorer la machine à vapeur et les moteurs thermiques pour propulser automobiles et avions amenant la révolution industrielle du XIX^e siècle. La compréhension physique de ces lois est venue plus tardivement, une fois que la nature moléculaire de la matière ait été identifiée et prise en compte. Ce sont en effet les mouvements moléculaires régis par les lois de la mécanique et de l'électricité qui permettent de donner un sens à ces nouvelles quantités que sont l'énergie interne et la température. La mécanique classique permet de calculer l'énergie de quelques corps en interaction, mais cette approche est impraticable pour suivre les quelques milliards de molécules d'un liquide ou d'un gaz. Rappelons par exemple qu'une seule mole d'azote (N_2), 70 % de l'air que l'on respire, a une masse de 28 grammes, occupe 22,4 litres aux conditions standards de température et de pression, mais contient déjà un nombre de molécules gigantesque donné par

le nombre d'Avogadro $N_A = 6,02 \times 10^{23}$! De toutes façons, le calcul individuel du déplacement d'une molécule ne servirait pas à grand-chose puisque ce déplacement ne peut pas être observé. En revanche, on sait mesurer la pression, la température, l'énergie d'un volume de matière, des quantités macroscopiques qui sont des moyennes statistiques sur ces milliards de milliards de molécules. L'objectif de la mécanique statistique introduite par Maxwell et Boltzmann a été de relier quantitativement les moyennes sur l'ensemble des molécules présentes dans le volume aux quantités macroscopiques : relier la pression aux collisions moléculaires sur la paroi d'un container ou encore relier la température à l'énergie cinétique des molécules. En permettant de donner cette interprétation moléculaire aux lois macroscopiques empiriques de la thermodynamique classique, des quantités comme les chaleurs spécifiques des gaz ont pu être prédites. La matière possède une énorme quantité d'énergie thermique associée aux mouvements des molécules, alors pourquoi ne pas s'en servir ? La réponse vient de ce que ces mouvements sont désordonnés et que l'énergie utile pour faire un travail mécanique demande des mouvements ordonnés. Comprendre comment utiliser ce désordre de l'énergie thermique est à l'origine de la deuxième loi de la thermodynamique qui impose sa règle à toutes les activités de l'univers.

La première partie de ce chapitre est une introduction classique aux deux facettes macro et micro de la thermodynamique. Les applications concernent essentiellement les gaz dont l'usage a ouvert la voie à tant d'applications industrielles. La deuxième partie détaille les transformations d'énergie les plus importantes pour les activités humaines. Les énergies primaires à disposition pour produire de l'électricité sont intercomparées au travers de trois variables, rendements thermodynamiques, ressources et impacts environnementaux. Un accent particulier est mis sur l'énergie solaire, la seule énergie disponible pour des milliards d'années, et la réaction de photosynthèse sans laquelle notre planète ressemblerait beaucoup à l'une de ces voisines guère hospitalières.

10.2 Chaleur, température et la première loi de la thermodynamique

10.2.1 *Quelques définitions*

- (a) Un système thermodynamique est un système macroscopique constitué d'un très grand nombre de particules, atomes, molécules et charges électriques qui forment la matière solide ou fluide (gaz ou liquide). Les interactions mécaniques se font par l'intermédiaire de forces et de travail. Les interactions thermiques demandent d'ajouter la température des corps et les transferts de chaleur.
- (b) Tout ce qui est extérieur au système que l'on a défini est l'environnement. Les échanges entre le système et son environnement sont définis ainsi :
 - système isolé : aucun échange de masse et d'énergie n'est possible avec l'environnement. De l'eau dans un thermos dont les parois sont parfaitement isolantes est un système isolé ;

- système fermé : les échanges d'énergie sont possibles, mais aucun échange de masse n'est permis. Une planète est un système fermé ;
 - système ouvert : masse et énergie peuvent s'échanger avec l'environnement. L'atmosphère, l'océan, ou la terre solide sont des systèmes ouverts.
- (c) Macroscopique/microscopique : l'approche macroscopique de la thermodynamique initiée par Carnot ne s'occupe pas de la nature moléculaire de la matière et ses lois (ou principes) proviennent de résultats d'expériences sur le fonctionnement des moteurs thermiques. L'approche microscopique de la mécanique statistique qui prend en compte explicitement la nature moléculaire de la matière commence avec Maxwell et Boltzmann.
- (d) Les paramètres d'un système sont les quantités macroscopiques que l'on peut mesurer expérimentalement, comme la pression p , le volume V ou la température T qui permettent de définir l'état du système. On utilise alternativement les mots variables d'état ou propriétés.
- (e) Un système est homogène quand il est composé de molécules ou d'atomes dans la même phase solide, liquide ou gaz. Quand les phases sont différentes, le système est hétérogène.
- (f) L'état d'un système est spécifié par les valeurs de tous les paramètres nécessaires.
- (g) L'équilibre thermodynamique est obtenu quand l'état du système ne change pas dans le temps. À l'équilibre thermodynamique, les paramètres macroscopiques prennent des valeurs bien définies. En revanche, lorsque le système est hors d'équilibre, les paramètres comme la pression, la température peuvent varier d'un point à un autre, et d'un instant à l'autre. Dans un fluide en mouvement, l'équilibre thermodynamique devient local et s'applique au niveau de la particule fluide prise comme système.
- (h) L'équation d'état est une relation fonctionnelle entre les paramètres d'un système à l'équilibre. Si par exemple p , V et T sont les paramètres du système, l'équilibre est représenté par un point dans l'espace à trois dimensions p , V , T . L'équation d'état de la forme $f(p, V, T) = 0$ réduit donc le nombre de variables indépendantes de 3 à 2 et un état d'équilibre peut maintenant être représenté dans un espace à deux dimensions. Le plus classique est le diagramme (V , p) pour l'analyse d'un gaz.
- (i) Une transformation thermodynamique est un changement d'état du système. Si l'état initial est un état d'équilibre, seul un changement des conditions extérieures de l'environnement peut être à l'origine de la transformation. Ces opérations perturbent l'état d'équilibre du système qui sera temporairement hors d'équilibre.
- (j) Une transformation est dite quasi statique si les conditions extérieures changent suffisamment lentement pour que le système soit toujours proche d'un état d'équilibre pendant toute la transformation. Une transformation quasi statique est réversible quand le système revient sur ses pas quand les conditions extérieures retracent leur histoire. Il n'y a alors aucun changement du système ou

de son environnement lorsque l'on est revenu au point de départ. En langage imagé, un système subit une transformation réversible si on peut observer expérimentalement le film de l'évolution du système aussi bien en marche avant qu'en marche arrière.

- (k) Transformations irréversibles : ce sont les transformations spontanées que l'on voit dans la nature et qui se déroulent toujours dans la direction d'un temps croissant. À la différence des précédentes, on n'observe jamais le film se dérouler en marche arrière. Attention, ces transformations peuvent être rapides ou lentes. Exemples : un ballon qui se dégonfle, l'érosion d'une montagne. À cause notamment du frottement, de la conduction thermique ou de la limite élastique des matériaux, les transformations réversibles ne sont qu'un idéal, une approximation des phénomènes naturels, mais elles jouent un grand rôle car des équations bien définies et des résultats quantitatifs peuvent être obtenus sous cette hypothèse.
- (l) Grandeurs extensives/intensives : considérons un système homogène en équilibre et partageons-le en deux sous-systèmes à l'équilibre (en mettant une barrière par exemple). Un paramètre prend la valeur x_1 dans le sous-système #1 et x_2 dans le sous-système #2. Ce paramètre est dit extensif si sa valeur dans le système réuni {1 + 2} est $x = x_1 + x_2$, la somme des valeurs dans les deux sous-systèmes. Volume et masse sont des paramètres extensifs. Un paramètre est dit intensif si $x = x_1 = x_2$. Pression, température et masse volumique sont des paramètres intensifs.

10.2.2 Le travail

La notion de travail vient directement de la mécanique. Les forces considérées dans ce chapitre sont les forces de pression qui résultent des échanges de quantité de mouvement lors des collisions des molécules fluides sur une paroi.

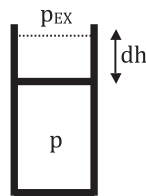


Figure 10.1

Un gaz est contenu dans un cylindre maintenu par un piston mobile. La pression p règne à l'intérieur du cylindre et p_{EX} à l'extérieur.

Deux éléments fluides séparés par une surface exercent l'un sur l'autre une force perpendiculaire à la surface de contact et proportionnelle à l'aire de cette surface.

La force par unité de surface est la pression et s'exerce entre les deux parties d'un fluide séparées par une surface élémentaire (voir la relation 9-2). Son unité dans le Système international est le pascal $\text{Pa} = 1 \text{ N m}^{-2}$ avec son multiple le bar $= 10^5 \text{ Pa}$. Historiquement l'unité était 1 atm, la valeur de la pression atmosphérique quand le baromètre à mercure a une hauteur de 760 mm. Encore utilisée dans certains contextes, elle vaut :

$$1 \text{ atm} = 1,01325 \times 10^5 \text{ Pa} = 1,01325 \text{ bar}$$

La figure 10.1 montre un gaz contenu dans un cylindre dont le volume peut varier grâce à un piston mobile. La force exercée par l'extérieur sur le gaz du cylindre considéré comme système est dirigée vers l'intérieur et vaut $p_{\text{EX}}A$ si p_{EX} est la pression à l'extérieur et A la surface du piston. Lorsque le piston se déplace de dh , le travail exercé par la force extérieure sur le système est :

$$dW = -p_{\text{EX}}Adh$$

Le signe $-$ est là puisque le travail de la force extérieure est positif quand dh est négatif (le piston descend). Mais Adh est juste la variation du volume dV de sorte que :

$$dW = -p_{\text{EX}}dV \quad 10-1$$

Cette relation exprime le travail fait par l'environnement extérieur sur le système. Le travail dW est positif si le mouvement du piston est dans la direction de la force extérieure, donc une diminution de volume. Il sera négatif lors d'une augmentation du volume.

Supposons que le système subisse une transformation quasi statique et réversible : la pression intérieure et la pression extérieure restent alors quasi égales, $p \approx p_{\text{EX}}$ de sorte que 10-1 devient :

$$dW = -pdV \quad 10-2$$

Dans le cas particulier d'une transformation réversible, la relation 10-2 est intéressante, car elle permet de se servir de l'équation d'état pour exprimer p en fonction du volume et de la température. Si en revanche dans une transformation irréversible on impose brutalement une pression extérieure très différente de p , des courants apparaissent dans le gaz et les états intermédiaires ne sont plus des états d'équilibre, et on ne peut plus utiliser 10-2. En revanche, 10-1 reste toujours valable.

Considérons une transformation réversible qui fasse passer le système d'un état A à un état B, le travail fait sur le système est :

$$W = -\int_A^B pdV \quad 10-3$$

Les transformations importantes dans les applications sont les transformations cycliques qui ramènent le système à son état initial. Le système restant toujours proche de l'équilibre lors d'une transformation réversible, il peut donc être

représenté par un point sur un diagramme (V, p) et le cycle sera représenté par une courbe fermée sur ce même diagramme :

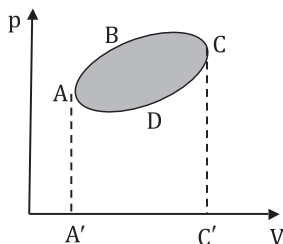


Figure 10.2

Considérons le travail fait durant la transformation ABC. C'est une expansion, il est donc négatif et égal à l'aire ABCC'A'A. Le travail fait pendant le retour CDA est une compression, donc positif et égal à l'aire CDAA'C'C. Le travail total exécuté sur le cycle est donc la différence de ces deux aires et donc l'aire délimitée par la région grisée sur la figure 10.2. Notez que ce travail est négatif, car le cycle est décrit dans le sens des aiguilles d'une montre. L'environnement extérieur fait un travail net négatif sur le système {gaz} et le système fait un travail positif sur l'environnement. Le signe du travail sera opposé si le cycle est parcouru dans l'autre sens. Les transformations particulières durant lesquelles p , V ou T sont maintenus constants sont dites isobare, isochore ou isotherme respectivement.

Dans une transformation isochore, le travail est nul. Dans une transformation isobare (par exemple à la pression atmosphérique) pour passer d'un volume V_1 à un volume V_2 c'est simplement :

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = - p \int_{V_1}^{V_2} dV = p (V_1 - V_2)$$

Une transformation isotherme peut être réalisée si le cylindre contenant le gaz est plongé dans un réservoir à température constante T . Le calcul est facile à faire pour le gaz parfait dont on connaît l'équation d'état 10-6, $pV = nRT$. Le travail pour faire passer le gaz d'un volume V_1 à un volume V_2 à la température T se calcule ainsi :

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = - nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) = nRT \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = p_1 V_1 \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$$

Le travail est proportionnel à la température et au logarithme du rapport des volumes, considérations centrales dans le design des moteurs. Ces deux exemples montrent que le travail pour passer d'un état 1 à un état 2 dépend clairement du chemin choisi (isobare ou isotherme) pour aller de 1 à 2. Le travail n'est donc pas une fonction d'état. Si la pression ne dépendait que du volume, l'intégrale 10-3 donnerait une valeur unique au travail. Mais la pression dépend du volume et de la température.

Note :

Le travail d'expansion de type 10-2 joue un grand rôle dans l'atmosphère, car la pression diminue fortement avec l'altitude. Quand une particule d'air monte à cause du relief ou parce que le sol est chaud, sa pression diminue, son volume augmente et un travail est fait sur l'environnement.

10.2.3 *La chaleur*

Que la nature de la chaleur soit un transfert d'énergie remonte à la nuit des temps : on peut allumer du feu en frottant deux morceaux de bois l'un contre l'autre... Mais si c'est un transfert d'énergie, sa nature est équivalente au travail. Une des démonstrations spectaculaires de cette équivalence est la conversion d'énergie mécanique en chaleur faite par Rumford. Il plongeait des cylindres dans l'eau qu'il forait pour en faire des canons et réussit à faire bouillir l'eau. La thermodynamique s'est développée pour comprendre comment on pouvait faire l'inverse, obtenir du travail mécanique à partir du feu. Deux quantités nouvelles apparaissent dans ce contexte, chaleur donc et température, deux notions présentes dans la vie quotidienne, mais qui ont une image floue. La sensation de chaleur est intimement liée à la lecture du thermomètre qui donne une température. L'équilibre mécanique de deux volumes de gaz communiquant par un piston mobile est obtenu quand la somme des forces est nulle et donc quand les pressions sont identiques dans les deux systèmes. Mais qu'en est-il de l'équilibre thermique ? L'équilibre thermique entre deux systèmes est assuré s'ils sont à la même température : on observe effectivement que deux corps mis en contact pendant un temps suffisamment long finissent toujours par acquiescer la même température (cette notion est explicitée au § 10.2.4).

La loi zéro de la thermodynamique s'exprime alors ainsi :

Loi zéro

10-4

L'égalité de la température est une condition nécessaire de l'équilibre thermique entre deux systèmes ou entre les deux parties d'un système. Et deux systèmes en équilibre thermique avec un troisième sont en équilibre entre eux.

Cette loi est donc à la base de l'existence même du thermomètre : on le met en contact assez longtemps avec le corps dont on veut déterminer la température.

Maintenant qu'est-ce que la chaleur ? Elle peut être définie par défaut : la chaleur est ce qui est absorbé par un système dont la température change alors qu'il ne subit aucun travail mécanique. La tasse de thé sur la table refroidit, car sa température est plus haute que celle de l'air dans la pièce. Elle perd de la chaleur jusqu'à ce que les deux températures soient égales et l'équilibre thermique rétabli. La chaleur est définie comme un transfert d'énergie entre l'énergie thermique de la tasse et l'énergie thermique de l'environnement (l'air de la pièce) où l'énergie thermique est l'énergie interne constituée des énergies cinétiques et potentielles des milliards d'atomes et de molécules qui composent la matière. Ce transfert d'énergie symbolisé par Q sera positif si le transfert d'énergie se fait vers le système et négatif dans le cas contraire.

Le système tasse de thé subit $Q < 0$ quand l'air de la pièce reçoit la quantité positive $Q' = -Q$. Quand la tasse de thé et l'air de la pièce sont à la même température, le transfert d'énergie devient nul. Ainsi la chaleur de la tasse n'existe pas et n'a aucun sens. Le mot chaleur utilisé partout n'est qu'un transfert d'énergie interne entre un corps et un autre.

La considération de la chaleur demande encore deux définitions :

- Un réservoir (ou une source) de chaleur est un système si grand que le gain ou la perte de chaleur ne modifie pas sa température.
- Un système est thermiquement isolé si aucun échange de chaleur n'est possible entre le système et l'environnement. On parle de mur adiabatique et une transformation d'un système sans aucun transfert de chaleur sera dite adiabatique.

À la différence de la pression, du volume ou de la température qui sont des paramètres d'état du système à l'équilibre, le travail et la chaleur ne le sont pas. Leur rôle est d'exprimer un transfert d'énergie du système vers son environnement et vice versa.

Absorption de chaleur par les solides et les liquides

Planck donne un exemple simple pour montrer la différence entre chaleur et température avec une expérience de calorimétrie. Un morceau de fer et un morceau de plomb de même masse, portés à $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, sont plongés dans deux récipients identiques remplis d'eau à $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. On s'aperçoit qu'à l'équilibre le récipient ayant reçu le morceau de fer a une température vraiment plus élevée que l'autre. La mesure du transfert de chaleur d'un corps se fait ainsi par la variation de la température d'une substance normale comme l'eau et cette expérience montre que le fer demande quatre fois plus de transfert d'énergie que le plomb pour une même variation ΔT entre l'état final et initial.

Un autre exemple est celui d'une casserole sur le feu remplie d'eau qui est en train de bouillir en créant de la vapeur d'eau. La température reste à $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ bien que la casserole reçoive de la chaleur constamment.

La variation de la température d'un corps soumis à un transfert d'énergie sous forme de chaleur dépend de sa capacité thermique, une caractéristique de la nature du matériau. Si Q est le transfert de chaleur correspondant à une petite variation de température ΔT , la capacité thermique ou calorifique C d'un corps s'exprime par :

$$Q = C\Delta T$$

où la capacité thermique C dépend des conditions du transfert d'énergie (pression ou volume constant). Le mot capacité n'est pas bien choisi, car il fait penser à tort que la chaleur est une propriété d'un corps. Mais non, la capacité thermique est juste le transfert de chaleur nécessaire pour augmenter la température du corps en question. Le transfert de chaleur qui élève la température d'un kg d'eau de 1 K (de $14,5$ à $15,5\text{ }^{\circ}\text{C}$) à la pression atmosphérique est 1 kcal , kilocalorie, tandis que la calorie, 1 cal , est le transfert de chaleur correspondant pour un gramme d'eau.

La capacité thermique de l'eau à pression constante est donc $C_p = 1 \text{ kcal K}^{-1}$ pour un kg d'eau. Comme la capacité thermique est proportionnelle à la masse, elle est souvent exprimée par kg ou par mole et on parle alors de chaleur spécifique. La masse molaire de l'eau étant de 18 grammes, la chaleur spécifique de l'eau à pression constante est $C_p = 18 \times 10^{-3} \times 10^3 = 18 \text{ cal K}^{-1} \text{ mole}^{-1}$. Ces unités de calorimétrie restent encore en usage, mais comme la chaleur est un transfert d'énergie, le joule (unité SI) a été adopté en 1948. La calorie est maintenant définie sans référence à la calorimétrie de l'eau en écrivant qu'exactement :

$$1 \text{ cal} = 4,1860 \text{ J}$$

Et pour l'eau C_p vaut $4\,190 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$. Les chaleurs spécifiques varient généralement lentement avec la température. Mais l'état thermodynamique ne dépend pas seulement de la température, il dépend aussi du volume et de la pression, de sorte qu'il est nécessaire de préciser si le transfert de chaleur se fait à volume constant ou à pression constante. Dans la plupart des cas, la capacité thermique des solides et liquides est indépendante de la pression et quelques valeurs sont données sur le tableau 10.1 (voir aussi tableau 10.6). Pour les gaz en revanche, la capacité thermique C dépend beaucoup de la façon dont le transfert Q est effectué, à pression ou à volume constant, notée C_p et C_v respectivement (voir § 10.3.3).

Tableau 10.1

Liquides $C_p \text{ [J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}]$		Solides $C_p \text{ [J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}]$	
Eau	4 190	Aluminium	900
Mercure	140	Cuivre	386
Alcool éthylique	2 430	Argent	236
		Fer	450
		Plomb	130
		Glace (-5°C)	2027
		Verre	840
		Roches	1 000

Pour déterminer expérimentalement la capacité thermique d'un corps de masse m , une méthode largement utilisée est de le chauffer avec une résistance électrique R pendant une durée Δt . La mesure du courant I et de la variation de la température du corps $T_F - T_I$, donnera directement C_p :

$$RI^2\Delta t = mC_p(T_F - T_I)$$

Cette égalité n'est valable qu'en l'absence de pertes de chaleur vers l'environnement. L'expérience nécessite la construction de murs adiabatiques pour annuler ces pertes.

Changement de phase

Quand de la chaleur est transférée à un matériau et que la température n'augmente pas, cela signifie qu'un changement de phase, solide-liquide, liquide-gaz ou solide-gaz, a lieu. Dans un solide, les molécules sont rangées dans une structure ordonnée à cause de leur attraction mutuelle. Elles sont plus libres de se mouvoir et donc plus énergétiques dans un liquide et encore plus dans un gaz. Faire fondre un solide demande de l'énergie pour libérer les atomes de leur structure et les faire passer de l'état solide à l'état liquide. Même chose pour vaporiser un liquide. Ces changements de phase se font à température constante, la température de fusion ou d'ébullition selon le cas. Le transfert de chaleur pour effectuer le changement de phase d'une masse m est :

$$Q = L m$$

avec L la chaleur latente de fusion (L_F) ou de vaporisation (L_V) selon les cas. Quelques valeurs sont données dans le tableau.

Tableau 10.2

Élément chimique	Température du point d'ébullition [K]	L_V [10^3 J kg^{-1}]	Température du point de fusion [K]	L_F [10^3 J kg^{-1}]
Hélium	4,23	20,8		
Hydrogène	20,37	449	13,84	58,6
Azote	77,36	199	63,18	25,5
Oxygène	54,36	13,8	90,19	213
Eau	373,12	2 256	273,15	334
Mercure	630	272	234	11,8
Cuivre	2 840	5 069	1 356	134
Aluminium	2 740	10 500	933,6	395
Plomb	1 893	871	600	22,9

10.2.4 La température et l'équation d'état des gaz parfaits

Le nouveau paramètre de la thermodynamique est la température dont la nature physique a demandé beaucoup de réflexions. Les sensations de chaud et de froid sont mesurées par un thermomètre qui est donc l'instrument qu'il faut analyser avant toutes autres considérations. Pour créer une échelle de température, il faut trouver un phénomène physique reproductible, choisir un point fixe standard et lui assigner une température standard. Au départ, le phénomène thermique a été

la dilatation thermique d'un matériau : le changement de la longueur d'un fluide (alcool ou mercure) qui se dilate ou se contracte dans un tube capillaire selon qu'il fait plus chaud ou plus froid. Un thermomètre de ce type définit l'échelle de température en degré Celsius. La valeur 0 °C est assignée à la température de la glace fondante et 100 °C à la température de l'eau bouillante à la pression atmosphérique standard. Une relation linéaire entre la longueur L observée du fluide du thermomètre et la température θ définit l'échelle des degrés Celsius :

$$\theta(^{\circ}\text{C}) = 100 \frac{L - L_0}{L_{100} - L_0}$$

Cette méthode reste toujours pratique pour les thermomètres ordinaires, mais présente deux inconvénients : elle dépend de la substance dans le tube et présuppose la relation linéaire ci-dessus. Des thermomètres basés sur la résistance électrique, le thermocouple, la radiation du corps noir et d'autres sont également très utilisés, mais tous ont besoin d'être étalonnés sur des points fixes. Les thermomètres à gaz qui exploitent la loi des gaz parfaits 10-6 offrent une meilleure solution en permettant de définir la température de façon universelle et vont donc pouvoir faire office de standard. L'état d'un gaz comprenant un nombre N de molécules est défini par sa pression p , son volume V et sa température T . Si la température ne change pas, les paramètres p , V sont reliés par :

$$pV = \text{constant}$$

la relation de Boyle-Mariotte. Une façon de la tester est de mettre le volume de gaz dont on change la pression par un piston dans un grand bain qui fait office de réservoir. Mais quand on change la température du bain, on s'aperçoit que la constante varie et la relation de Gay-Lussac introduit la température T par :

$$pV = CT \quad 10-5$$

L'expérience montre que la constante C ne dépend que de la masse du gaz. Plus précisément, C est la même pour une mole d'un gaz parfait quelconque. Le point fixe standard choisi pour définir la température est le point triple de l'eau, car les trois phases, solide, liquide, vapeur ne coexistent que pour une seule combinaison de valeurs de pression et de température. Observé à 610 Pa, il a été décidé de donner à la température de ce point triple la valeur $T_0 = 273,16 \text{ K}$ (K pour kelvin). L'échelle kelvin ainsi introduite a une valeur minimum, le zéro absolu (voir plus loin), mais elle n'a pas de valeur maximum, de sorte que $1 \text{ K} = 1/273,16 \times$ (la différence entre le point triple de l'eau et le zéro absolu).

Pour mesurer la température d'un corps, il suffit de l'amener en contact avec un thermomètre à gaz (de l'air, de l'hydrogène ou de l'hélium) et la mesure de la pression permettra de déduire la température en kelvin de la façon suivante. Le thermomètre à gaz possède un volume fixe V et quand on l'amène au contact d'une cellule « point triple de l'eau », on mesure sa pression p_0 :

$$p_0 V = CT_0$$

La pression observée lorsque ce thermomètre à gaz est en contact avec un autre corps à la température T est :

$$pV = CT$$

En éliminant C et V entre ces deux relations :

$$T = T_0 \frac{p}{p_0}$$

La température du corps varie donc linéairement avec la pression mesurée pour un thermomètre à gaz de volume fixe. La réalité est un peu plus compliquée, car quand on utilise différents gaz pour mesurer la température d'ébullition de l'eau, on trouve des valeurs un peu différentes. La difficulté vient de ce que la loi des gaz parfaits n'est qu'une approximation pour les gaz réels. Mais on s'aperçoit que les valeurs du point d'ébullition mesurées par les différents thermomètres à gaz convergent toutes quand on diminue la pression p_0 dans les thermomètres : le gaz doit être suffisamment dilué pour que l'expression ci-dessus soit correcte. L'expression ci-dessus est donc modifiée pour prendre en compte cette réalité :

$$T = T_0 \lim_{p_0 \rightarrow 0} \frac{p}{p_0}$$

L'hélium est le meilleur gaz à utiliser, car son point de liquéfaction est le plus bas de tous les gaz et permet donc d'aller mesurer des températures aussi basses (4,1 K). Pour autant, en pratique, l'unité Celsius reste largement utilisée. Le degré Celsius a la même taille que le kelvin, mais le zéro de l'échelle Celsius (la glace fondante) étant plus pratique à utiliser, les deux unités sont liées par :

$$K = ^\circ C + 273,15$$

Il est à noter que le point triple de l'eau est à la température 0,01 °C. Reste à s'occuper de la constante C introduite de façon temporaire en 10-5. En 1811, Avogadro proposa que « sous les mêmes conditions de température et de pression, tous les gaz avec le même nombre de molécules occupaient le même volume ». La mole est une unité SI définie comme le nombre d'atomes présents dans un échantillon de 12 grammes de carbone 12, un nombre d'atomes qui définit le nombre d'Avogadro $N_A = 6,02 \times 10^{23}$. Le nombre de moles n contenu dans un échantillon de n'importe quelle substance est donc le rapport du nombre de molécules N au nombre d'Avogadro :

$$n = \frac{N}{N_A}$$

La masse molaire d'un élément chimique est obtenue en sommant les masses atomiques multipliées par le nombre d'atomes en question. La masse molaire de l'eau est donc :

$$M_{H_2O} = 2M_H + M_O = 18 \text{ grammes}$$

Si on prend une masse m d'un élément chimique E dont la masse molaire est M_E , le nombre de moles est aussi :

$$n = \frac{m}{M_E}$$

Le volume molaire d'un gaz V_M en découle naturellement : c'est le volume occupé par une mole de gaz aux conditions ambiantes standard (dites SATP) avec $T = 298,15 \text{ K}$ (25°C), $p = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ et qui vaut :

$$V_M = 24,79 \text{ litres}$$

Aux conditions anciennes de température et de pression standard (dites STP) à 0°C et 1 atm , ce volume vaut :

$$V_M = 22,4 \text{ litres}$$

Selon Avogadro, ce volume molaire a donc une valeur universelle qui s'applique à tous les gaz parfaits. L'équation d'état 10-5 prend alors une forme universelle si on utilise V_M :

$$pV_M = RT$$

où R est la constante universelle des gaz parfaits. Avec les valeurs des conditions SATP, R vaut donc :

$$R = \frac{pV_M}{T} = \frac{1 \times 10^5 \times 24,79 \times 10^{-3}}{298,15} = 8,3144 \text{ J K}^{-1} \text{ mole}^{-1}$$

ce qui fournit une façon simple de retrouver la valeur de R . Pour un nombre arbitraire de moles n , l'équation d'état des gaz parfaits est donc :

$$pV = nRT \quad 10-6$$

On peut avoir aussi besoin d'autres formes de 10-6. L'une utilise le volume spécifique (ou volume massique) $v = V/m$. Ce volume spécifique est l'inverse de la masse volumique $\rho = 1/v$ et il est relié au volume molaire par $v = V_M/M$. L'équation d'état est alors :

$$pv = \frac{R}{M} T$$

Quand on fait apparaître le nombre N de molécules dans 10-6, l'équation d'état se réécrit aussi :

$$pV = N \frac{R}{N_A} T = Nk_B T$$

où $k_B = R/N_A = 1,3807 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann. Cette équation d'état 10-6 est valable pour les gaz réels dilués dont la concentration moléculaire N/V ou la pression sont suffisamment faibles pour pouvoir négliger les collisions entre les molécules de gaz. Le paragraphe suivant va permettre de préciser les conditions de sa validité.

Note :

L'air est un mélange de gaz de pourcentage en volume, 78,1 % d'azote, 21 % d'oxygène et 0,9 % d'argon. Ces pourcentages sont constants et seule la vapeur d'eau varie beaucoup. La loi des gaz parfaits s'applique pour l'air sec et la vapeur d'eau. Pour l'air sec, 10-6 devient $p_D = \rho_D R_D T$ avec p_D la pression de l'air sec, ρ_D la masse volumique de l'air sec et $R_D = R/M_D = 287,04 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ où M_D est la masse molaire équivalente

de l'air sec $M_D = 28,966$ grammes. Pour la vapeur d'eau, l'équation d'état est $e_v = \rho_v R_v T$ avec e_v la pression de la vapeur d'eau et $R_v = R/M_v = 461,50 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ où M_v est la masse molaire de la vapeur d'eau, $M_v = 18,016$ grammes. L'analyse des mélanges de gaz est développée dans l'exercice 82.

10.2.5 Gaz réels

L'équation d'état des gaz parfaits décrit la situation physique de gaz suffisamment dilués qui négligent complètement les interactions entre molécules. Si la pression est faible et le volume accessible aux molécules suffisamment grand, les interactions seront effectivement rares. Mais les phénomènes de changement de phase comme la liquéfaction d'un gaz sont alors exclus par 10-6. L'objectif est de discuter des gaz réels en présentant l'équation de van der Waals qui a été la première tentative de prise en compte des forces intermoléculaires.

Les forces entre deux molécules sont de deux types, une force attractive quand les molécules sont encore assez éloignées l'une de l'autre et une force répulsive à très courte distance (la taille d'une molécule). Les forces attractives sont des forces de type électrostatique entre dipôles et pour des distances de plusieurs diamètres de molécules, ces forces d'attraction vont être favorables à la compression. Les forces répulsives sont importantes quand la séparation entre les molécules est très faible, donc à haute pression quand beaucoup de molécules occupent un tout petit volume. Les forces répulsives vont être favorables à l'expansion.

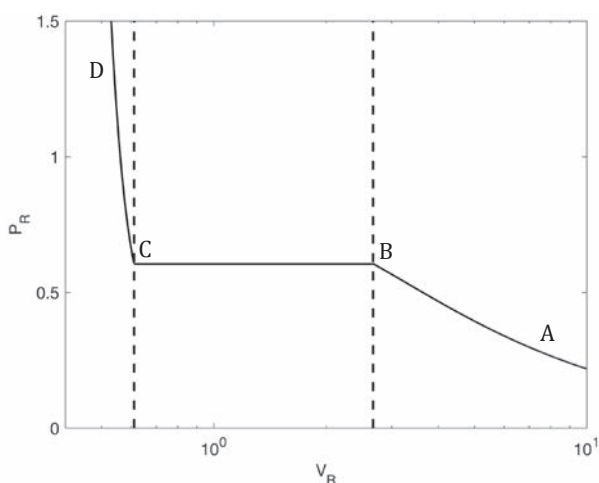


Figure 10.3

Le diagramme schématisant (V, p) d'un gaz réel. Au point A, le gaz obéit à la loi des gaz parfaits. Quand la pression augmente de A à B, il devient plus facilement compressible jusqu'au point B. Quand le point B est dépassé, la pression ne change plus et du liquide apparaît. La droite BC est une région mixte de coexistence liquide-vapeur où la pression constante est la pression de vapeur saturante (fonction de la température). De C à D, le gaz est entièrement liquéfié et cela devient beaucoup plus difficile de le comprimer. Les variables utilisées, p_R et V_R , sont normalisées par leurs valeurs critiques, respectivement p/p_C et V/V_C .

Faisons l'expérience d'un gaz réel contenu dans un cylindre dont on augmente la pression en poussant sur un piston pour passer par des états de quasi-équilibre, la figure 10.3. Si la pression est faible en A, le gaz se comporte comme un gaz parfait. Quand la pression devient modérée, les forces attractives commencent à devenir significatives et vont rendre le gaz plus compressible. Au point B, le volume diminue beaucoup sans que la force sur le piston augmente : l'examen du contenu montre que du liquide est apparu dans le cylindre et qu'il y a une interface nette séparant le liquide et sa vapeur. Quand le volume décroît encore, la part liquide augmente au détriment de la phase vapeur. Ceci se fait sans pression supplémentaire, c'est juste la condensation du gaz qui continue jusqu'au point C. Cette pression invariante sur le trajet BC est la pression de vapeur saturante à la température de l'expérience. En C, le gaz a été entièrement liquéfié. Quand tout le volume du cylindre est occupé par le liquide, il faut maintenant des pressions très fortes dans la région D pour diminuer encore le volume : les forces répulsives dominent maintenant et le liquide est beaucoup moins compressible car ces forces ont tendance à éloigner les molécules.

Une façon de mesurer l'écart entre un gaz réel et un gaz parfait est le facteur de compression Z , rapport du volume molaire V_M à celui du gaz parfait :

$$Z = \frac{V_M}{V_M^0}$$

Comme par définition $V_M^0 = \frac{RT}{p}$, on a aussi :

$$pV_M = RTZ \tag{10-7}$$

On observe aux pressions très faibles que $Z \approx 1$, les gaz réels suivent la loi des gaz parfaits. Aux très hautes pressions $Z > 1$, c'est la région des forces répulsives. Aux pressions intermédiaires, $Z < 1$, se trouve la région des forces attractives.

En plus du changement de phase, les gaz réels montrent une deuxième caractéristique. Si on répète l'expérience de compression de la figure 10.3 pour des températures supérieures à une certaine température critique T_C , la région de condensation disparaît : la droite BC de la figure 10.3 se réduit à un point. Température, pression et volume molaire prennent des valeurs critiques en ce point, les constantes critiques de la substance. Quand $T > T_C$, la phase liquide a disparu et on est en présence d'un gaz pour toutes les pressions. Il peut être très dense et on utilise parfois le terme de fluide super-critique. Les constantes critiques de quelques gaz sont données dans le tableau suivant.

Tableau 10.3

	p_C [bar]	V_C [cm ³ mol ⁻¹]	T_C [K]	Z_C
Ar	48,6	75,3	150,7	0,292
H ₂	13	35	33,23	0,305
CO ₂	73,8	94	304	0,274
O ₂	50,8	78	154,8	0,308
N ₂	34	90,1	126,3	0,292
H ₂ O	221,2	55,3	647,4	0,227

L'oxygène et l'azote ont des températures critiques très basses et ils se comportent donc comme des gaz à la température ordinaire. À l'inverse, l'eau a une température critique très élevée qui explique pourquoi on la retrouve sous ses phases variées aux températures ambiantes sur la Terre. Une équation d'état due à van der Waals (1873) permet d'améliorer l'équation des gaz parfaits quand les pressions deviennent trop fortes. Elle possède la caractéristique critique et montre qualitativement au moins la région de changement de phase gaz-liquide. Elle repose sur une base physique pour prendre en compte la nature des forces moléculaires déjà mentionnées et s'écrit :

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - a \frac{n^2}{V^2}$$

ou encore en fonction du volume molaire $V_M = V/n$:

$$p = \frac{RT}{V_M - b} - \frac{a}{V_M^2} \tag{10-8}$$

Les coefficients de l'équation de van der Waals a et b ne sont pas constants comme la constante des gaz parfaits, mais sont spécifiques de chaque gaz. Ils ne dépendent pas de la température. Le terme au dénominateur $V_M - b$ représente l'effet des forces répulsives. Le volume disponible $V_M - b$ est le volume du récipient minoré par le volume total occupé par les molécules. Le premier terme est donc la loi des gaz parfaits avec ce volume réduit. Le deuxième terme s'explique ainsi : la pression dépend de la fréquence des collisions et de la force exercée par les parois durant la collision. Mais ces deux effets sont réduits par l'attraction entre molécules. Et celle-ci va agir d'autant plus que la concentration molaire n/V est grande. Van der Waals exprime cette réduction de la pression par le terme $-a(n/V)^2$ avec $a > 0$. Lorsque l'on fait ces deux corrections au volume et à la pression dans l'équation des gaz parfaits, on obtient :

$$\left[p + a \left(\frac{n}{V} \right)^2 \right] (V - nb) = RT$$

ce qui redonne la forme 10-8. La détermination de a et b est faite en ajustant la forme théorique 10-8 aux valeurs expérimentales pour chaque gaz. Quelques valeurs de a et b sont données dans le tableau suivant :

Tableau 10.4

	a [<i>litre</i> ² bar mol ⁻²]	b [$\times 10^{-2}$ <i>litre</i> mol ⁻¹]
Ar	1,36	3,20
H ₂	0,25	2,66
CO ₂	3,66	4,29
O ₂	1,36	3,18
N ₂	1,39	3,91
H ₂ O	5,52	3,05

Ref. : Lide, D.R., 2016, CRC Handbook of Chemistry and Physics (table 6.56).
Note : 1 J·m³·mol⁻² = 1 m⁶·Pa·mol⁻² = 10 l²·bar·mol⁻²

L'équation de van der Waals capture la notion de point critique comme on le voit sur la figure 10.4.

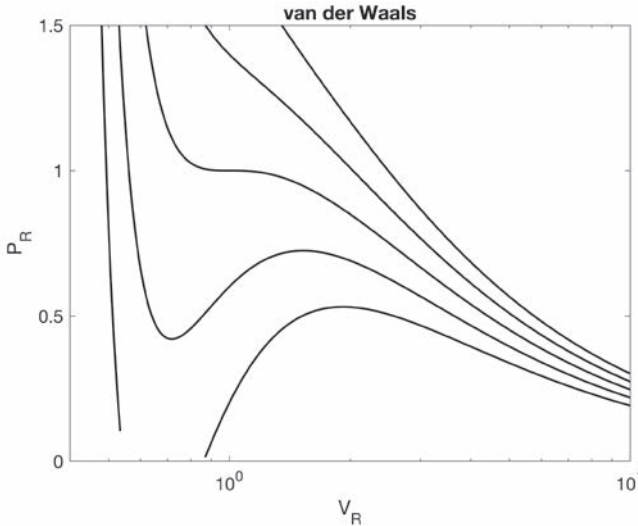


Figure 10.4

L'équation réduite de van der Waals est tracée pour cinq valeurs croissantes de $T_R = 0.8, 0.9, 1.0, 1.1$ et 1.2 . L'axe des abscisses est logarithmique. Notez la différence de comportement quand T_R est plus petit ou plus grand que 1. Pour les grandes valeurs de V_R , on retrouve le gaz parfait, pour les petites le gaz est devenu liquide. Les oscillations des courbes pour $T_R < 1$ dans la partie intermédiaire ne sont pas physiques et correspondent à la région de pression constante (la pression de vapeur saturante) quand les deux phases liquide et vapeur coexistent. Les variables utilisées p_R et V_R sont normalisées par leurs valeurs critiques, respectivement p/p_C et V/V_C .

Pour de grands volumes molaires, on retrouve la loi des gaz parfaits. Pour $T < T_C$, on trouve un minimum et un maximum. La région entre le minimum et le maximum est un défaut du modèle de van der Waals, car paradoxalement on trouve que le volume augmente quand la pression augmente. Ces oscillations disparaissent pour $T \geq T_C$. Lorsque le volume devient faible, on est en présence de liquide très peu compressible (comme sur la figure 10.3). Le point critique qui est défini par un extremum et un point d'inflexion peut être calculé par :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V_M} \right)_T = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V_M^2} \right)_T = 0$$

Les dérivations de 10-8 permettent de montrer que le point critique s'exprime en fonction de a et b par :

$$V_C = 3b \quad p_C = \frac{a}{27b^2} \quad T_C = \frac{8a}{27Rb}$$

Et donc inversement, si on connaît les points critiques par détermination expérimentale, on peut se servir de ces relations pour trouver a et b . Notons que le facteur de compression au point critique est :

$$Z_C = \frac{3}{8} = 0,375$$

Van der Waals a eu alors l'idée de mettre son équation sous forme adimensionnelle en choisissant comme échelles ces quantités critiques :

$$V_R = \frac{V_M}{V_C} \quad p_R = \frac{p}{p_C} \quad T_R = \frac{T}{T_C}$$

Quand on utilise ces variables réduites V_R , p_R et T_R , on s'aperçoit que des gaz différents mais de même valeur V_R et T_R ont également la même pression p_R . On peut donc utiliser la même équation pour tous les gaz. Quand on introduit ce changement de variables dans l'équation 10-8, on trouve la forme réduite adimensionnelle de l'équation de van der Waals :

$$p_R = \frac{8T_R}{3V_R - 1} - \frac{3}{V_R^2}$$

C'est cette équation qui a été utilisée pour tracer les courbes de la figure 10.4 pour plusieurs valeurs de T_R et la courbe de la figure 10-3 pour une valeur de T_R .

En résumé, l'analyse du modèle de van der Waals montre les points suivants :

- 1) Pour les fortes températures et les grands volumes molaires, on retrouve les isothermes des gaz parfaits.
- 2) Liquides et vapeurs coexistent quand les deux termes de 10-8 sont du même ordre. Dans cette région, on obtient des oscillations qui ne sont pas physiques, car quand la pression augmente, le volume augmente. Les états physiques stables correspondent en effet au critère :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T < 0$$

Il faut donc remplacer dans cette région la courbe par une droite horizontale de pression constante, égale à la pression de vapeur saturante comme sur la figure 10.3.

- 3) Pour des températures au-dessus de la température critique, la notion de gaz et de liquide disparaît. On a affaire à un fluide de moins en moins compressible quand le volume diminue.

Il existe un grand nombre d'autres équations d'états plus précises que 10-8 pour les très hautes pressions et les basses températures qui sont des ajustements sur les valeurs expérimentales. Elles souffrent du désavantage de perdre le sens physique des forces moléculaires contenu dans l'équation de van der Waals.

10.2.6 La première loi de la thermodynamique

Cette première loi n'est pas autre chose que la conservation de l'énergie pour un système thermodynamique. Si le système est isolé, son énergie est conservée. Une variation d'énergie d'un système pour passer d'un état d'équilibre à un autre ne peut donc venir que de transferts avec l'environnement. Dans le cadre d'un système mécanique, on a vu que le théorème de l'énergie cinétique liait le travail effectué par des forces extérieures à la variation d'énergie cinétique d'un corps :

$$\Delta E_C = W$$

La première loi a la forme de ce théorème, mais ajoute la possibilité de transferts d'énergie causés par des transferts de chaleur Q du système :

$$\Delta U = Q + W \quad 10-9 \text{ (a)}$$

où U désigne ici l'énergie interne, c'est-à-dire l'énergie cinétique et potentielle au niveau des molécules. L'énergie cinétique et potentielle de ces molécules est celle rapportée au centre de masse du système. Q représente le transfert d'énergie sous une forme désordonnée associée aux mouvements erratiques des molécules. À l'inverse, le travail W induit par le mouvement du piston de la figure 10.1 est associé à un mouvement d'ensemble ordonné des molécules du gaz. La somme de ces deux transferts permet de trouver comment l'énergie interne U a varié entre deux états d'équilibre.

La première loi : 10-9 (b)

La variation d'énergie interne d'un système est la somme du travail et de la chaleur fournie par l'environnement au système. L'énergie est un paramètre d'état. Si le système est isolé, son énergie interne est constante.

L'énergie interne U est une variable d'état qui est définie pour les états d'équilibre du système. En l'absence de transferts avec l'environnement, elle est conservée. Supposons que les deux formes de transfert d'énergie possibles Q et W soient présentes : le système passe d'un état A à un état B par un premier chemin 1 dans un diagramme (V, p) :

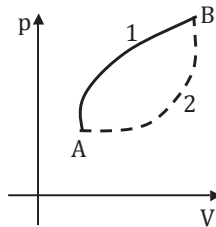


Figure 10.5

Alors $U_B = U_A + Q + W$ sur le chemin 1. Mais si le système passe de A à B par un autre chemin 2, la valeur de U_B sera identique. Bien que Q et W soient différents sur chaque chemin, leur somme $Q + W$ est la même sur tous les chemins possibles connectant les états A et B. L'énergie interne U est donc un paramètre d'état du système comme la pression, le volume ou la température. Elle augmente si on fournit de la chaleur au système $Q > 0$ et diminue si le système fait un travail sur l'environnement $W < 0$.

Pour une transformation infinitésimale, la première loi s'écrit :

$$dU = \delta Q + \delta W \quad 10-9 \text{ (c)}$$

où l'on a utilisé la notation spéciale δ pour indiquer que les transferts d'énergie d'origine thermique et mécanique ne sont pas des différentielles totales. Seule la somme dU l'est (voir § 10.5.1). Pour une relation réversible, la relation 10-2 montre que la première loi s'écrit :

$$dU = dQ - p dV \quad 10-9 \text{ (d)}$$

Le tableau suivant illustre quatre exemples de transformations possibles soumises à l'examen de la première loi.

Tableau 10.5

Transformation	Implication	Conséquence
Adiabatique	$Q = 0$	$\Delta U = W$
Volume constant	$W = 0$	$\Delta U = Q$
Cyclique	$\Delta U = 0$	$Q = -W$
Libre détente	$Q = W = 0$	$\Delta U = 0$

Si la transformation est cyclique, le système revient périodiquement au même état, et donc $\Delta U = 0$, ce qui implique :

$$\begin{aligned} Q + W &= 0 \\ \text{ou} \\ -W &= Q \end{aligned}$$

Quand l'environnement fait un travail net positif sur le système $W > 0$, le système doit fournir une égale quantité de chaleur à l'environnement. Quand le travail fait par le système sur l'environnement ($-W$) est positif, une égale quantité de chaleur doit être fournie au système.

La détente libre est une expérience fondamentale faite par Joule pour montrer que l'énergie interne d'un gaz parfait dépend de la température et absolument pas du volume et sera décrite un peu plus loin.

Notes :

(i) Q et W sont la chaleur et le travail fournis par l'environnement au système respectivement. Dans certains ouvrages, la première loi est écrite $\Delta U = Q - W$ avec W

qui devient le travail produit par le système considéré sur l'environnement. Comme il s'agit de la part utile que le système peut faire, il y a certes quelques raisons de l'écrire ainsi. Malgré tout, il est plus simple de garder la même convention de signe pour la chaleur et pour le travail dans les interactions du système avec son environnement.

(ii) Cet énoncé suppose que le système est fermé. Si le système est ouvert, un terme supplémentaire lié aux échanges de masse doit être ajouté.

(iii) L'énergie cinétique des particules rencontrée au chapitre 6 est la somme de l'énergie cinétique du centre de masse et de celle relative au centre de masse. Or ni l'énergie cinétique du centre de masse ni son énergie potentielle ne sont prises en compte dans l'équation 10-9 (a). Si le centre de masse du système bouge, il faudra ajouter dans 10-9 (a) son énergie cinétique et si le centre de masse monte ou descend dans le champ de gravité, il faudra aussi ajouter l'énergie potentielle « mgz ». Si en revanche ces énergies cinétiques et potentielles du centre de masse sont constantes, il n'y a aucun besoin de les inclure, puisque seules les variations contribuent dans 10-9 (a).

La première loi n'est finalement qu'un bilan des entrées-sorties des transferts d'énergie entre un système et son environnement de même nature que les entrées-sorties d'un compte bancaire. Si la première loi attribue un rôle symétrique au travail et à la chaleur, la deuxième loi va venir corriger cette conclusion.

10.2.7 L'enthalpie

L'enthalpie joue un rôle primordial pour les transformations à pression constante, les changements de phase et les réactions chimiques souvent faites à la pression atmosphérique. Supposons une réaction qui fait passer un système de réactifs d'un état 1 à un état 2. Le travail fait pendant la réaction est :

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1)$$

La chaleur produite dans une réaction à pression constante est alors donnée par la première loi :

$$Q_p = \int_{U_1}^{U_2} dU - W = (U_2 - U_1) + p(V_2 - V_1) = H_2 - H_1$$

quand l'enthalpie H est définie par :

$$H = U + pV \quad 10-10$$

La chaleur de la réaction s'exprime ainsi par la différence des enthalpies de l'état final et de l'état initial. Comme U , p et V sont des variables d'état, l'enthalpie l'est aussi. Sa variation ΔH entre deux états d'équilibre est indépendante du chemin suivi

et est donc égale au transfert d'énergie sous forme de chaleur à pression constante. Considérons une variation infinitésimale de H . En dérivant 10-10, on obtient :

$$dH = dU + p dV + V dp$$

En utilisant 10-9 (c) pour exprimer dU dans une transformation réversible :

$$dH = dQ + V dp$$

Si la transformation se fait à pression constante, on obtient :

$$dH = dQ|_p \quad 10-11$$

La calorimétrie exécutée à pression constante permet donc de mesurer les variations d'enthalpie. Les variations ΔU et ΔH pour les solides et liquides subissant une variation de température ΔT ne sont pas très différentes, mais ce n'est plus le cas pour les gaz. La variation dH correspondant à une variation dT définit la capacité thermique à pression constante par :

$$dH = C_p dT$$

Quand C_p est constant sur la plage de température d'intérêt, la variation finie de H est :

$$\Delta H = C_p \Delta T$$

Les quantités du tableau 10.1 sont des chaleurs spécifiques, des valeurs de C_p par unité de masse.

La calorimétrie est également utilisée pour obtenir les chaleurs des réactions chimiques. Lorsque la réaction est exothermique, la chaleur est transférée à l'environnement et la variation d'enthalpie du système est donc négative $\Delta H < 0$ (inversement pour une réaction endothermique $\Delta H > 0$). Ces changements sont normalement donnés aux conditions standard de pression 1 bar, la température variant selon les conditions expérimentales.

Exemple :

Le passage d'une mole d'eau liquide à une mole d'eau vapeur s'écrit comme :



De la même façon, la fusion d'une mole de glace en eau liquide s'écrit :



L'enthalpie étant une variable d'état, les transformations inverses se font avec des variations d'enthalpie opposées : la variation d'enthalpie lors d'une condensation est :

$$\Delta_{\text{COND}}H = -\Delta_{\text{VAP}}H$$

Comme la variation d'enthalpie est indépendante du chemin suivi, on peut obtenir la variation d'enthalpie d'une sublimation, le passage solide-vapeur, à partir des deux précédentes quand les processus se font à la même température :

$$\Delta_{\text{SUB}}H = \Delta_{\text{FUS}}H + \Delta_{\text{VAP}}H$$

10.2.8 Phénomènes de transport

Parce qu'ils jouent un grand rôle, sont rassemblés sous ce titre les mécanismes de transfert de chaleur que l'on retrouve dans les solides et dans les fluides. Le système dans ce cas est la petite particule fluide ou solide qui contient des milliards de molécules (voir la discussion autour de la figure 9.3). Il existe trois façons d'échanger de la chaleur entre ce système-particule et son voisinage : la conduction, la radiation et la convection qui n'existe que dans le cas des fluides.

10.2.8.1 Conduction et diffusion

La conduction thermique est un processus qui dépend du mouvement des atomes et des molécules. Considérons un matériau solide dont une partie est à la température T_1 , l'autre à la température T_2 , avec $T_1 > T_2$. L'expérience montre que le transfert d'énergie du chaud vers le froid dépend de la nature du matériau. Certains comme le cuivre sont de bons conducteurs de la chaleur tandis que d'autres comme l'air, le bois ou la laine de roche le sont beaucoup moins. La figure suivante illustre la situation :

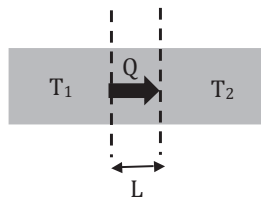


Figure 10.6

Le transfert d'énergie Q est l'énergie thermique qui passe à travers la surface A dans un intervalle de temps Δt donné. On définit le flux d'énergie comme ce transfert d'énergie Q par unité de surface et par unité de temps :

$$F = \frac{Q}{A\Delta t} \text{ en } \text{Wm}^{-2}$$

Ce flux dépend de la différence de température entre chaque partie et de la largeur de la zone de transition L sur la figure. La loi zéro donne la direction du flux, ici de la gauche vers la droite. La loi fondamentale de la conduction thermique est la suivante :

$$F = k_C \left(\frac{T_1 - T_2}{L} \right)$$

où k_C est le coefficient de conductivité thermique déterminé de façon expérimentale. Le tableau 10.6 donne quelques valeurs de la conductivité thermique.

Tableau 10.6

Matériau	Conductivité k_C [W m ⁻¹ K ⁻¹]	Masse volumique [10 ³ kg m ⁻³]	Chaleur spécifique C [J kg ⁻¹ K ⁻¹]	Diffusivité k_D [m ² s ⁻¹]
Acier	14	7,8	500	$3,6 \times 10^{-6}$
Aluminium	235	2,7	910	$9,5 \times 10^{-5}$
Cuivre	401	8,9	390	$1,15 \times 10^{-4}$
Fer	83	7,85	450	$2,35 \times 10^{-5}$
Plomb	35	11,3	130	$2,4 \times 10^{-5}$
Air	0,026	$\sim 10^{-3}$	$C_p = 1\,004,6$	$2,15 \times 10^{-5}$
Eau	0,6	1	4 200	$1,4 \times 10^{-7}$
Glace (−5 °C)	2,25	0,917	2 030	$1,2 \times 10^{-6}$
Mousse de polyuréthane/ polystyrène	0,03	0,02	1 300	$1,1 \times 10^{-6}$
Laine de verre	0,043	0,025	840	2×10^{-6}
Laine de roche	0,045	0,3	700	$2,1 \times 10^{-7}$
Verre (fenêtre)	1	2,5	700	$5,7 \times 10^{-7}$
Béton	[0,4 0,7]	1,5	880	$\sim 3,8 \times 10^{-7}$
Bois	0,15	[0,3 0,9]	[1 300 2 400]	$\sim 1,4 \times 10^{-7}$
Roches de surface	[2 7]	$\sim 2,5$	800	$\sim 2,2 \times 10^{-6}$
Corps humain (moyenne)	0,2 (sans circulation du sang)	$\sim 0,98$	3 470	$5,9 \times 10^{-5}$

Toutes les valeurs du tableau peuvent varier avec la température ou la pression. Les valeurs citées correspondent aux conditions proches du standard (25 °C, 1 atm).

Que devient l'expression ci-dessus quand la largeur de la zone de transition L diminue ? Quand L tend vers zéro, le flux F s'exprime par la dérivée de T par rapport à x :

$$F = -k_C \frac{dT}{dx} \tag{10-12}$$

On choisit un axe x et le flux F est alors déterminé localement en fonction de x. Le signe négatif de 10-12 garantit que le flux d'énergie thermique soit toujours dirigé des hautes températures vers les basses. Si la température est uniforme, le flux est nul et le système est à l'équilibre. Si la dérivée dT/dx n'est pas nulle, le flux est non nul, il y a un déséquilibre et un transfert thermique s'établit. Le transfert d'énergie a un module mais aussi une direction indiquée sur la figure 10.4, c'est donc un vecteur. Dans un matériau isotrope, il n'y a aucune direction privilégiée

et quand T varie selon trois directions indépendantes x, y, z , la relation 10-12 se généralise par :

$$\mathbf{F} = -k_C \nabla T \quad 10-13$$

où l'on retrouve le vecteur gradient défini par : $\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$. Ce gradient est dirigé des basses vers les hautes valeurs de la température, ce qui explique le signe $-$ de 10-13 puisque k_C est positif. La relation 10-13 est en accord avec la deuxième loi : le flux de chaleur \mathbf{F} est toujours dirigé des hautes vers les basses températures.

Considérons maintenant un matériau dont la température n'est pas uniforme. Quel sera l'équilibre final et comment sera-t-il atteint ? La réponse est contenue dans la solution de l'équation de diffusion de la chaleur, une des équations fondamentales de la physique. Une analyse locale à une dimension va être faite pour simplifier. Soit un bloc de matière de volume V (longueur Δx et surface A , hachuré sur la figure 10.7) :

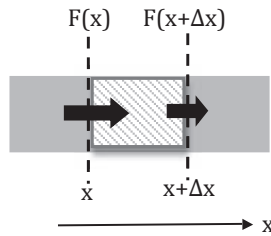


Figure 10.7

Sur la figure 10.7, on a représenté un flux de chaleur plus grand en x qu'en $x + \Delta x$. Le bloc hachuré va donc augmenter sa température. Si la chaleur spécifique est C et la masse m , on écrit que la variation de température dépend de la différence des flux de chaleur à chaque extrémité :

$$mC \frac{\partial T}{\partial t} = (F(x) - F(x + \Delta x)) A$$

avec les deux côtés de l'équation en $[W]$. On utilise la notation de dérivée partielle $\partial/\partial t$ puisque T est maintenant une fonction de deux variables x et t . Comme $m = \rho A \Delta x$ avec ρ la masse volumique :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{F(x) - F(x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Lorsque Δx tend vers zéro, apparaît à droite la dérivée du flux :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x} \quad 10-14$$

Puis en utilisant la relation 10-13 entre le flux et la dérivée de la température :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 10-15$$

10-15 est la célèbre équation de diffusion de la chaleur dérivée par Fourier précisément dans ce contexte thermique où le paramètre k_D est le coefficient de diffusion :

$$k_D = \frac{k_C}{\rho C}$$

Comme l'équation d'onde, l'équation 10-15 est une équation aux dérivées partielles dont la solution demande de trouver $T(x, t)$ en tous points et à tout temps t . Sa solution demande de connaître les conditions initiales du matériau à $t = 0$ et les conditions aux limites, c'est-à-dire les conditions aux extrémités du bloc. La solution à l'équilibre à t grand présente un intérêt majeur et on se dit que la température doit être constante (indépendante de x et de t), mais ceci est faux dans la plupart des cas : en effet pour que T n'évolue plus en fonction du temps, 10-14 montre que le flux F doit être constant, alors que si T ne dépend plus de x , 10-12 implique que le flux F doit être nul. Tout dépend donc des conditions aux limites.

1) Supposons que les extrémités du matériau de longueur L soient maintenues dans deux réservoirs de température constante T_1 et T_2 . Les conditions aux limites du matériau sont alors $T(x=0) = T_1$ et $T(x=L) = T_2$. La condition d'équilibre 10-14 donne :

$$F = \text{constante} \Rightarrow \frac{dT}{dx} = C$$

En appliquant les conditions aux extrémités du bloc, on trouve que la température d'équilibre varie linéairement avec x :

$$T = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right) x$$

une solution qui ne dépend pas de k_C . Pour calculer l'évolution dans le temps de la température vers cette température d'équilibre, il faut trouver la solution de 10-15 et Fourier inventa la technique des séries qui porte son nom, un développement de T en fonction d'une somme de $\sin(mx)$ et $\cos(mx)$ de différents nombres d'onde m (voir exercice 15).

2) Si les conditions aux limites sont mixtes, par exemple une condition de flux en $x = 0$, $F = F_0$ et une température en $x = L$, $T = T_2$. La condition de flux constant requiert :

$$\begin{aligned} -k_C \frac{dT}{dx} &= F_0 \\ T &= T_2 + \frac{F_0}{k_C} (L - x) \end{aligned}$$

Encore une variation linéaire de la température avec x , mais qui cette fois dépend du flux et de k_C . Sans avoir la solution de 10-15 sous le coude, on peut néanmoins estimer le temps nécessaire pour atteindre l'équilibre ci-dessus en mesurant l'ordre

de grandeur des différents termes de 10-15. Appelons τ le temps cherché, L l'échelle sur laquelle T varie spatialement et ΔT la variation typique de la température. Les ordres de grandeur des deux termes de 10-15 sont :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\frac{\Delta T}{\tau} \quad k_D \frac{\Delta T}{L^2}$$

et l'égalité de ces ordres de grandeur donne :

$$\tau = \frac{L^2}{k_D} \quad 10-16$$

Le temps de mise à l'équilibre est d'autant plus grand que la taille L du bloc est grande et que le coefficient de diffusion k_D est petit et vice-versa. Les valeurs de k_D données sur le tableau 10.6 permettront d'estimer ce temps de diffusion.

Cette discussion conduite avec un matériau solide reste valable pour les liquides et pour les gaz. Ceci dit, les transferts thermiques dans les fluides en mouvement font intervenir les mouvements macroscopiques du fluide qui évoluent sur des échelles de temps beaucoup plus courtes que la diffusion moléculaire. La diffusion dans les fluides est un processus lent qui ne devient rapide et donc important qu'aux petites échelles spatiales.

10.2.8.2 La convection

Si la conduction thermique ne présente pas de difficultés fondamentales, ce n'est pas le cas de la convection thermique, le transfert thermique effectué par un fluide en mouvement qui fait toujours l'objet de recherches aujourd'hui. La convection thermique est présente dès lors qu'une quantité de fluide est plus chaude (ou plus froide) que le fluide environnant. Si la température d'un bloc de fluide est plus forte, sa densité est plus faible et une force de flottabilité se met en place pour accélérer le fluide vers le haut, on parle de panache thermique, visualisé par la fumée d'une cigarette ou par un cumulus. À l'inverse, si la température est plus froide, le bloc est plus lourd et accélère vers le bas. L'accélération de cette anomalie thermique n'est pas difficile à calculer.

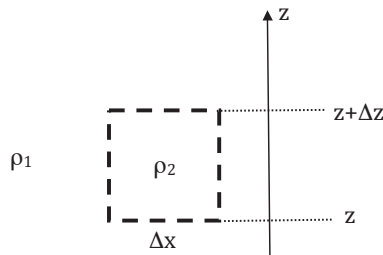


Figure 10.8

On considère un fluide à l'équilibre de densité ρ_1 . La pression p_1 est hydrostatique et donnée par la relation 9-4 :

$$0 = -\frac{dp_1}{dz} - \rho_1 g$$

La pression est constante sur un plan horizontal et décroît linéairement avec z (l'axe z étant dirigé sur la verticale ascendante). La figure 10.8 montre un petit bloc de fluide de volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ de densité différente ρ_2 qui a été inséré dans le fluide sans changer la distribution de pression p_1 . Sur les faces verticales du bloc, les forces de pression horizontales restent donc équilibrées entre elles. Dans la direction verticale, les forces de pression et le poids du bloc de hauteur Δz ont une résultante non nulle :

$$F_z = -\rho_2 g \Delta V + [p_1(z) - p_1(z + \Delta z)] \Delta A$$

avec l'aire horizontale du bloc $\Delta A = \Delta x \Delta y$. La force par unité de masse $\rho_2 \Delta V$ fournit l'accélération du bloc :

$$a_z = -g + \frac{p_1(z) - p_1(z + \Delta z)}{\rho_2 \Delta z}$$

Mais quand Δz tend vers zéro, le dernier terme s'exprime avec la relation hydrostatique ci-dessus et on obtient :

$$a_z = g \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} \right) \quad 10-17$$

L'accélération dépend donc de la différence de densité entre le bloc et son environnement. Si la densité du bloc est plus faible que l'environnement, a_z est positif et la particule monte et inversement descend si sa densité est plus grande. L'expression 10-17 est la nouvelle force dite de flottabilité (ou encore force d'Archimède) qui apparaît dans un fluide au sein duquel la densité varie. La relation entre la densité et la température est très simple pour un liquide, l'équation d'état étant en première approximation de la forme :

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(\theta - \theta_0)]$$

avec θ la température en $^{\circ}\text{C}$, $\rho_0 = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ et $\alpha \approx 10^{-4} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ pour l'eau pure (attention, cette forme ne décrit pas la présence du maximum de densité de l'eau douce à 4°C). Puisque la densité de l'eau varie peu avec la température, avec $\rho_2 \approx \rho_0$ au dénominateur de 10-17, la relation 10-17 devient :

$$a_z \approx -g\alpha(\theta_1 - \theta_2)$$

Si la particule est très petite, son mouvement ne dérange pas l'environnement et elle va se placer à la surface du fluide si elle est plus légère et au fond si elle est plus lourde. Dans les océans, la masse volumique dépend non seulement de la température mais également de la salinité. La salinité S mesure la masse de sel m_s présente dans une masse m d'eau salée :

$$S = \frac{m_s}{m}$$

Salinité qui varie entre 34×10^{-3} et 38×10^{-3} dans l'océan mondial. Ses variations sont dues respectivement à des concentrations ou dilutions dans les régions où l'évaporation ou les précipitations dominent en surface : eaux subtropicales salées, eaux subpolaires peu salées. L'équation d'état simplifiée à considérer est alors :

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(\theta - \theta_0) + \beta S]$$

avec $\beta \approx 0,77$. La partition observée dans l'océan est la suivante : les eaux denses formées en mer de Norvège tapissent le fond de l'Atlantique, tandis que les eaux de surface légères car plus chaudes (mais aussi plus salées) restent en surface.

L'expression de la force de flottabilité pour un gaz est plus complexe puisque la densité est fonction non seulement de la température mais aussi de façon importante de la pression. Et la conséquence est très surprenante puisque la température de l'atmosphère décroît avec l'altitude dans les quinze premiers kilomètres (voir exercices 45 et 46).

Maintenant si le bloc que l'on a considéré n'est plus petit, par exemple lorsque toute une étendue de fluide est chauffée à sa base, on observe que tout le fluide au-dessus de la région chauffée se met en mouvement sous forme de rouleaux convectifs bien organisés si le chauffage n'est pas trop intense. Pour des valeurs plus réalistes, les mouvements de convection deviennent turbulents. Il suffit d'observer les nuages de type cumulus un jour d'été pour en avoir un exemple. L'analyse de la convection thermique est complexe, car le mouvement du fluide dépend de la température à cause de la force de flottabilité 10-17 et la température est elle-même transportée et diffusée par les mouvements du fluide. Quand les mouvements sont de grande échelle, la diffusion moléculaire est négligeable, ne devenant manifeste que pour lisser les gradients de température quand les échelles deviennent très petites.

Les exemples de convection thermique ne manquent pas :

- La fumée au-dessus d'une cigarette ou d'un feu illustre toute sa complexité avec ses mouvements irréguliers qui varient rapidement dans le temps et dans l'espace, synonyme de turbulence.
- Le flux solaire traverse l'atmosphère assez facilement et vient chauffer le sol : des thermiques sont générées au sol et montent assez haut, les cumulus d'altitude révélant la présence de ces thermiques et leur comportement turbulent.
- Sous l'effet du refroidissement hivernal, les eaux océaniques de surface, chaudes et salées, deviennent plus denses et on a pu les voir plonger à plusieurs milliers de mètres en mer de Weddell dans l'Antarctique ou en mer du Groenland. Le même phénomène s'observe lors d'hivers intenses dans le golfe du Lion.
- L'intérieur de la terre est très chaud à cause de la radioactivité interne : la convection de grande échelle qui en résulte est le moteur du déplacement en surface des plaques tectoniques rigides de la croûte terrestre et donc *in fine* de la dérive des continents.
- Des thermiques existent au voisinage des parois de montagne chauffées par le soleil, mis à profit par les pilotes de planeurs ou de parapentes.

- La ventilation d'un bâtiment est un problème de convection thermique.
- En l'absence de vent, l'air réchauffé au contact d'une personne fait un mur assez isolant. Mais cette couche est constamment détruite en présence de vent contribuant à la perte de chaleur (*wind chill factor*).

10.3 Thermodynamique des gaz parfaits

10.3.1 Chaleurs spécifiques

Les expériences de Gay-Lussac et Joule pour les gaz ont permis de montrer qu'à une très bonne approximation, l'énergie U n'est fonction que de la température. La situation est celle de la figure 10.9.

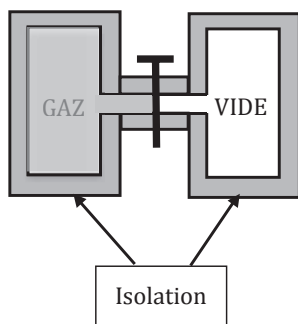


Figure 10.9

L'expérience de Joule ou l'expansion d'un gaz dans le vide. Les parois en gris sont des murs adiabatiques.

Un gaz remplit une chambre A séparée d'une autre B dans lequel on a fait le vide ($p = 0$). Le tout est placé dans un bain d'eau avec parois isolantes dont on peut mesurer la température. À un instant donné, on ouvre le robinet qui permet au gaz de la chambre A de s'échapper vers la chambre B, l'équilibre étant obtenu lorsque $p_A = p_B$. La détente est brutale et irréversible et génère de l'énergie cinétique. Une fois l'équilibre établi, on observe que la température du bain n'a pas changé et que donc $Q = 0$. Mais comme la détente de Joule se fait dans le vide, la relation 10-1 montre que l'environnement ne fait aucun travail sur le système, $W = 0$, de sorte que 10-9 (a) se résume à :

$$\Delta U = 0$$

L'énergie interne du système n'a pas changé et pourtant le volume occupé par le gaz a changé ainsi que la pression. Comme la transformation est isotherme, le produit pV est constant entre les états initial et final, et si V augmente, p diminue.

Donc U ne peut dépendre ni du volume ni de la pression. On en déduit que U ne peut être fonction que de la température :

$$U = U(T)$$

De façon générale, lorsque U est l'énergie par mole (ou par kg), la chaleur spécifique est :

$$C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V$$

Pour les gaz parfaits, on peut écrire :

$$U = C_V T + \text{cst} \quad 10-18$$

où C_V est la chaleur spécifique à volume constant pour une mole de gaz. En utilisant 10-9 (d), la première loi de la thermodynamique pour la transformation infinitésimale réversible d'un gaz parfait devient :

$$dU = C_V dT = dQ - p dV \quad 10-19$$

Si on dérive l'équation des gaz parfaits 10-6 pour une mole de gaz ($n = 1$) :

$$p dV + V dp = R dT$$

En substituant $p dV$ dans l'équation 10-19 :

$$(C_V + R) dT - V dp = dQ$$

Pour une transformation à pression constante $dp = 0$, on obtient :

$$C_P = \left. \frac{\partial Q}{\partial T} \right|_P = C_V + R \quad 10-20$$

Puisque $C_V < C_P$, la relation 10-20 montre directement qu'il est plus facile de chauffer un gaz à volume constant qu'à pression constante. En effet quand le volume est constant, il n'y a pas de travail et tout le transfert de chaleur augmente l'énergie interne. La théorie cinétique des gaz va permettre de trouver ce que sont C_V et C_P . La relation 10-20 permet d'écrire l'enthalpie et l'énergie interne du gaz parfait comme :

$$H(T) = C_P T + \text{cst}$$

et

$$U(T) = C_V T + \text{cst}$$

10-21

10.3.2 Transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait

La transformation d'un système est adiabatique si le système est thermiquement isolé de sorte qu'aucun échange de chaleur avec l'environnement ne puisse avoir lieu. La situation peut être celle d'un gaz enclos par une frontière isolante ou celle

d'une ascension rapide d'une masse d'air chaud dans l'atmosphère, de sorte que la diffusion thermique n'a pas le temps d'agir. Si les parois de l'ensemble cylindre-piston de la figure 10.1 sont isolantes, $Q = 0$, et lors d'une expansion le système fait du travail sur l'environnement et donc $\Delta U < 0$. Compte tenu de la relation 10-18, la température chute. On peut calculer cette chute avec la relation 10-19 et $dQ = 0$:

$$C_V dT + p dV = 0$$

En éliminant p par la relation des gaz parfaits :

$$C_V dT + \frac{RT}{V} dV = 0$$

ou encore :

$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} = 0$$

une expression qui s'intègre directement :

$$\ln(T) + \frac{R}{C_V} \ln(V) = \text{constant}$$

ou

$$TV^{\frac{R}{C_V}} = \text{constant}$$

En utilisant la loi des gaz parfaits 10-6, on obtient aussi :

$$pV^\gamma = \text{constant} \quad 10-22$$

avec $\gamma = C_p/C_V$ supérieur à 1. Dans un diagramme (V, p) , une transformation isotherme se fait sur une hyperbole d'équation $pV = \text{constant}$. Avec 10-22, les courbes d'une transformation adiabatique sur ce diagramme sont similaires, mais les pentes sont plus fortes.

10.3.3 Théorie cinétique des gaz

La thermodynamique s'est développée en énonçant des lois en accord avec les faits expérimentaux sans considération pour la nature moléculaire de la matière. Sous l'impulsion de Maxwell et Boltzmann, le lien a été finalement fait entre les variables macroscopiques que sont la pression, la température, l'énergie interne et les propriétés moléculaires. Ce lien avec la mécanique donne une vision qui permet de mieux comprendre le comportement macroscopique au-delà d'une simple adhésion aux principes de la thermodynamique.

Le premier exemple va permettre de voir que l'énergie cinétique moléculaire et la température ne font qu'un. Considérons n moles d'un gaz parfait que l'on place dans une enceinte de volume V dont les parois sont isolées. Quel est le lien entre la pression du gaz et la vitesse des molécules ? On peut imaginer les molécules comme des balles qui bougent dans tous les sens et se cognent contre les murs, et on va faire

trois hypothèses : on ignore les collisions entre les molécules, on suppose que les collisions sur les murs sont élastiques et on fait usage de l'arsenal de la mécanique classique (le chapitre 6).

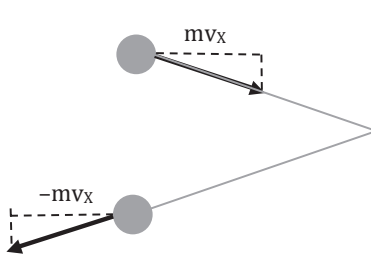


Figure 1.10

Lorsque la collision d'une molécule avec le mur est élastique, l'énergie cinétique est conservée et après réflexion la quantité de mouvement dans la direction x perpendiculaire au mur est égale et opposée à celle avant la collision.

Soit l'axe x perpendiculaire à une des frontières de l'enceinte. Une molécule de quantité de mouvement $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ heurte cette face si la composante de sa vitesse v_x est dirigée vers elle. Comme l'énergie cinétique est conservée, la vitesse de la molécule devient $-v_x$ après la collision. La variation de quantité de mouvement Δp_x après le choc est :

$$\Delta p_x = -mv_x - mv_x = -2mv_x$$

La quantité de mouvement délivrée au mur est donc $+2mv_x$. Pendant un intervalle de temps Δt , une molécule de vitesse v_x a un déplacement $v_x \Delta t$ vers la paroi (dans la direction x) et toutes les molécules à une distance moindre vont la frapper. Trouver la force exercée par les molécules sur la paroi revient à trouver le nombre de collisions avec la paroi pendant ce temps Δt . Considérons un petit cylindre de contrôle de surface A et de longueur $v_x \Delta t$. Toutes les molécules présentes dans ce cylindre qui se déplacent vers le mur vont le frapper et se réfléchir comme sur la figure 10.10. La densité de molécules dans l'enceinte de volume V est nN_A/V et donc le nombre de molécules du petit cylindre de contrôle est $(nN_A/V) \times (Av_x \Delta t)$. Mais dans ce volume de contrôle, on peut considérer que seule la moitié des molécules va vers la paroi et que l'autre moitié s'en éloigne, de sorte que le nombre de collisions n'est que la moitié du nombre de molécules du cylindre de contrôle. Pendant l'intervalle de temps Δt , le nombre de collisions est donc $\frac{1}{2} (nN_A/V) \times (Av_x \Delta t)$ et la quantité de mouvement nette fournie à la paroi est :

$$\sum \Delta p_x = \frac{nN_A Av_x \Delta t}{2V} \times 2mv_x = \frac{nN_A mv_x^2 A \Delta t}{V}$$

et donc la pression, la force par unité de surface, devient :

$$p = \frac{\sum \Delta p_x}{A \Delta t} = \frac{nN_A mv_x^2}{V}$$

Mais les molécules ont toutes des vitesses différentes, de sorte que la pression exercée sur le mur va être la moyenne de l'expression précédente notée par la barre supérieure :

$$p = \frac{nN_A m \overline{v_X^2}}{V}$$

Pour une molécule de vitesse \mathbf{v} , $v^2 = v_X^2 + v_Y^2 + v_Z^2$ et comme les vitesses sont aléatoires et isotropes, les termes carrés sont égaux entre eux, et donc : $\overline{v_X^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$. Mais la quantité $E_C = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{1}{2} m \overline{v_{\text{RMS}}^2}$ est l'énergie cinétique moléculaire moyenne dans le référentiel du centre de masse du système où la vitesse rms v_{RMS} (*root mean square*) définie par $v_{\text{RMS}} = (\overline{v^2})^{1/2}$ est la racine carrée de la variance ou écart-type. Ainsi :

$$p = \frac{n}{V} \frac{M}{3} v_{\text{RMS}}^2 \quad 10-23$$

où l'on a fait apparaître la masse molaire M . En identifiant 10-23 avec la loi des gaz parfaits 10-6, on trouve que la vitesse rms des molécules dépend de la température comme :

$$v_{\text{RMS}} = \left(\frac{3RT}{M} \right)^{1/2} \quad 10-24$$

Ces vitesses moléculaires sont élevées : pour l'hydrogène à la température ordinaire de 300 K, v_{RMS} atteint 1 920 m s⁻¹ et 517 et 483 ms⁻¹ pour l'azote et l'oxygène respectivement. De fait Boltzmann a trouvé la loi de distribution des vitesses moléculaires et v_{RMS} mesure l'écart-type de cette distribution, certaines molécules ayant des vitesses plus élevées que v_{RMS} et d'autres moins élevées. L'énergie cinétique moléculaire moyenne se réécrit alors en fonction de la température :

$$E_C = \frac{3}{2} \frac{mRT}{M} = \frac{3}{2} k_B T \quad 10-25$$

en faisant apparaître la constante de Boltzmann. Le résultat est assez inattendu : à une température donnée, toutes les molécules des gaz parfaits ont la même énergie cinétique moyenne de translation, et ce, quelle que soit leur masse. On comprend finalement ce qu'est la température, simplement une mesure de l'énergie cinétique moléculaire moyenne. Le calcul précédent permet aussi de trouver une expression pour l'énergie interne d'un gaz parfait. Pour un gaz mono-atomique comme l'hélium, le néon ou l'argon, l'énergie interne est simplement la somme des énergies cinétiques de translation des atomes. On peut écrire :

$$U = \frac{3}{2} n N_A k_B T$$

soit

$$U = \frac{3}{2} nRT$$

La théorie cinétique des gaz confirme que l'énergie interne ne dépend que de la température et l'expression montre que la chaleur spécifique (par mole) à volume constant introduite par 10-18 est :

$$C_V = \frac{3}{2} R = 12,5 \text{ J mole}^{-1}\text{K}^{-1}$$

La relation 10-18 permet d'en déduire C_p pour le gaz monoatomique :

$$C_p = \frac{5}{2} R = 20,8 \text{ J mole}^{-1}\text{K}^{-1}$$

Ces prédictions fonctionnent bien pour les gaz monoatomiques mais pas pour les gaz diatomiques ou les assemblages moléculaires. Les molécules plus complexes peuvent en effet stocker de l'énergie sous d'autres formes que l'énergie cinétique de translation du gaz monoatomique. Pour ce dernier il n'y a que trois translations possibles. Si le gaz est diatomique, les atomes peuvent aussi tourner l'un autour de l'autre et il faut donc ajouter l'énergie cinétique de rotation supplémentaire. Maxwell a postulé qu'il y avait équipartition de l'énergie entre toutes les différentes formes d'énergie associées à ces mouvements de translation et de rotation :

« Chaque molécule possède un certain nombre f de degrés de liberté, autant de façons indépendantes de stocker de l'énergie et chaque degré de liberté est associé à une énergie moyenne de $1/2 k_B T$ par molécule. Soit $U = f \frac{1}{2} k_B T$ »

On en déduit la chaleur spécifique molaire à volume constant en fonction du nombre de degrés de liberté :

$$C_V = \frac{f}{2} R$$

Pour un gaz monoatomique, $f = 3$ pour les trois translations. Il faut faire appel à la mécanique quantique pour montrer qu'il n'y a que deux rotations efficaces pour un gaz diatomique, les deux rotations autour d'axes perpendiculaires à la droite joignant les deux atomes. Par contre il y a bien trois rotations pour les molécules plus complexes telles que H_2O ou CO_2 . Le tableau suivant résume la situation :

Tableau 10.7

Les chaleurs spécifiques des gaz N_2 , O_2 , H_2 , CO_2 [$J \text{ mole}^{-1} K^{-1}$] sont des valeurs expérimentales mesurées aux conditions standard ($T = 298,15 \text{ K}$ et $p = 1 \text{ atm}$). Source : Prigogine et Kondepudi, 1999.

Molécule	Translation	Rotation	f	C_V (molaire)	C_p (molaire)
Monoatomique	3	0	3	$3/2 R = 12,472$	$5/2 R = 20,786$
Diatomique	3	2	5	$5/2 R = 20,786$	$7/2 R = 29,101$
Polyatomique	3	3	6	$3 R = 24,643$	$4 R = 32,857$
N_2				20,74	29,12
O_2				20,95	29,36
H_2				20,44	28,82
CO_2				28,46	37,11

Le tableau 10-7 permet de voir que les valeurs observées pour les gaz réels ne suivent pas exactement les valeurs théoriques de Maxwell, car quand les pressions et les températures sont trop élevées, on ne peut plus négliger les forces entre molécules et donc l'énergie potentielle interne moléculaire. Diverses méthodes ont été utilisées pour déterminer les chaleurs spécifiques des gaz. La méthode calorimétrique consiste à chauffer le gaz par une résistance électrique. La puissance électrique délivrée dans la résistance est égale à la chaleur absorbée par le gaz et il suffit alors de mesurer la température du gaz pour déterminer les chaleurs spécifiques. Le tube de Kundt, un exercice du chapitre 9, permet de mesurer la vitesse du son de laquelle on peut déterminer $\gamma = C_p/C_v$. La valeur de γ a pu être aussi déterminée par Rüchhardt dans une expérience mécanique d'oscillations d'une masse de gaz (voir exercice 47).

Note :

L'air est composé à 98,6 % de gaz diatomiques de sorte qu'approximativement $C_v = 717 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $C_p = 1\,004 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ et $\gamma = 7/5 (= 1,4)$. Pour passer des valeurs du tableau 10.5 à ces valeurs, il faut prendre la masse molaire équivalente de l'air sec M_D (voir note en fin du § 10.2.4).

10.4 La deuxième loi de la thermodynamique

La deuxième loi de Newton de la mécanique classique est réversible par rapport au temps : si on change t en $-t$ dans ces équations, les conditions initiales sur la vitesse changent de \mathbf{v} en $-\mathbf{v}$, mais l'accélération et les forces conservatives restent inchangées. Les corps vont donc revenir exactement sur leurs pas, suivre leurs trajectoires à rebours, tout se passant comme si on passait le film en arrière. C'est le cas d'une boule qui descend sur le plan incliné de Galilée. Si on inverse la vitesse observée en bas, on observe que la boule remonte en retraçant son parcours initial. Selon le langage de la mécanique classique, la transformation entre énergie cinétique et potentielle est réversible. Réversible veut donc simplement dire que l'on peut observer le phénomène se déroulant dans le sens avant ou arrière du film.

La vie réelle offre de multiples exemples donnant une image alternative : un livre qui glisse sur une table finit par s'arrêter, un œuf qui tombe par terre éclate en mille morceaux et s'immobilise, un glaçon qui fond dans un verre d'eau, la pluie qui tombe d'un nuage, une tasse de thé posée sur une table qui se refroidit tandis que l'air environnant se réchauffe, une tache de colorant mise au sein d'un bocal rempli d'eau au repos qui diffuse et finit par s'étaler uniformément dans tout le bocal, un trou dans un ballon bien gonflé qui laisse échapper l'air et le ballon qui finit à plat, le réchaud qui laisse échapper du gaz qui brûle. Dans tous ces exemples que l'on pourrait multiplier *ad infinitum*, on n'observe jamais le film se déroulant en arrière : ces transformations sont irréversibles. Ces expériences irréversibles illustrent la flèche du temps qui passe, inexorablement. Pourtant la conservation de l'énergie de la première loi ne dit rien sur l'impossibilité des retours en arrière : l'énergie cinétique du livre est transformée en énergie interne des molécules {livre + table}.

L'énergie potentielle de l'œuf est transformée en énergie interne {œuf + sol}. Le transfert de chaleur s'effectue de la tasse de thé vers l'air environnant, mais l'énergie interne {tasse + air} est conservée. Du point de vue de la première loi, état initial et état final sont équivalents. La seconde loi s'occupe précisément de la direction d'évolution des processus spontanés dans la nature. Tous ces changements spontanés sont accompagnés d'une dispersion de l'énergie et de la matière, et donc d'une croissance du désordre. La deuxième loi reconnaît la différence fondamentale entre chaleur et travail : un transfert de chaleur stimule l'agitation erratique, aléatoire des molécules quand le travail met les molécules en mouvement ordonné. Les processus que l'on observe sont tous gouvernés par la variation d'un nouveau paramètre d'état S appelée entropie qui est une mesure du désordre du système. L'entropie gouverne toutes les évolutions des systèmes naturels et elle possède deux formulations, l'une thermodynamique, l'autre statistique, qui se complètent. Pour les systèmes isolés, la forme macroscopique de la deuxième loi s'exprime à l'aide de l'exposé compact.

La deuxième loi

Quand un processus irréversible se produit dans un système isolé, l'entropie du système augmente toujours, $\Delta S > 0$.

Cette loi traduit simplement que le désordre augmente, ce qui est le cas de tous les exemples de processus irréversibles listés plus haut. Comme aucun processus naturel n'est entièrement libéré du frottement ou de la conduction thermique, tous les processus sont en réalité irréversibles. L'entropie n'obéit pas à une loi de conservation précise comme pour l'énergie, c'est une inégalité. Notons qu'elle ne dit rien non plus sur les échelles de temps associées avec ces changements spontanés des systèmes : le changement peut être instantané ou prendre beaucoup de temps.

L'objectif de ce paragraphe est de montrer comment ce simple constat de croissance de l'entropie introduit des limites concrètes aux possibilités de transfert de chaleur en travail. Les deux formulations, thermodynamique classique et mécanique statistique, seront présentées. Le cas particulier des gaz parfaits sera mis en avant, car il permet d'obtenir des résultats quantitatifs assez simplement. Les choix pédagogiques qui sont faits suivent d'assez près ceux du livre de Halliday-Resnick-Walker, *Fundamental of Physics*, 2001.

10.4.1 La détente de Joule et la formulation de la deuxième loi

La détente libre d'un gaz dans le vide a déjà été analysée du point de vue énergétique. Elle est reprise ici, car elle permet de voir la propriété centrale de l'entropie sur un exemple concret. Lorsqu'on ouvre le robinet de l'expérience de la figure 10.9, le gaz se répand dans l'autre chambre jusqu'à ce que les pressions des deux compartiments s'équilibrent. C'est clairement un processus irréversible du type ballon qui se dégonfle, car les molécules ne reviennent pas se ranger dans le compartiment initial. L'expérience est un peu mieux contrôlée que pour le ballon, car le système

est isolé de l'environnement par un mur adiabatique. Ce système est gouverné par les paramètres d'état suivants, pression, volume, température, énergie interne. En l'absence d'échange de chaleur et de travail fait, l'énergie interne est conservée et la température ne change pas. L'état initial et l'état final sont donc représentés par les deux points sur le diagramme (V, p) :

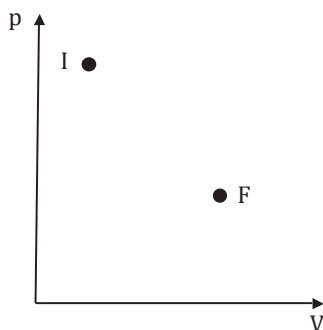


Figure 10.11

Et comme la température est constante, on a $p_I V_I = p_F V_F$ si le gaz est parfait. Mais le passage de I à F est complexe avec des fluctuations turbulentes transitoires de la pression et de la température du gaz et on ne peut donc pas tracer une courbe continue entre les points I et F représentant la transformation irréversible sur la figure 10.11.

On peut changer la température d'un système de façon réversible en le mettant en contact avec une source de chaleur dont la température diffère très peu de celle du système. Pour une telle transformation réversible, la variation d'entropie S est définie par :

$$dS = \frac{dQ_{\text{REV}}}{T} \quad 10-26$$

Le changement d'entropie entre I et F est alors défini de la façon suivante :

$$\Delta S = S_F - S_I = \int_I^F \frac{dQ_{\text{REV}}}{T} \quad 10-27$$

avec dQ_{REV} la chaleur transférée ou perdue par le système au cours de la transformation infinitésimale réversible et T la température du transfert. Si $dQ > 0$ (< 0), la chaleur est transférée au système (perdue par le système). Les unités de S sont $[J K^{-1}]$. Le point important dans 10-27 est que la température du système et celle de la source de chaleur restent en permanence quasi égales pendant toute la transformation.

La justification de la relation 10-26 sera abordée au § 10.4.5. La propriété centrale contenue dans 10-26 est que l'entropie est une variable d'état au même titre que

l'énergie interne. Cela veut dire que la variation ΔS entre deux états d'équilibre est entièrement définie par les valeurs de l'entropie S_I et S_F à l'équilibre et ne dépend pas du tout du chemin suivi pour passer de I à F. Le calcul de l'intégrale 10-27 pour une transformation irréversible est impraticable puisque le chemin est essentiellement inconnu, les valeurs de p et V changeant de façon erratique (apparition de turbulence). Mais si on affirme que S est une variable d'état, on peut remplacer la transformation irréversible de I à F par une transformation réversible, les points I et F étant alors reliés par une courbe continue bien définie. Cette idée va être suivie pour la détente de Joule. Comme la température d'un gaz parfait ne change pas durant une détente libre $T_I = T_F = T$, le choix d'une transformation réversible isotherme pour connecter les deux points de la figure 10.11 paraît donc approprié. Le dispositif permettant cette transformation décrit sur la figure 10.12 tient plus d'une expérience par la pensée que d'une réalisation pratique. Un piston coulisse sans frottement dans un cylindre isolé thermiquement sauf à sa base où il est mis en contact avec un réservoir à la température constante T . Le piston est maintenu en place par le poids de petits plombs infinitésimaux placés dans une boîte. Au départ la pression et le volume initial sont ceux de l'expérience de la figure 10.12. Puis on enlève un à un les petits plombs posés sur le piston, une opération réversible, jusqu'à ce que la pression et le volume du gaz soient ceux de l'état final. Ce faisant, on a réalisé une transformation réversible isotherme qui connecte les mêmes états, initial et final, que l'expérience précédente. Le changement d'entropie sera donc le même pour les deux transformations.

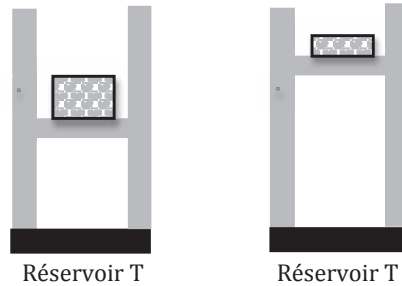


Figure 10.12

À gauche, l'état initial. En enlevant des petits plombs régulièrement, le gaz au contact du réservoir subit une détente isotherme réversible pour atteindre l'état final à droite.

L'intégrale 10-27 est alors facile à calculer :

$$\Delta S = S_F - S_I = \frac{1}{T} \int_I^F dQ = \frac{Q}{T}$$

On a déjà calculé le travail fait lors de la détente isotherme d'un gaz parfait au § 10.2.2. Comme ici l'énergie interne est constante, la première loi dit que $Q = -W$. Attention, dans la première loi, W est le travail fait par l'environnement sur le système, et il est ici négatif puisque les poids montent et donc :

$$Q = +nRT \ln\left(\frac{V_F}{V_I}\right)$$

Pour que le gaz conserve la même température durant la détente réversible, il faut que le réservoir fournisse la quantité de chaleur Q au gaz. Comme Q est positif, l'entropie du gaz augmente donc comme :

$$\Delta S|_{\text{GAZ}} = nR \ln\left(\frac{V_F}{V_I}\right) \quad 10-28$$

Et ce changement d'entropie $\Delta S|_{\text{GAZ}}$ est exactement le même que celui de la transformation irréversible de Joule dès lors que les mêmes volumes V_I et V_F sont utilisés. Le fait que l'augmentation d'entropie ne dépende que du rapport des volumes est tout sauf anodin : le désordre moléculaire augmente en effet quand les molécules ont accès à un volume plus grand.

Certes le dispositif de la figure 10.12 fournit une transformation réversible isotherme, mais le gaz n'est plus un système isolé puisqu'il échange de l'énergie thermique avec le réservoir. Lorsque l'on considère un système fermé qui échange de la chaleur avec l'environnement extérieur, il faut considérer l'entropie du système **et** celle de l'environnement, ici le réservoir. Le réservoir fournit au gaz la quantité de chaleur Q . La variation d'entropie du réservoir est donc :

$$\Delta S|_{\text{RESERVOIR}} = -\frac{Q}{T} = -nR \ln\left(\frac{V_F}{V_I}\right)$$

L'entropie est une variable extensive de sorte que la variation d'entropie d'un système est la somme des variations d'entropie des sous-systèmes. Quand on additionne les variations d'entropie du système et du réservoir, on trouve que $\Delta S|_{\text{GAZ}} + \Delta S|_{\text{RESERVOIR}} = 0$. Comme le système total {gaz + réservoir} est isolé et l'objet d'une transformation réversible, il faut alors compléter l'énoncé de la 2^e loi de la façon suivante :

La deuxième loi pour un système isolé

Quand des processus se produisent dans un système isolé, l'entropie S du système augmente pour les processus irréversibles et reste constante pour les processus réversibles. L'entropie ne décroît jamais : $\Delta S \geq 0$. 10-29

Dans le monde réel tous les processus sont irréversibles, si bien que l'entropie des systèmes isolés augmente toujours. La conséquence est qu'un système isolé ne peut jamais repasser deux fois par le même état. La deuxième loi est donc un principe d'évolution. L'univers considéré comme un système isolé est en constante évolution alors que la somme de toutes ses formes d'énergie reste invariante.

Notes :

1) Un processus réversible qui se déroule à entropie constante encore appelé isentropique a lieu quand on peut supposer que le frottement, la conduction thermique ou le mélange restent négligeables. Une idéalisation certes, mais qui comme dans l'exemple précédent s'avère fort utile.

2) On ne rencontrera dans cette introduction que des processus qui demandent de ne considérer que les variations d'entropie entre deux états. Mais sa valeur absolue est nécessaire en chimie et a été définie par Nernst : l'entropie de tous les systèmes s'annule au zéro absolu, un résultat confirmé par l'expérience. La mécanique quantique en fournit le cadre théorique indispensable aux basses températures.

10.4.2 L'entropie variable d'état : le cas du gaz parfait

La propriété centrale utilisée au paragraphe précédent est que l'entropie est une variable d'état au même titre que l'énergie interne, des quantités parfaitement définies aux états d'équilibre du système. Ceci implique que la variation d'entropie lors d'une transformation d'un système soit nulle sur un contour fermé dans un diagramme (V, p). Admettons pour l'instant cette propriété qui sera discutée au § 10.4.5 après la présentation du cycle de Carnot.

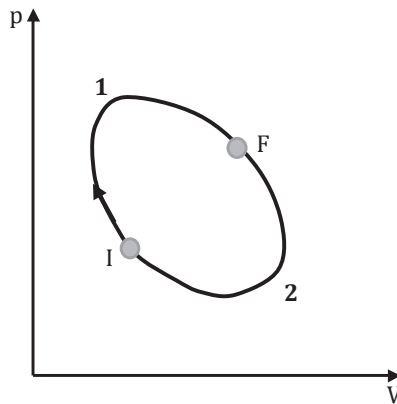


Figure 10.13

L'entropie est une variable d'état si sa variation sur un contour fermé arbitraire est nulle. Si c'est le cas, on peut calculer la variation d'entropie de l'état I à l'état F en passant par le chemin 1 ou bien par le chemin 2.

Sur le contour fermé de la figure 10.13, on a par définition :

$$\oint dS = \oint \frac{dQ_{\text{REV}}}{T} = 0$$

Mais si c'est le cas, on montre que le passage d'un état I à un état F est indépendant du chemin choisi 1 ou 2 :

$$\oint dS = \int_I^F dS_1 + \int_F^I dS_2 = 0$$

ou :

$$\int_I^F dS_1 = \int_I^F dS_2$$

Dans le cas particulier du gaz parfait, on peut calculer exactement cette variation d'entropie d'un état à un autre ; comme elle ne dépend que de l'état initial et de l'état final, on a le choix de n'importe quelle transformation réversible pour aller de l'un à l'autre, par extension du problème précédent. Pour chaque petit pas d'une transformation réversible, le système reçoit une quantité de chaleur dQ et le travail fait par l'environnement est dW . La première loi indique que :

$$dU = dQ + dW$$

En substituant $dW = -pdV$ et $dU = nC_V dT$ (pour n moles), dQ devient :

$$dQ = pdV + nC_V dT$$

On exprime la pression avec la loi des gaz parfaits 10-6 et on calcule $dS = dQ/T$:

$$dS = nR \frac{dV}{V} + nC_V \frac{dT}{T}$$

Cette expression s'intègre directement entre l'état initial et final :

$$\Delta S = S_F - S_I = nR \ln\left(\frac{V_F}{V_I}\right) + nC_V \ln\left(\frac{T_F}{T_I}\right)$$

une expression qui montre comment S , variable d'état, s'exprime pour un gaz parfait en fonction du volume et de la température. Le deuxième terme est nouveau et montre qu'une augmentation de température est aussi un facteur d'accroissement de l'entropie donc du désordre, ce qui n'est pas pour surprendre puisque l'on a vu que la température n'est autre que de l'agitation thermique mesurée par l'énergie cinétique moléculaire.

10.4.3 *Extension : la deuxième loi pour les systèmes fermés*

La deuxième loi a été définie pour les systèmes isolés. Mais qu'en est-il pour les systèmes fermés qui peuvent échanger de l'énergie avec l'environnement ? On ne traitera pas ici des systèmes ouverts qui échangent aussi de la matière avec l'environnement sauf dans des cas très simples.

La discussion de la détente isotherme en relation avec la figure 10-12 faisait apparaître cette situation : le système n'était plus isolé mais fermé puisque les transferts de chaleur étaient possibles avec le réservoir. Il y a beaucoup d'avantages à scinder la variation d'entropie du système en deux parties, celle due aux processus internes au système et celle due aux échanges avec l'environnement. Comme l'entropie est une variable extensive, l'entropie d'un système est la somme des entropies des sous-systèmes et donc on peut écrire :

$$dS = d_I S + d_E S \quad 10-30$$

où $d_I S$ est la variation d'entropie du système due aux processus irréversibles internes et $d_E S$ est la variation d'entropie du système due aux échanges d'énergie sous forme de chaleur entre le système et son environnement (les réservoirs). Quand l'environnement conserve le volume (le cas particulier ici), la variation de l'énergie interne de l'environnement se réduit à $dU_E = dQ$, que le processus soit réversible ou pas puisque U_E est une variable d'état. La variation d'entropie de l'environnement est alors donnée par 10-26 :

$$d_E S = \frac{dQ}{T} \quad 10-31$$

On a omis l'indice $_{REV}$ dans l'expression 10-31 puisqu'elle est valable quelle que soit la nature de la transformation. Pour une transformation finie à T constant, on obtient :

$$\Delta S_E = \frac{Q}{T}$$

Le signe de $d_E S$ peut être positif ou négatif selon le sens du transfert de chaleur entre le système et son environnement. En revanche, la part due aux processus irréversibles interne au système $d_I S$ est toujours positive (ou nulle si les processus sont réversibles).

Avec 10-30, la variation d'entropie totale lorsque le système passe d'un état A à un état B s'écrit :

$$\begin{aligned} S(B) - S(A) &= \int_A^B d_I S + \int_A^B d_E S \\ S(B) - S(A) &= \int_A^B d_I S + \int_A^B \frac{dQ}{T} \end{aligned}$$

Mais comme $d_I S \geq 0$, la première intégrale à droite est positive ou nulle, et on en déduit l'inégalité suivante qui permet d'énoncer la deuxième loi pour les systèmes fermés.

La deuxième loi pour un système fermé :

$$S(B) - S(A) \geq \int_A^B \frac{dQ}{T} \quad 10-32$$

L'inégalité fondamentale 10-32 résume les propriétés de l'entropie dans un système fermé. Si la transformation est réversible, l'inégalité devient égalité et permet de calculer l'entropie de B comme avec 10-27. Si le système est isolé, $dQ = 0$ et on retrouve 10-29.

Considérons le cas d'une transformation cyclique qui ramène le système à son état initial. La variation d'entropie totale est alors nulle puisque S repasse par son état initial :

$$\oint dS = \oint d_E S + \oint d_I S = 0$$

Comme $d_I S \geq 0$, on en déduit :

$$\oint d_E S = \oint \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad [\text{Système}] \quad 10-33$$

Pour que le système revienne à son état initial et que l'entropie totale ne change pas, il faut que le gain d'entropie produit par les processus irréversibles internes soit compensé par des pertes de chaleur avec l'environnement, pertes pondérées par $1/T$. Cette inégalité 10-33 due à Clausius montre la nécessité de l'existence de pertes de chaleur par le système pour permettre l'invariance de l'entropie totale pour un système fonctionnant en cycle.

Notes :

1) Si on considère les transferts de chaleur du point de vue de l'environnement, comme dQ a alors un signe opposé, l'inégalité de Clausius devient :

$$\oint \frac{dQ}{T} \geq 0 \quad [\text{Environnement}]$$

2) Comment calculer la variation d'entropie sur un chemin irréversible ? Comme l'entropie est une variable d'état, S_A et S_B sont parfaitement définies à l'état initial et final, et on peut donc calculer la variation d'entropie par n'importe quelle transformation réversible connectant les deux états A et B.

3) Un exemple : lors des transferts d'énergie d'un système qui se font par l'intermédiaire d'un transfert de chaleur accompagnés d'une différence de température, il faut considérer ensemble le changement d'entropie interne au système et celui causé par les échanges de chaleur avec l'environnement. C'est le cas par exemple de la conduction ou de la radiation de chaleur Q d'un réservoir chaud #1 à la température T_1 vers un réservoir froid #2 à la température T_2 au travers d'un système qui lui ne change pas, illustré sur la figure 10.14. Un tel système est dit en régime permanent.



Figure 10.14

Comme le système ne change pas, ses variations d'énergie interne et d'entropie sont nulles et on peut écrire successivement pour le réservoir 1, le système et le réservoir 2 :

$$\Delta S|_{\text{SYSTEME}} = 0$$

$$\Delta S|_{\text{RES 1}} = -\frac{Q}{T_1}$$

$$\Delta S|_{\text{RES 2}} = +\frac{Q}{T_2}$$

$$\sum \Delta S = \frac{Q}{T_2} - \frac{Q}{T_1} = Q \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

Comme $Q > 0$ et $T_1 > T_2$, il y a bien croissance de l'entropie de l'ensemble {système + les deux réservoirs} lorsque la chaleur est transférée du réservoir 1 chaud au réservoir 2 froid. La deuxième loi explique donc l'observation courante du transfert de chaleur d'un corps chaud vers un corps froid traduite par la loi de Fourier 10-13. Cela se passe dans ce sens, car l'entropie et le désordre augmentent.

10.4.4 *Machines thermiques*

La thermodynamique s'est développée pour résoudre un problème d'ingénierie d'une grande importance, « faire fonctionner un moteur thermique ». Un moteur thermique est un dispositif qui extrait de l'énergie de son environnement sous forme de chaleur pour fournir un travail mécanique utilisable. Au cœur de chaque moteur il y a une substance qui travaille, de l'eau sous forme liquide et vapeur dans une machine à vapeur, un mélange air-essence dans un moteur d'auto. Pour qu'un moteur fonctionne dans la durée, la substance subit un certain nombre de transformations qui se reproduisent périodiquement au cours d'un cycle. Les lois de la thermodynamique permettent d'obtenir des résultats fondamentaux sur le rendement de ces moteurs sans devoir entrer dans la complexité du fonctionnement de leurs diverses parties.

10.4.4.1 Le moteur idéal de Carnot

Toutes les transformations du moteur idéal de Carnot sont réversibles et il n'y pas de pertes d'énergie dues au manque d'isolation, au frottement ou à la turbulence. C'est le meilleur moteur que l'on puisse imaginer et pourtant, comme on va le voir, une source et un puits de chaleur (des pertes) sont absolument nécessaires pour le faire fonctionner. Carnot l'inventa en 1824, bien avant que la première loi de conservation de l'énergie n'ait été formulée.

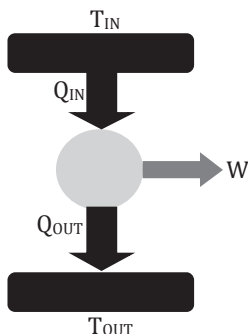


Figure 10.15

La température de la source chaude est T_{IN} , celle de la source froide T_{OUT} . Le système est le moteur en gris qui fournit un travail mécanique W .

Le schéma fonctionnel du moteur est le suivant. Une source chaude à la température T_{IN} transfère une énergie Q_{IN} à la substance de travail qui elle-même transfère une quantité de chaleur Q_{OUT} à une source froide à la température T_{OUT} avec donc $T_{IN} > T_{OUT}$. Q_{IN} et Q_{OUT} sont positives et on utilise ici les indices IN et OUT pour indiquer si le transfert de chaleur est vers le moteur ou vers une source respectivement. La substance de travail contenue dans un cylindre muni d'un piston mobile définit le système et permet d'effectuer un certain travail W sur l'environnement.

Le diagramme (V, p) montre le cycle de transformations subies par ce gaz dont le volume peut varier à cause du piston mobile.

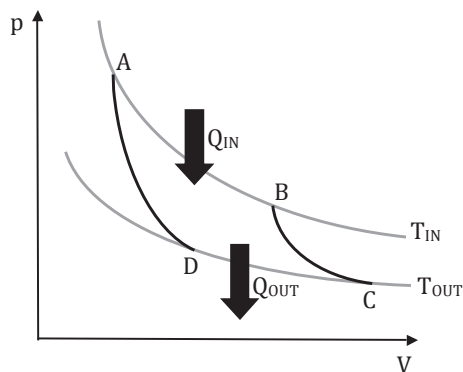


Figure 10.16

Le cycle d'un moteur de Carnot est parcouru dans le sens ABCD. Les arcs gris sont des transformations isothermes, les arcs noirs sont des transformations adiabatiques.

Le gaz du cylindre peut être mis en contact avec des réservoirs ou isolé selon les positions ABCD sur le cycle qui est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre. Sur l'arc AB, le gaz est mis en contact avec la source chaude à la température T_{IN} et reçoit de ce réservoir la quantité de chaleur Q_{IN} . Le gaz subit une expansion isotherme, son volume passant de V_A à V_B . Lorsque le gaz est en contact avec la source froide sur l'arc CD, le gaz perd la quantité de chaleur Q_{OUT} et subit une compression isotherme de C à D, le volume passant de V_C à V_D . Les deux arcs BC et DA qui complètent le cycle sont adiabatiques, le gaz dans le cylindre étant alors isolé de l'environnement. Les arcs adiabatiques obéissent à l'équation 10-22 et comme $\gamma > 1$, la figure 10.13 montre que les arcs AD et BC ont une pente supérieure aux arcs isothermes AB et CD d'équation $pV = \text{cst}$. Sur les arcs AB et BC, le volume augmente et le système fait un travail positif sur l'environnement. La situation est opposée (l'environnement fait du travail sur le système) sur les arcs de compression CD et DA. Le travail net sur un cycle, la différence de ces deux quantités, correspond à l'aire de la surface enclose par l'ensemble des arcs ABCD (voir la discussion de la figure 10.2). Ce travail peut permettre de soulever des poids, de faire tourner des roues ou des bobines d'alternateur au sein d'aimants pour fabriquer de l'électricité. Le calcul de ce travail en suivant les transformations de la figure 10.16 est l'objet de l'exercice 60.

On va faire avantageusement la description du cycle de Carnot à l'aide de deux autres paramètres d'état, la température et l'entropie, puisque la deuxième loi affirme que l'entropie S est aussi une variable d'état. Le diagramme (S, T) du cycle de Carnot est représenté ci-dessous.

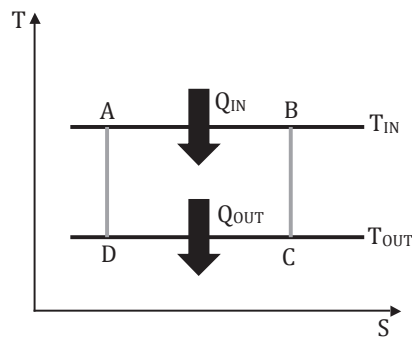


Figure 10.17

Le cycle de Carnot dans le diagramme (S, T) . Les points ABCD de la figure correspondent à ceux de la figure 10.16.

Sur le segment AB, la transformation est isotherme, le système reçoit de l'énergie sous forme de chaleur Q_{IN} et donc son entropie augmente. Sur le segment CD, le système perd de l'énergie Q_{OUT} et son entropie décroît. Les deux segments verticaux

correspondent aux arcs adiabatiques du diagramme (V, p), car en l'absence de chaleur échangée, l'entropie est constante sur ces segments. Reste à faire le bilan entre le travail et les quantités de chaleur échangées au cours du cycle. La première loi indique que $\Delta U = Q + W$ lorsque l'on compte positivement les transferts d'énergie vers le système. Sur un cycle tous les paramètres d'état du système ont une variation nulle, en particulier l'énergie interne U. Et donc le travail fourni par le système $W' (= -W)$ est :

$$W' = Q_{IN} - Q_{OUT}$$

Lorsque le système va de A à B, il gagne de l'entropie par échange avec la source :

$$\Delta S_{IN} = \frac{Q_{IN}}{T_{IN}}$$

Sur le segment CD, il en perd :

$$\Delta S_{OUT} = -\frac{Q_{OUT}}{T_{OUT}}$$

Mais sur le cycle $\Delta S = 0$ puisque S est une variable d'état :

$$\Delta S = \Delta S_{IN} + \Delta S_{OUT} = \frac{Q_{IN}}{T_{IN}} - \frac{Q_{OUT}}{T_{OUT}} = 0$$

soit

10-34

$$\frac{Q_{IN}}{T_{IN}} = \frac{Q_{OUT}}{T_{OUT}}$$

Puisque $T_{IN} > T_{OUT}$, la source chaude transfère nécessairement plus de chaleur que la source froide n'en enlève. Une partie de Q_{IN} est convertie en travail et le reste Q_{OUT} est rejeté à l'extérieur. Le but du jeu dans un système industriel est de transformer le maximum d'énergie reçue Q_{IN} en travail. On définit pour cela le rendement du moteur comme le rapport :

$$\eta = \frac{W'}{Q_{IN}}$$

En remplaçant par les expressions ci-dessus, le rendement s'écrit successivement :

$$\eta = \frac{Q_{IN} - Q_{OUT}}{Q_{IN}} = 1 - \frac{Q_{OUT}}{Q_{IN}} = 1 - \frac{T_{OUT}}{T_{IN}} \quad 10-35$$

Comme $T_{OUT} < T_{IN}$, le rendement est toujours inférieur à 1. La course au meilleur rendement est donc une course pour diminuer la perte de chaleur Q_{OUT} vers l'environnement. Pour que $\eta = 1$, il faudrait que $T_{OUT} = 0$, or le zéro kelvin n'est pas atteignable, ou encore que T_{IN} tende vers l'infini. Même si toutes les transformations du moteur de Carnot sont réversibles, il ne peut pas y avoir de moteurs sans pertes et l'existence de ces pertes permet de donner l'énoncé alternatif de la deuxième loi par Kelvin :

Il n'existe pas de processus qui puisse produire du travail à partir d'une seule source de chaleur.

La beauté du résultat 10-35 est que le rendement ne dépende que des températures T_{IN} et T_{OUT} et pas du tout de la nature de la substance présente dans le cylindre ou de l'ingénierie de fabrication du moteur.

Note :

Si on fait travailler un moteur thermique entre la température de l'eau bouillante et celle de la fusion de la glace, le rendement de Carnot $\eta = 1 - 273/373 = 0,27$. Plus des deux tiers de la chaleur apportée au système est perdue à l'extérieur bien que les transformations soient toutes réversibles (conduction thermique négligeable, pas de frottement dans le moteur, etc.). Quand on fait travailler une machine à vapeur avec une température de l'environnement T_{OUT} constante, l'examen de 10-35 montre que η est une fonction croissante de T_{IN} . Pour augmenter η , on utilise de la vapeur surchauffée qui permet des températures T_{IN} supérieures au point d'ébullition à la pression de travail (elle-même supérieure à la pression atmosphérique).

10.4.4.2 Réfrigérateurs

Un réfrigérateur est l'opposé d'un moteur : il demande du travail fourni par un compresseur électrique pour transférer de la chaleur du compartiment intérieur, le réservoir froid, vers la salle, le réservoir chaud. Les climatiseurs et les pompes à chaleur sont de même nature et les applications sont donc très importantes. Comme dans le moteur de Carnot, le réfrigérateur idéal est celui où tous les processus sont réversibles excluant par là, les pertes de chaleur, les frottements et la turbulence dans le fluide du compresseur. Il suffit donc de renverser toutes les flèches du moteur de Carnot pour avoir le réfrigérateur idéal :

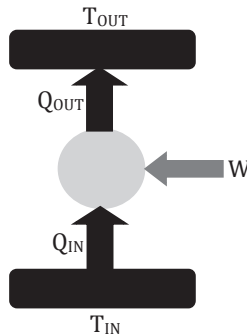


Figure 10.18

Le réfrigérateur : la température T_{OUT} est maintenant supérieure à T_{IN} .

Le but du jeu est d'extraire le maximum de chaleur Q_{IN} du réservoir à basse température T_{IN} pour la moindre dépense de travail. Ainsi l'efficacité du frigidaire est définie par :

$$\chi = \frac{Q_{IN}}{W}$$

La première loi indique que l'énergie interne est constante sur un cycle du moteur et donc :

$$W = Q_{OUT} - Q_{IN}$$

En remplaçant :

$$\chi = \frac{Q_{IN}}{Q_{OUT} - Q_{IN}}$$

et après utilisation de la relation 10-34 :

$$\chi = \frac{T_{IN}}{T_{OUT} - T_{IN}} \quad 10-36$$

Le coefficient d'efficacité d'un réfrigérateur peut être considérablement supérieur à 1 à cause de la différence des températures qui apparaît au dénominateur de 10-36.

Une pompe à chaleur fonctionne exactement selon le même principe sauf que la quantité intéressante est maintenant la chaleur Q_{OUT} reçue à l'intérieur de la pièce. Le coefficient d'efficacité de la pompe à chaleur est alors :

$$\chi_P = \frac{Q_{OUT}}{W} = \frac{T_{OUT}}{T_{OUT} - T_{IN}}$$

Quand $\chi_P = 6$ (une valeur typique), la chaleur libérée à haute température vaut donc 6 fois le travail fourni. Pour chaque joule d'énergie électrique consommée pour faire le travail W , 6 J sont libérés dans la pièce. Quand on utilise un radiateur électrique, on récupère au mieux 1 joule de chaleur pour un joule d'énergie électrique dissipé dans la résistance. En revanche, pour chaque joule d'énergie électrique consommée, cette pompe à chaleur fournira six fois plus de chaleur : en conséquence, il paraît bien préférable de chauffer la maison de cette façon, la porte du réfrigérateur ouverte sur l'extérieur refroidissant l'extérieur et l'arrière chauffant la maison. Ce point fut mentionné par Kelvin dès 1852. Ce n'est toutefois que bien plus tard que les pompes à chaleur ont commencé à être commercialisées, refroidissant le sol, l'air extérieur ou encore le réseau d'eau selon les cas. Ce serait formidable si le transfert de chaleur d'un réservoir froid vers un réservoir chaud pouvait se faire sans dépenser du travail, mais c'est impossible et l'énoncé de la deuxième loi par Clausius l'interdit absolument :

Il n'existe pas de processus dont le seul effet serait de faire passer de la chaleur d'une source froide à une source chaude.

Tous ces énoncés de la deuxième loi, la croissance de l'entropie, les énoncés de Kelvin et de Clausius semblent tous différents, mais on peut montrer qu'ils sont équivalents. On peut utiliser l'une ou l'autre formulation selon les cas.

10.4.4.3 Le rendement des moteurs réels

Le moteur de Carnot est optimal, c'est celui qui a le plus grand rendement pour des températures extérieures de sources T_{IN} et T_{OUT} données. Les moteurs réels souffrent de frottement, de fuites de chaleur diverses par conduction thermique,

frottement, turbulence, toutes irréversibilités qui diminuent les rendements en dessous de la valeur théorique 10-35. La démonstration de cette propriété est la suivante. Appelons η_C le rendement d'un moteur de Carnot opérant entre deux températures T_H et T_B (avec $T_H > T_B$). Imaginons qu'un inventeur ait fabriqué un moteur X avec un rendement supérieur au moteur de Carnot :

$$\eta_X > \eta_C$$

Sur la figure suivante, on couple ce moteur X qui opère entre les réservoirs de température T_H et T_B à un réfrigérateur de Carnot qui opère entre les mêmes températures. On peut s'arranger pour que le travail fourni par X soit juste égal au travail reçu par le réfrigérateur. Le système total {moteur X + réfrigérateur C} ne fournit alors aucun travail sur l'environnement.

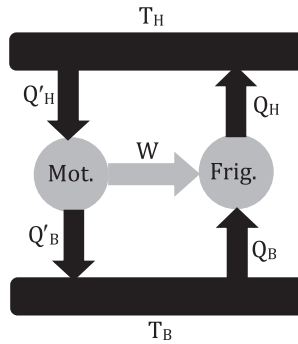


Figure 10.19

T_H est la température de la source chaude, T_B celle de la source froide.

L'hypothèse initiale faite sur les rendements se traduit par :

$$\frac{|W|}{|Q_H'|} > \frac{|W|}{|Q_H|}$$

où l'on utilise dans ce qui suit les valeurs absolues pour éviter toute ambiguïté dans la démonstration. Ainsi :

$$|Q_H| > |Q_H'|$$

Comme le système complet {moteur X + réfrigérateur C} ne fournit pas de travail, la première loi dit que le transfert net d'énergie sous forme de chaleur sur le cycle doit être nul :

$$|Q_B| + |Q_H'| - |Q_H| - |Q_B'| = 0$$

ou encore :

$$|Q_H| - |Q_H'| = |Q_B| - |Q_B'| = Q$$

D'après l'hypothèse de départ, la quantité Q est positive. Mais alors le système {moteur X + réfrigérateur C } aura transféré une quantité de chaleur Q du réservoir froid au réservoir chaud sans l'intermédiaire d'aucun travail, ce qui est impossible d'après l'énoncé de Clausius. L'hypothèse est donc fausse et on conclut qu'aucun moteur réel ne peut avoir de rendement supérieur au moteur de Carnot, au mieux X sera un moteur de Carnot et on peut écrire :

$$\eta_X \leq \eta_C \quad 10-37$$

Cette démonstration donne une valeur universelle au rendement du moteur idéal de Carnot 10-35 qui ne dépend que des deux températures T_{IN} et T_{OUT} . Les relations 10-35 et 10-37 constituent le théorème de Carnot.

Note :

Comme la température T_{OUT} de la source froide est en général celle de la température de l'environnement, le cycle de Carnot montre que la seule variable sur laquelle on peut véritablement jouer pour augmenter le rendement d'un moteur thermique réel est d'augmenter la température T_{IN} de la source chaude.

10.4.5 L'entropie variable d'état

Il faut maintenant revenir sur le résultat admis sans justification, à savoir que l'entropie définie en 10-26 et 10-27 est une variable d'état. Pour cela, il faut montrer que l'intégrale de dS sur un contour fermé est nulle (voir figure 10.13) :

$$\oint dS = \oint \frac{dQ_{REV}}{T} = 0$$

La démonstration se fait en trois étapes :

1) La première étape demande de montrer que la relation est vraie lorsque le contour est un cycle de Carnot d'un gaz parfait. Il s'agit donc de démontrer le résultat 10-34 :

$$\oint dS = \frac{Q_{IN}}{T_{IN}} - \frac{Q_{OUT}}{T_{OUT}} = 0 \quad 10-38$$

La démonstration détaillée à partir de la figure 10.16 est l'objet de l'exercice 60.

2) La deuxième étape est de savoir si ce résultat particulier obtenu pour un gaz parfait reste vrai pour le cycle réversible d'un moteur différent, fait avec une autre substance ou construit différemment. Mais c'est précisément ce qui a été démontré au paragraphe précédent : le rendement de tout moteur réversible est égal au rendement du moteur de Carnot : le cycle réversible d'un moteur arbitraire opérant entre deux températures T_{IN} et T_{OUT} obéit à 10-34. Ainsi 10-38 se généralise à tous les moteurs réversibles.

3) On sait maintenant que 10-38 est vrai lorsque le cycle a la forme du cycle de Carnot de la figure 10.16. Qu'en est-il pour le contour arbitraire de la figure 10.13 ?

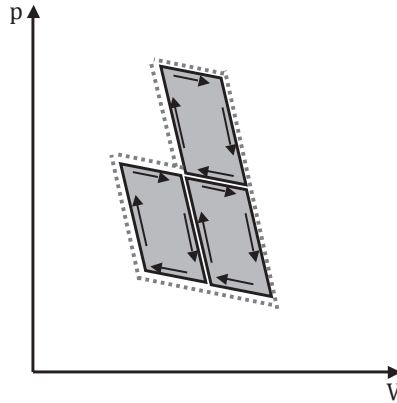


Figure 10.20

Chaque parallélogramme est un cycle de Carnot. Les côtés peu pentus sont les isothermes et les côtés plus pentus sont les adiabatiques. Sur les côtés adjacents de deux cycles voisins, les variations d'entropie sont égales et opposées, car les cycles sont parcourus en sens inverse.

L'idée est de discrétiser l'intérieur d'un contour arbitraire par un réseau de cycles de Carnot élémentaires. On en montre trois sur la figure 10.20. L'intégrale de la variation d'entropie est nulle pour chacun des trois et donc la somme des trois est nulle. Sur les côtés adjacents, le sens des transformations est opposé, les variations d'entropie sont donc égales et opposées et n'ont aucune contribution nette. On en déduit qu'il ne reste que les contributions sur le périmètre extérieur, le contour pointillé sur la figure 10.20 et on peut écrire :

$$\sum_{\text{TOTAL}} \frac{Q_{\text{REV}}}{T} = \sum_{\text{CONTOUR}} \frac{Q_{\text{REV}}}{T} = 0$$

ce qui démontre 10-38 sur le contour pointillé. Dans la limite de cycles de Carnot infinitésimaux, les bords extérieurs des cycles s'adaptent pour suivre un contour arbitraire tracé dans le diagramme (V, p) et la somme ci-dessus devient l'intégrale cherchée 10-38.

10.4.6 Variations d'entropie de quelques transformations

10.4.6.1 L'expansion d'un gaz parfait

On résume ici les résultats du processus d'expansion thermique discuté au § 10.4.1. La relation 10-28 donne la variation d'entropie lors de l'expansion isotherme d'un gaz parfait :

$$\Delta S_{\text{GAZ}} = nR \ln\left(\frac{V_F}{V_I}\right)$$

Elle augmente lors d'une expansion puisque $V_F > V_I$ et cette expression est correcte que la transformation soit réversible ou non puisque S est une fonction d'état. Ceci est la variation d'entropie du gaz, mais si le système est fermé, l'entropie totale est la somme de l'entropie du gaz et de l'entropie de l'environnement (le réservoir) et celle-ci dépend de la nature de la transformation. Lorsque la transformation est réversible, on a vu que :

$$\Delta S_{\text{RESERVOIR}} = -\frac{Q}{T} = -nR \ln\left(\frac{V_F}{V_I}\right)$$

De sorte que la somme totale $\Delta S = \Delta S_{\text{GAZ}} + \Delta S_{\text{RESERVOIR}} = 0$, comme il se doit pour un processus réversible. Si maintenant l'expansion est une détente adiabatique de Joule brutale, la variation d'énergie interne est nulle, le travail est nul et donc le transfert de chaleur avec l'extérieur est nul. La variation d'entropie totale est maintenant celle du gaz :

$$\Delta S_{\text{RESERVOIR}} = 0, \Delta S = \Delta S_{\text{GAZ}} > 0$$

Elle est positive, ce qui est bien la signature d'un processus irréversible.

10.4.6.2 Changement de phase

Lorsqu'un solide devient liquide ou qu'un liquide devient gaz, les molécules passent d'une situation ordonnée à une situation moins ordonnée et donc l'entropie doit augmenter. Considérons un système et son environnement à la température de transition où les deux phases coexistent. Cette température de transition T_{TRS} est égale à 0 °C pour la glace en équilibre avec l'eau liquide à la pression de 1 atm et 100 °C pour l'eau liquide en équilibre avec sa vapeur toujours à 1 atm. À cette température de transition, un transfert de chaleur entre le système et son environnement est réversible, car les deux phases du système sont en équilibre. À pression constante :

$$Q = \Delta_{\text{TRS}}H$$

avec H l'enthalpie. (Les chaleurs latentes de fusion ou de vaporisation du tableau 10.2 sont de fait les valeurs absolues de $\Delta_{\text{TRS}}H$.) La variation d'entropie dans un changement de phase est donc :

$$\Delta_{\text{TRS}}S = \frac{\Delta_{\text{TRS}}H}{T_{\text{TRS}}} \quad 10-39$$

Quand la transition est exothermique, le cas de la condensation ou de la congélation, $\Delta_{\text{TRS}}H < 0$ et l'entropie du système décroît de façon consistante avec l'ordre croissant des molécules. Mais comme la chaleur est transférée à l'extérieur, l'entropie de l'environnement augmente de la même valeur et la variation de l'entropie totale {système + environnement} est nulle en accord avec le caractère réversible de la transformation. Il en est de même si la transition est endothermique, l'entropie du système augmente, mais celle de l'environnement diminue à cause du transfert de chaleur de l'extérieur vers le système et la variation totale reste nulle.

10.4.6.3 Chauffage

La relation 10-27 permet de calculer l'entropie d'un système à la température finale T_F si on connaît l'entropie à la température T_I et la chaleur fournie pour changer progressivement sa température de T_I à T_F :

$$S(T_F) - S(T_I) = \int_{T_I}^{T_F} \frac{dQ_{\text{REV}}}{T} \quad 10-40$$

L'application principale concerne les transferts de chaleur à pression constante (la pression atmosphérique) pour laquelle :

$$dQ_{\text{REV}} = C_P dT$$

La relation 10-40 devient :

$$S(T_F) - S(T_I) = \int_{T_I}^{T_F} C_P \frac{dT}{T}$$

Si le chauffage se fait à volume constant, il suffira de remplacer C_P par C_V dans l'expression ci-dessus. Quand C_P varie peu sur l'intervalle de température considéré, l'expression s'intègre directement :

$$S(T_F) = S(T_I) + C_P \ln\left(\frac{T_F}{T_I}\right) \quad 10-41$$

Soumis à chauffage, l'entropie du système croît avec la température selon une loi logarithmique. Maintenant il existe des situations où plus d'un seul paramètre change, par exemple le volume et la température peuvent différer entre l'état initial et final. Dans une telle situation, on peut décomposer le processus total en deux transformations successives où un seul des paramètres varie. En effet, puisque S est une variable d'état, on peut choisir n'importe quel chemin pour aller de l'état initial à l'état final. On choisira dans ce cas une expansion réversible isotherme pour atteindre le volume final suivi d'un transfert de chaleur à volume constant pour atteindre la température finale.

10.4.7 L'interprétation statistique de l'entropie

La deuxième loi définit l'entropie comme une variable d'état macroscopique et reconnaît l'existence effective des processus irréversibles. Prenons une enceinte isolée et considérons la position de N molécules placées dans la moitié A ou B de cette enceinte. Supposons que les molécules soient toutes dans la partie A à $t = 0$. Quand on ouvre le passage, on observe un transfert des molécules de A vers B et au bout d'un certain temps les molécules du gaz sont équi-réparties, $\sim N/2$ en A et en B. C'est l'expérience de la détente de Joule pour laquelle on a calculé de façon macroscopique la croissance de l'entropie avec 10-28 :

$$\Delta S_{\text{GAZ}} = nR \ln(2)$$

ln(2) car le volume occupé par le gaz a doublé entre l'état initial et final. L'acceptation de ce résultat est difficile, car le mouvement d'une molécule de la gauche vers la droite est tout autant permis par la mécanique classique que le mouvement inverse de la droite vers la gauche puisque la deuxième loi de Newton est réversible par rapport au temps. Les lois de la mécanique seraient-elles mises en défaut au niveau moléculaire ? Cette question a hanté Boltzmann pour proposer la conclusion que l'état où les molécules sont équi-réparties entre les deux moitiés de l'enceinte est tout simplement le plus probable.

Une répartition particulière des N molécules entre les deux parties de l'enceinte A et B s'appelle un micro-état et Boltzmann fait l'hypothèse que chacun de ces micro-états est accessible avec la même probabilité. Pour Boltzmann, l'état macroscopique observé sera la configuration possédant le plus grand nombre de possibilités d'un micro-état résultant en une plus grande probabilité d'occurrence. Suivre cette idée demande de commencer par compter le nombre de combinaisons de ces micro-états, un exercice de dénombrement des configurations possibles des N molécules réparties entre les deux moitiés A et B.

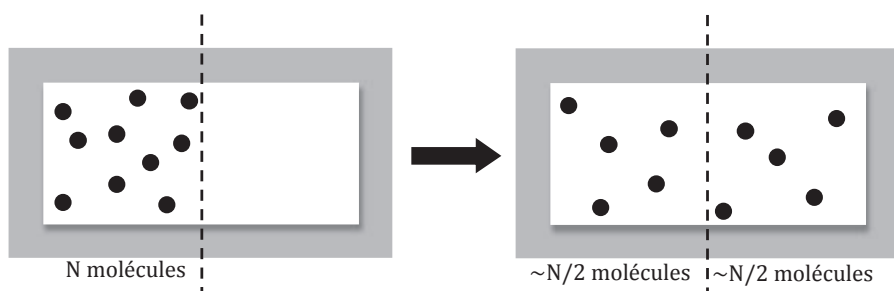


Figure 10.21

L'état initial (à gauche) et final (à droite) des 10 molécules.

Appelons Ω le nombre de façons de placer N molécules dans une configuration particulière avec n_1 molécules positionnées dans la partie A et n_2 positionnées dans la partie B de sorte que $n_1 + n_2 = N$. Pour illustrer les idées, on a pris $N = 10$ et les états initial et final sont représentés sur la figure 10.21. Pour l'état initial, c'est facile il n'y a qu'une seule façon de mettre les N molécules dans la partie A et donc un seul micro-état. Le nombre de micro-états associés à la configuration où n_1 molécules sont dans A est le nombre de combinaisons de N éléments pouvant constituer un groupe de n_1 molécules est :

$$\Omega = \binom{N}{n_1} = \frac{N!}{n_1!(N - n_1)!} = \frac{N!}{n_1!n_2!}$$

Ce nombre de combinaisons de N éléments n_1 à n_1 est aussi noté $C_N^{n_1}$ dans certains ouvrages. Le tableau 10.8 calcule Ω pour les diverses valeurs de (n_1, n_2) quand $N = 10$. Le tableau étant symétrique, on n'en montre que la moitié.

Tableau 10.8

Partie A n_1	Partie B n_2	Nombre de micro- états Ω	Probabilité des micro- états Ω/P	Entropie de Boltzmann $S = k_B \ln \Omega$ [$10^{-23} \text{ J K}^{-1}$]
10	0	1	$9,7 \times 10^{-4}$	0
9	1	10	$9,7 \times 10^{-3}$	3,18
8	2	45	0,044	5,26
7	3	120	0,117	6,61
6	4	210	0,205	7,38
5	5	252	0,246	7,63

Le nombre total des micro-états est $P = 1 + 10 + 45 + \dots + 252 + \dots + 45 + 10 + 1 = 1\,024 = 2^{10}$. Le nombre total de micro-états est $P = 2^N$. Il y a en effet deux choix possibles de ranger chaque molécule dans la partie A ou dans la partie B donc $2 \times 2 = 2^2$ choix pour deux molécules, $2 \times 2 \times \dots \times 2$ (N fois) = 2^N choix pour N molécules. L'hypothèse de base de la mécanique statistique est que tous les micro-états sont également probables. La probabilité d'occurrence d'un micro-état particulier est donc le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles, soit Ω/P qui est donné sur le tableau 10.8. La configuration $n_1 = n_2 = 5$ possède le plus de micro-états et a un maximum de probabilité de 0,246. On s'attend donc de façon probabiliste à ce que la répartition des molécules s'égalise entre les deux côtés de la boîte et soit donc la configuration privilégiée de l'état final. La figure 10.22 montre l'émergence du maximum de probabilité quand $N = 100$.

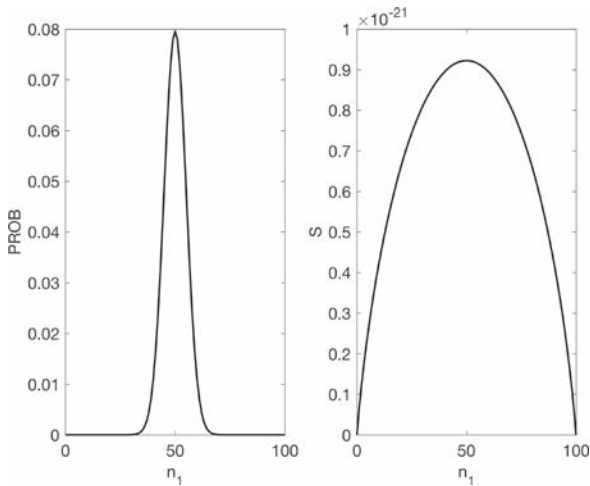


Figure 10.22

Probabilité des micro-états (à gauche) et entropie à droite pour $N = 100$.

La figure 10.22 montre la probabilité des micro-états en fonction de n_1 . Le tableau précédent montrait une distribution assez étalée, mais avec $N = 100$ la sélection du maximum augmente, car la largeur de la distribution de probabilité diminue fortement. Lorsque N est de l'ordre de grandeur du nombre d'Avogadro, on s'attend à avoir une distribution encore plus étroite avec un pic aigu pour $n_1/N = 0,5$, la distribution équi-répartie des molécules entre A et B devenant *de facto* la seule probable. Comme il n'y a qu'une façon de mettre toutes les molécules d'un même côté de la boîte, la probabilité associée est :

$$\text{Prob} = \frac{\Omega}{P} = \frac{1}{2^N}$$

une probabilité certes non nulle mais devenant très, très faible pour N grand. La configuration reste certes possible mais hautement improbable. L'entropie de Boltzmann montrée sur la figure 10.22 est la quantité :

$$S = k_B \ln(\Omega) \quad 10-42$$

Elle vaut donc zéro pour l'état initial et elle augmente bien quand le système évolue de l'état initial vers l'état le plus probable qui est aussi l'état de désordre maximum. Quelle est la valeur de l'entropie pour la configuration la plus probable quand N est grand ? Il faut calculer :

$$\Omega = \frac{N!}{(N/2)! (N/2)!}$$

Le calcul des factoriels devient difficile quand N dépasse 100, mais la remarquable formule de Stirling permet de s'en tirer :

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N$$

L'erreur relative donnée par cette approximation chute rapidement, moins de 1 % dès que $N = 10$. La substitution de l'approximation de Stirling pour la configuration équi-répartie entre A et B donne :

$$\Omega \approx \sqrt{\frac{2}{\pi N}} 2^N$$

Comme $P = 2^N$, la probabilité de l'équipartition est :

$$\text{Prob} = \frac{\Omega}{P} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi N}}$$

une estimation que l'on pourra comparer avec les valeurs numériques des maxima calculées précédemment pour $N = 10$ et 100. L'entropie maximum vaut alors :

$$S_F \approx k_B N \ln(2) - \frac{k_B}{2} \ln(N) + k_B \ln\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)$$

ou encore quand N tend vers l'infini :

$$S_F \approx k_B N \ln(2) = nR \ln(2)$$

Puisque $k_B N = nR$, l'entropie de l'état final calculée de façon statistique coïncide exactement avec la formule macroscopique 10-28 de la détente de Joule quand le volume double.

Note :

Le lien entre l'entropie et la mesure du désordre permet de comprendre un peu mieux la forme macroscopique 10-26 de la définition de l'entropie. Comme la chaleur est un transfert d'énergie associé avec ce mouvement désordonné, aléatoire, des particules, on comprend bien qu'un transfert de chaleur augmente l'entropie d'un système, mais pourquoi diviser par T ? La température T est une mesure de l'énergie cinétique moléculaire et donc, selon que T est petit ou grand, le système est déjà dans un état plus ou moins ordonné. On conçoit alors qu'un transfert de chaleur dans un système à basse température va augmenter beaucoup plus le désordre que dans un système à haute température qui est déjà fortement en désordre. C'est la raison de la division par T . L'analogie acoustique suivante est proposée par Atkins : si vous éternuez dans la salle de lecture silencieuse d'une bibliothèque, cela risque d'avoir beaucoup plus d'effet que si vous éternuez dans le bruit d'une rue très passante.

Le fait que l'approche statistique qui compte les molécules et l'approche macroscopique donnent le même résultat renforce la validité de chacune. L'approche statistique donne sa vraie signification à la croissance de l'entropie, une tendance vers le désordre mesurée par la maximisation du nombre des combinaisons des micro-états possibles. Cette évolution irréversible, inéluctable, des phénomènes naturels ne demande pas une remise en cause de la mécanique classique, c'est juste la tendance la plus probable compte tenu du nombre gigantesque de molécules présentes dans un petit volume de gaz.

10.4.8 Les conversions d'énergie possibles

10.4.8.1 Résumé

Les moteurs de toute nature fonctionnent par transfert d'énergie avec l'environnement. L'introduction de l'entropie de la deuxième loi permet d'identifier les contraintes sur ces conversions d'énergie. Une autre approche d'utilisation de la deuxième loi, largement répandue, va être présentée. On illustre sur la figure 10.23 les transferts d'énergie possibles sur un système quelconque en notant Q_{IN} et Q_{OUT} les apports et les pertes d'énergie respectifs pour le système.

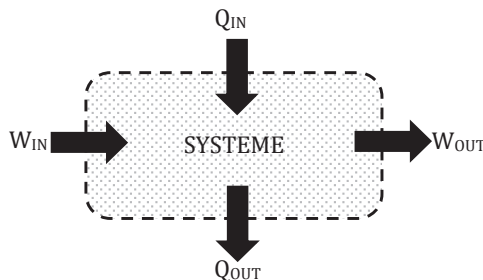


Figure 10.23

L'énergie fournie par l'environnement au système est la somme du travail et de la chaleur W_{IN} et Q_{IN} . L'énergie fournie par le système à l'environnement est la somme du travail et de la chaleur W_{OUT} et Q_{OUT} . Toutes ces quantités sont positives avec la convention que le transfert d'énergie au système est positif (négatif) pour les variables libellées par l'indice $_{\text{IN}}$ ($_{\text{OUT}}$) en accord avec le sens des flèches sur la figure 10.23. De fait ces quantités sont des flux alors que la valeur de l'énergie du système est un stock.

Le travail net fait sur le système est :

$$W = W_{\text{IN}} - W_{\text{OUT}}$$

et la chaleur nette transférée au système est :

$$Q = Q_{\text{IN}} - Q_{\text{OUT}}$$

Pour convertir de l'énergie de façon pratique, un moteur (ou un réfrigérateur) doit fonctionner en régime permanent et le cas courant est l'exécution d'un cycle, le moteur repassant de façon périodique par les mêmes états, la variation d'énergie interne du système est alors nulle sur le cycle :

$$\Delta U_{\text{SYS}} = 0$$

La démonstration de la deuxième loi pour les systèmes fermés avec la relation 10-30 décomposait les variations du système en deux, une variation composée des transformations irréversibles internes au système et une autre associée aux échanges avec l'environnement. Il existe une autre façon de voir tout aussi correcte qui considère le système et l'environnement comme deux sous-systèmes et leur réunion comme un système isolé dont l'entropie est nécessairement croissante par la deuxième loi. Comme l'entropie est une variable extensive, on peut écrire la deuxième loi comme :

$$\Delta S = \Delta S_{\text{SYS}} + \Delta S_{\text{ENV}} \geq 0$$

la variation de l'entropie S de l'ensemble {système + environnement} étant l'addition des variations de chaque sous-système. Lors d'un transfert de chaleur Q_{IN} , l'environnement perd de la chaleur et donc $\Delta S_{\text{ENV}} < 0$. Lors d'un transfert de chaleur Q_{OUT} , l'environnement gagne de la chaleur et donc $\Delta S_{\text{ENV}} > 0$. Si on néglige par simplicité les frottements des pièces mobiles des moteurs et la conduction thermique, il n'y a pas de variations d'entropie associées aux travaux W_{IN} et W_{OUT} . Et si le moteur fonctionne sur un cycle, l'entropie du sous-système ne change pas de sorte que :

$$\Delta S_{\text{SYS}} = 0$$

La situation est résumée sur la figure 10.24.

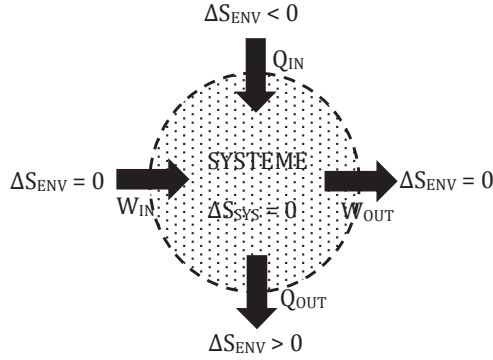


Figure 10.24

La frontière du système est indiquée par un cercle pour indiquer qu'il subit un cycle. L'entropie du système sur un cycle est constante. L'ensemble {système + environnement} étant isolé, son entropie est croissante.

Les contraintes de la première et de la deuxième loi se résument à :

$$\begin{aligned}
 \Delta U_{SYS} &= 0 \\
 W_{IN} - W_{OUT} &= -(Q_{IN} - Q_{OUT}) \\
 \Delta S_{SYS} &= 0 \\
 \Delta S &= \Delta S_{SYS} + \Delta S_{ENV} \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{10-43}$$

L'énergie transférée au système sous forme de chaleur Q_{IN} à la température T_{IN} cause une diminution de l'entropie de l'environnement :

$$\Delta S_{ENV / IN} = -\frac{Q_{IN}}{T_{IN}}$$

tandis que l'énergie transférée à l'environnement par le système sous forme de chaleur Q_{OUT} à la température T_{OUT} cause une augmentation de l'entropie de l'environnement :

$$\Delta S_{ENV / OUT} = +\frac{Q_{OUT}}{T_{OUT}}$$

La croissance de l'entropie totale {système + environnement} requiert alors :

$$\Delta S = \frac{Q_{OUT}}{T_{OUT}} - \frac{Q_{IN}}{T_{IN}} \geq 0
 \tag{10-44}$$

En faisant apparaître W :

$$\Delta S = \frac{Q_{IN} + W}{T_{OUT}} - \frac{Q_{IN}}{T_{IN}} \geq 0
 \tag{10-45}$$

ce qui donne l'inégalité :

$$W_{\text{OUT}} - W_{\text{IN}} \leq Q_{\text{IN}} \left(1 - \frac{T_{\text{OUT}}}{T_{\text{IN}}} \right) \quad 10-46$$

Et le travail net maximal produit sur l'environnement est :

$$W_{\text{MAX}} = Q_{\text{IN}} \left(1 - \frac{T_{\text{OUT}}}{T_{\text{IN}}} \right)$$

où le terme entre parenthèses n'est pas autre chose que le rendement du moteur de Carnot, le rendement maximal d'un moteur opérant entre deux réservoirs, ce qui fournit une autre démonstration du résultat 10-35.

La figure 10.24 et les relations 10-44 à 10-46 permettent de retrouver tous les cas particuliers déjà rencontrés :

- $Q_{\text{IN}} = 0$ et $W_{\text{OUT}} = 0$: le transfert d'énergie mécanique W_{IN} en chaleur Q_{OUT} est permis puisque $\Delta S > 0$.
- $Q_{\text{OUT}} = 0$ et $W_{\text{IN}} = 0$: le transfert de chaleur Q_{IN} en travail mécanique W_{OUT} est interdit puisque $\Delta S < 0$.
- $W_{\text{IN}} = 0$: la production de travail W_{OUT} par ce moteur thermique est permise sous réserve que $\Delta S \geq 0$. La relation 10-46 permet de trouver la borne supérieure du rendement :

$$\eta = \frac{W_{\text{OUT}}}{Q_{\text{IN}}} \leq \left(1 - \frac{T_{\text{OUT}}}{T_{\text{IN}}} \right)$$

- $W_{\text{OUT}} = 0$: le transfert de chaleur Q_{IN} d'un réservoir froid à un réservoir chaud Q_{OUT} pour ce réfrigérateur est possible sous réserve que $\Delta S \geq 0$. La relation 10-46 fournit alors l'efficacité du réfrigérateur :

$$\chi = \frac{Q_{\text{IN}}}{W_{\text{IN}}} \leq \frac{T_{\text{IN}}}{T_{\text{OUT}} - T_{\text{IN}}}$$

La démonstration des relations 10-43 à 10-46 est finalement très simple une fois que le système et son environnement ont été bien définis. Cette approche résume entièrement les contraintes apportées par les deux lois de la thermodynamique au fonctionnement d'un moteur thermique arbitraire fonctionnant sur un cycle.

10.4.8.2 Dégradation de l'énergie

Certes l'énergie est conservée pour l'ensemble {système + environnement} dans les transformations cycliques précédentes, mais les transformations d'énergie ont quand même un coût et on dit que la qualité de l'énergie se dégrade lors du fonctionnement d'un moteur. Dans son livre *Principle and Practice of Physics* de 2015, E. Mazur donne une représentation graphique intéressante de cette dégradation. La dégradation de la qualité de l'énergie de l'environnement est mesurée par l'augmentation de l'entropie de l'environnement pour une variation d'énergie interne donnée, ce qu'il appelle le gradient d'entropie. Lors de transferts thermiques avec un

réservoir à la température T , la variation d'entropie et la variation d'énergie interne sont liées par :

$$TdS = dQ = dU$$

soit le gradient d'entropie :

10-47

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T}$$

On associe donc une qualité d'énergie élevée à une valeur faible du gradient d'entropie dS/dU et inversement. Pour un transfert d'énergie donné, le coût en entropie mesuré par dS/dU varie comme $1/T$ et est donc faible si la température T est haute et grand si la température est basse. Avec la relation 10-47, l'eau chaude est de bien meilleure qualité que l'eau tiède. L'idée est donc de représenter graphiquement les transformations précédentes en utilisant l'axe dS/dU pour représenter la qualité d'énergie des réservoirs. On montre d'abord ce diagramme pour la conduction thermique.

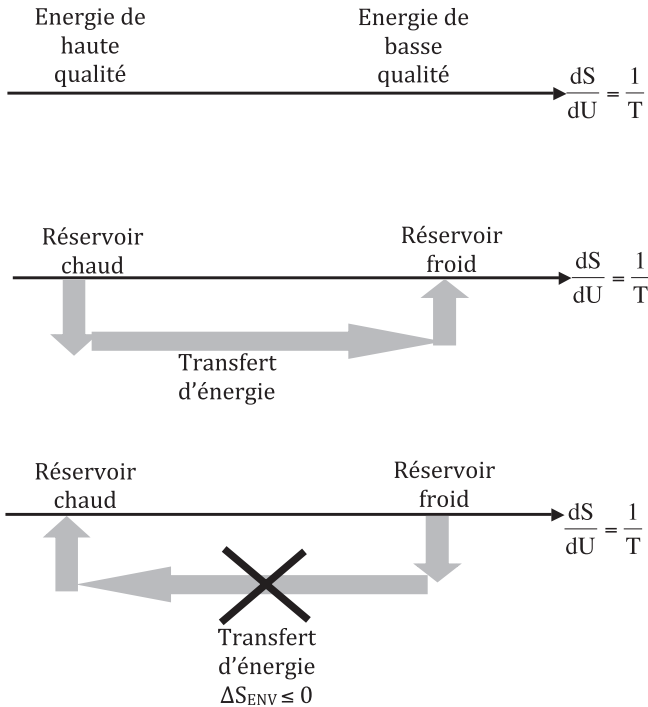


Figure 10.25

Le gradient d'entropie mesure la variation d'entropie pour une variation d'énergie donnée et la variation d'entropie est d'autant plus grande que la température est basse : la partie gauche du diagramme en haut indique donc une énergie de haute qualité facilement utilisable et c'est le contraire à droite quand la température est basse. Les deux autres diagrammes illustrent la conduction thermique. Le transfert thermique du réservoir chaud vers le froid augmente l'entropie et transforme de l'énergie de haute qualité en basse qualité. Elle est permise par la 2^e loi. La transformation opposée en bas est tout simplement impossible.

La figure 10.25 illustre le phénomène de conduction thermique déjà rencontré. L'énergie thermique de haute qualité est disponible quand dS/dU est faible et donc T grand. Quand elle est transférée au réservoir froid, le gain net d'entropie est positif et donc le processus est permis. Mais la qualité de l'énergie s'est dégradée dans la transformation. Si on souhaitait transférer de l'énergie du réservoir froid vers le réservoir chaud, le gain net d'entropie serait négatif et en parallèle l'énergie aurait amélioré sa qualité : ce processus n'est juste pas permis par la deuxième loi.

Le cas du moteur thermique est illustré sur la figure 10.26.

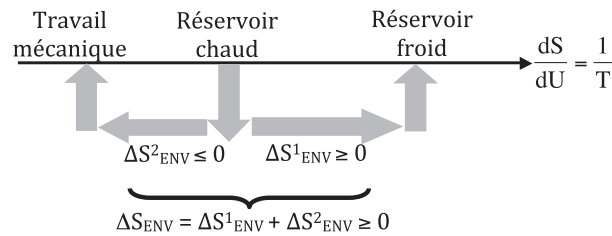


Figure 10.26

De l'énergie est extraite du réservoir chaud pour une transformation en travail mécanique. Si le frottement est négligé dans le moteur, celui-ci est isentropique et on le place tout à fait à gauche sur le diagramme de la figure 10.26. Pour fournir cette énergie de haute qualité, l'entropie de l'environnement décroît. Cette amélioration de la qualité de l'énergie n'est possible que si elle est accompagnée d'une dégradation plus forte encore, associée avec le transfert de chaleur vers le réservoir froid.

Le cas du réfrigérateur ou de la pompe à chaleur est illustré sur la figure 10.27.

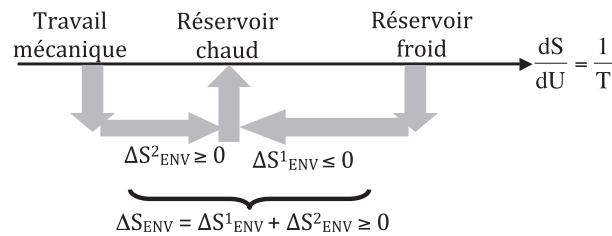


Figure 10.27

De l'énergie de haute qualité, le travail mécanique du compresseur, est dégradée et transférée au réservoir chaud. Mais il y a de la place pour un transfert du réservoir froid vers le réservoir chaud qui décroît l'entropie et améliore la qualité de l'énergie. Au total néanmoins ici aussi il y a eu croissance de l'entropie de l'environnement et dégradation de la qualité de l'énergie.

10.5 Potentiels thermodynamiques et principes d'extremum

Ce paragraphe déjà spécialisé montre l'apport des mathématiques à la thermodynamique et il peut être omis dans une première approche du sujet. Des outils très puissants et très généraux ont été développés en thermodynamique macroscopique pour analyser diverses transformations permettant de passer d'un état d'équilibre à un autre en combinant les résultats de la première et de la deuxième loi. De nouvelles variables d'état sont introduites qui permettent de dégager des conclusions importantes sur les évolutions d'un système quelconque soumis aux contraintes particulières de certaines transformations à température constante et/ou pression constante. L'objectif est de se familiariser avec quelques-uns des concepts et des méthodes de calcul associées.

10.5.1 Introduction

Pour donner une définition rigoureuse du concept de paramètre d'état ou de variable thermodynamique, il est nécessaire d'introduire la notion de différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables. On se borne ici à ne considérer que le cas de fonctions de deux variables qui permet déjà beaucoup d'applications. Soit $z(x, y)$ la fonction de deux variables indépendantes x et y qui sont elles-mêmes des paramètres observables. La différentielle totale d'un paramètre d'état z est définie par :

$$dz = X dx + Y dy \quad \text{avec} \quad X = \frac{\partial z}{\partial x}, Y = \frac{\partial z}{\partial y} \quad 10-48$$

La notation de la dérivée partielle $\partial z / \partial x$ signifie que l'on dérive z par rapport à x en maintenant y constant. Vectoriellement $(X, Y) = \nabla z$ est le gradient de z . L'intégrale de $Xdx + Ydy$ d'un point (x_1, y_1) à un point (x_2, y_2) ne dépend que de ces deux points et non pas du chemin suivi :

$$\int_1^2 (Xdx + Ydy) = \int_1^2 \nabla z \cdot d\mathbf{x} = \int_1^2 dz = z(2) - z(1)$$

où $d\mathbf{x} = (dx, dy)$

de sorte que sur un contour fermé :

$$\oint dz = 0$$

On peut calculer la dérivée croisée seconde de z de deux façons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

On peut alors montrer avec le théorème de Stokes pour un domaine simplement connexe (sans trou) qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $X dx + Y dy$ soit la différentielle totale d'une fonction $z(x,y)$ est que :

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad 10-49$$

une condition qui exige que la dérivée seconde croisée de z soit indépendante de l'ordre des dérivations. La condition intégrale équivalente à 10-49 est :

$$\oint dz = 0 \quad 10-50$$

où l'intégrale de dz est prise sur un contour fermé arbitraire dans le plan xy . Cette relation a d'ailleurs déjà été rencontrée, l'énergie interne et l'entropie tenant le rôle de z . *A contrario* les quantités comme le travail et la chaleur ne sont les différentielles d'aucune fonction.

10.5.2 L'identité thermodynamique

Cette identité fondamentale s'obtient en combinant les résultats de la première loi et ceux de la deuxième loi. Pour une transformation quelconque, la première loi s'écrit :

$$dU = \delta Q + \delta W$$

Pour un système fermé qui échange de la chaleur avec l'extérieur, les relations 10-30 et 10-31 décomposent la variation d'entropie en deux, la variation due aux processus internes au système $d_i S$ et la variation d'entropie du système due aux échanges thermiques $d_e S$, de sorte que la deuxième loi s'écrit :

$$dS = d_i S + d_e S$$

$$d_i S \geq 0 \text{ et } d_e S = \frac{\delta Q}{T}$$

Si le processus est réversible :

$$d_i S = 0 \rightarrow \delta Q = TdS$$

$$\delta W = -pdV$$

En remplaçant dans la première loi, on obtient l'identité thermodynamique fondamentale :

$$dU = TdS - pdV \quad 10-51$$

La forme de 10-51 montre que U est une fonction de S et V , $U(S, V)$. Puisque 10-51 donne la variation de U entre des états bien déterminés (S, V) et $(S + dS, V + dV)$, elle reste valable même si la transformation est irréversible, puisque seuls comptent les états d'équilibre initiaux et finaux. Mais dans le cas irréversible, les conséquences sont que transfert de chaleur et travail sont mal déterminés puisqu'ils ne sont plus gouvernés que par des inégalités :

$$d_i S \geq 0 \rightarrow \delta Q \leq TdS$$

$$\delta W \geq -pdV$$

On peut maintenant appliquer 10-48 pour trouver :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_V = T \quad (a) \quad 10-52$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_S = -P \quad (b)$$

On a déjà rencontré 10-52(a) lors de la discussion sur la dégradation de l'énergie thermique. Sous cette forme elle apparaît comme une définition de la température T dont on peut montrer qu'elle coïncide avec celle des gaz parfaits déjà présentée. En appliquant 10-49, une relation de Maxwell type est obtenue en écrivant que les dérivées croisées ne dépendent pas de l'ordre des dérivations :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_S = - \left. \frac{\partial P}{\partial S} \right|_U$$

Une relation qui est la conséquence directe que U et S sont des variables d'état.

Les paramètres choisis ici sont S , U et V , mais on peut choisir bien d'autres combinaisons parmi tous les paramètres disponibles p , V , T , S , U ... qui font apparaître d'autres identités thermodynamiques qui ont chacune leur intérêt particulier, leurs propres relations de Maxwell et sont adaptées à la recherche d'équilibres contraints de différentes façons. Quelques-unes d'entre elles sont introduites dans les paragraphes suivants.

Une application des potentiels thermodynamiques introduits ci-après concerne la recherche des états d'équilibre d'un système. Si le système est isolé, il n'y a pas de travail ni d'échange de chaleur avec l'extérieur et donc U et V ont des valeurs fixées. L'entropie est la fonction thermodynamique associée aux paramètres U et V . Lorsque le système est hors équilibre et évolue à U et V constants, l'état d'équilibre est atteint lorsque l'entropie a la valeur maximum dont un exemple est la détente de Joule.

10.5.3 L'énergie libre de Helmholtz

On a vu que dans un système purement mécanique, le travail est égal à la variation d'énergie mécanique (cinétique + potentielle) :

$$W' = -\Delta E_M \quad 10-53$$

Dans un système thermodynamique, il n'existe pas de relation aussi simple à cause des transferts thermiques susceptibles d'intervenir. La première loi indique que le travail W' fourni par le système durant une transformation entre deux états est :

$$W' = -\Delta U + Q \quad 10-54$$

Le travail fait par le système peut donc être plus petit ou plus grand que $-\Delta U$ selon que le système absorbe ou rejette de la chaleur. Supposons que le système échange de la chaleur avec une source à température constante T , un cas fréquent quand T

est la température du milieu ambiant. Lorsque le système évolue d'un état A à un état B, la relation 10-32 pour un système fermé est :

$$S(B) - S(A) \geq \int_A^B \frac{dQ}{T}$$

Comme T est constant, ceci se réécrit :

$$Q = \int_A^B dQ \leq T[S(B) - S(A)] \quad 10-55$$

Et comme $\Delta U = U(B) - U(A)$, 10-54 et 10-55 se réécrivent :

$$W' \leq U(A) - U(B) + T[S(B) - S(A)] \quad 10-56$$

Il existe donc une borne supérieure au travail W' que peut fournir le système. Si la transformation est réversible, l'égalité s'applique, le travail atteignant la borne supérieure. Supposons que les températures de l'état initial A et de l'état final B restent égales à T, celle de l'environnement. On peut définir une nouvelle fonction d'état F, appelée énergie libre de Helmholtz :

$$F = U - TS \quad 10-57$$

Et la relation 10-56 devient en termes de F :

$$W' \leq -\Delta F = -(\Delta U - T\Delta S) \quad 10-58$$

Sous cette hypothèse, le travail maximum fourni par le système est réalisé lors d'une transformation réversible :

$$W'_{\text{MAX}} = -\Delta F = -\Delta U + T\Delta S \quad 10-59$$

Si la transformation est irréversible, la décroissance de l'énergie libre fournit une borne supérieure du travail possible. L'énergie libre F est aussi appelée énergie utilisable. Pour fournir du travail à l'environnement, l'énergie interne du système doit décroître $\Delta U < 0$, mais tout ce ΔU n'est pas disponible, cela dépend du signe de $T\Delta S$. Si le système subit une décroissance de l'entropie, $T\Delta S < 0$, le travail maximum est alors plus petit que $-\Delta U$. Pour que le changement soit spontané, l'entropie totale doit augmenter : dans ce cas, il faut que de la chaleur s'échappe du système pour générer suffisamment d'entropie dans l'environnement et ainsi compenser la diminution d'entropie dans le système. Ceci est illustré sur la figure 10.28 adaptée de Atkins.

Atkins exprime ceci en disant que la nature prélève une taxe sur le transfert d'énergie interne en travail. C'est l'origine du nom « énergie libre » ou encore énergie utilisable, la part de l'énergie interne que le système peut utiliser librement pour fournir du travail.

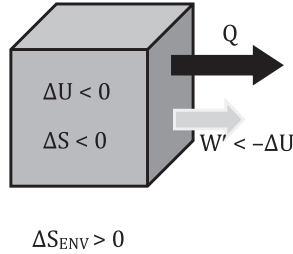


Figure 10.28

Quand un système n'est pas isolé, le travail fourni peut être moindre que la variation d'énergie interne. Ici l'entropie du système décroît. Mais pour que le processus soit spontané, il faut que l'entropie totale croisse. Ceci n'est possible que si l'entropie de l'environnement augmente suffisamment. Ce sera le cas si assez de chaleur passe du système à l'environnement, ce qui réduit d'autant le travail possible.

Si à l'inverse $T\Delta S > 0$, la relation 10-59 montre que le travail fourni est maintenant plus grand que $-\Delta U$. Ceci est possible car le système reçoit de la chaleur. L'entropie du système croît, celle de l'environnement décroît. La situation est décrite sur la figure 10.29.

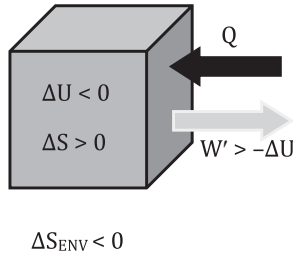


Figure 10.29

Ici l'entropie du système augmente. L'environnement peut donc en perdre un peu. Il le fait en transférant de la chaleur au système. Le travail disponible est alors plus grand que la variation d'énergie interne.

La figure 10.29 montre que la nature fournit maintenant une déduction fiscale qui permet un travail plus grand que la variation d'énergie interne. Un exemple est celui où le système serait le siège d'une réaction chimique de combustion (une réaction exothermique). La relation thermodynamique 10-58 est à comparer avec la relation mécanique 10-53. La principale différence est la présence de l'inégalité dans 10-58. En dérivant 10-57, on obtient la variation infinitésimale de F :

$$dF = dU - TdS - SdT$$

En utilisant 10-51, ceci devient :

$$dF = -SdT - pdV \quad 10-60$$

L'identité 10-60 montre que F est une fonction de T et V et 10-48 permet de voir que :

$$\left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_V = -S \quad (a) \quad 10-61$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_T = -p \quad (b)$$

Et si on recalcule les dérivées secondes croisées avec 10-49, on obtient encore une autre relation de Maxwell.

Considérons maintenant un système de volume fixe en contact avec un réservoir de température T donnée. Le travail est alors nul et le système n'échange plus que de la chaleur Q avec le réservoir. Lorsqu'il est hors d'équilibre, son énergie interne augmente comme :

$$dU = dQ$$

Mais à T et V constants, la variation de F est :

$$dF = dU - TdS$$

Dans le contexte d'un système fermé, 10-30 et 10-31 montrent que dS est la somme des irréversibilités internes $d_i S$ et de celles provenant de l'environnement $d_e S$. Comme $d_i S \geq 0$ et $d_e S = dQ/T$, l'expression précédente se réécrit :

$$dF = dU - T d_i S - T d_e S$$

En remplaçant :

$$dF = -T d_i S$$

et donc :

$$dF \leq 0 \quad 10-62$$

Lorsque le volume et la température d'un système sont maintenus constants, le système évolue donc vers un état d'énergie libre minimum. Une application en sera faite pour traiter des phénomènes de surface au chapitre 11. Ceci est à comparer avec la stabilité d'un système mécanique obtenu quand l'énergie potentielle est minimum.

10.5.4 L'énergie libre de Gibbs

Dans de nombreuses transformations, changements de phase ou réactions chimiques, la pression et la température du système ne changent pas et restent égales à celles de l'environnement. Considérons donc une transformation isotherme et isobare qui fait passer un système d'un état A à un état B . Le travail fait par le système est :

$$W' = p[V(B) - V(A)]$$

Comme la transformation est isotherme, 10-58 s'applique et donc :

$$pV(B) - pV(A) \leq F(A) - F(B)$$

Ceci suggère d'introduire une nouvelle fonction d'état G telle que :

$$G = F + pV = U - TS + pV \quad 10-63$$

Cette fonction G est appelée l'énergie libre de Gibbs ou potentiel de Gibbs, le potentiel thermodynamique à pression constante. L'inégalité précédente devient :

$$G(B) \leq G(A) \quad 10-64$$

Dans une transformation isotherme et isobare, l'énergie libre de Gibbs ne peut pas augmenter. Elle est constante quand la transformation est réversible.

La transformation infinitésimale de G conduit à :

$$dG = dU + pdV + Vdp - TdS - SdT \quad 10-65$$

Compte tenu de 10-51, il reste :

$$dG = Vdp - SdT \quad 10-66$$

G est donc une fonction de p et T et on peut appliquer les relations 10-48 et 10-49 pour trouver la relation de Maxwell correspondante.

Note :

Quand on compare 10-66 et 10-51, on s'aperçoit que les variables dont dépend l'énergie interne sont toutes deux extensives alors que *a contrario* les variables dont dépend l'énergie libre de Gibbs sont toutes deux intensives.

Considérons le cas plus général d'un système qui peut échanger du travail avec l'extérieur à la pression p_{EX} et de la chaleur avec une source à la température T . Le travail reçu par le système est $dW = -p_{EX} dV$ et la chaleur reçue est $dQ = Td_E S$. En reportant dans 10-65 après utilisation de 10-30 et 10-31 :

$$dG = -p_{EX}dV + Td_E S + pdV + Vdp - Td_I S - Td_E S - SdT$$

soit :

$$dG = (p - p_{EX})dV + Vdp - Td_I S - SdT$$

Si dans l'état initial et dans l'état final, la pression du système est égale à la pression extérieure p_{EX} et la température T est constante, il ne reste plus que :

$$dG = -Td_I S$$

et donc :

$$dG \leq 0 \quad 10-67$$

Comme l'entropie des irréversibilités internes croît, $Td_I S \geq 0$, l'évolution du système va se poursuivre pour atteindre un état où G est minimum. Ce qui fournit une deuxième démonstration de 10-64.

L'énergie libre de Gibbs est adaptée pour les processus chimiques qui se déroulent généralement à température et pression constantes. Elle intervient aussi pour traiter de la thermodynamique des changements de phase dans les systèmes hétérogènes, solide - liquide ou liquide - vapeur.

10.5.5 L'enthalpie

L'enthalpie, la fonction $H = U + pV$, a déjà été rencontrée au § 10.2.6 pour discuter des transferts de chaleur à pression constante. Lors d'une transformation infinitésimale, on obtient :

$$dH = dU + pdV - Vdp$$

Après usage de 10-51, ceci se réécrit :

$$dH = TdS - Vdp \quad 10-68$$

La fonction H est donc fonction des paramètres S et p et on peut en déduire les relations du type 10-48 et 10-49.

Considérons maintenant un système fermé qui évolue à entropie constante et pression constante. On a alors :

$$dH = dU + pdV = dQ$$

Mais comme $dQ = Td_E S = T(dS - d_I S)$ et que $dS = 0$ par définition :

$$dH = -Td_I S$$

et donc :

$$dH \leq 0 \quad 10-69$$

Un système hors d'équilibre maintenu à pression et entropie constantes évolue vers l'état d'enthalpie minimale.

On a résumé dans le tableau suivant le choix de potentiels thermodynamiques selon le type de transformation.

Tableau 10.9

Contraintes des transformations	Fonction d'état	Principe d'extremum
$S = \text{cst}$ $V = \text{cst}$	Énergie interne $U(S, V, N)$	$dU \leq 0$ U minimum
$U = \text{cst}$ $V = \text{cst}$	Entropie $S(U, V, N)$	$dS \geq 0$ S maximum
$T = \text{cst}$ $V = \text{cst}$	Énergie libre F (T, V, N)	$dF \leq 0$ F minimum
$T = \text{cst}$ $p = \text{cst}$	Énergie libre de Gibbs $G(T, p, N)$	$dG \leq 0$ G minimum
$S = \text{cst}$ $p = \text{cst}$	Enthalpie $H(S, p, N)$	$dH \leq 0$ H minimum

Lorsque les dépendances des potentiels thermodynamiques $U = U(S, V, N)$, F (l'énergie libre) $= F(T, V, N)$, $H = H(S, p, N)$, G (l'enthalpie libre) $= G(T, p, N)$ sont établies, elles constituent les équations fondamentales de la thermodynamique. Elles contiennent toute l'information disponible et leur connaissance permet de déduire toutes les autres grandeurs nécessaires, en particulier l'équation d'état. À titre d'exemple, la densité de l'eau de mer dépend certes de la température, mais aussi de la salinité et de la pression. Une expression empirique du potentiel de Gibbs associé a été déterminée en 2008 par Feistel de laquelle l'équation d'état a pu être déduite rigoureusement.

10.6 Les énergies disponibles

Cette introduction à la thermodynamique a permis de découvrir la conservation de l'énergie interne, la croissance de l'entropie pour les systèmes isolés, le lien entre l'entropie et la mesure du désordre moléculaire, des concepts de portée universelle qui s'appliquent dans une multitude de domaines scientifiques et industriels, moteurs thermiques, fluides réels, changements de phase, liquéfaction des gaz, cryogénie, tension de surface, thermochimie, phénomènes thermoélectriques, piles à combustibles, magnétisme, physique de l'atmosphère et des océans, réactions chimiques et organisation biologique.

Avant la machine à vapeur qui apparaît à la fin du xvii^{e} siècle, on ne pouvait compter que sur les chevaux, les roues et les ailes des moulins pour aider les hommes à effectuer des travaux importants. L'objet de cette section est de recenser les manières plus ou moins habiles de produire de l'électricité aujourd'hui. Les transformations industrielles qui permettent la génération d'électricité à partir de combustibles fossiles, de réactions nucléaires, de barrages hydrauliques, d'énergie solaire ou de vent sont passées en revue pour en donner les éléments essentiels à savoir les puissances générées, les ressources, les rendements et les impacts environnementaux. Les organismes vivants sont le siège de réactions chimiques leur permettant d'obtenir de l'énergie pour leur croissance, et en particulier pour l'homme d'effectuer du travail musculaire, de composer une chanson ou d'écrire un livre. Les conditions thermodynamiques inhérentes à la génération de l'ordre biologique sont aussi contenues dans la deuxième loi.

10.6.1 Énergie radiative

La Terre n'est pas un système isolé : elle reçoit de l'énergie solaire et renvoie de l'énergie dite infrarouge. L'énergie solaire joue le rôle central sur la Terre puisqu'elle permet la réaction de photosynthèse qui engage en aval la construction de la chaîne du vivant. Incidemment elle est donc aussi à l'origine de l'existence des combustibles fossiles.

Les rayons lumineux sont des ondes électromagnétiques qui se propagent dans le vide à la vitesse de la lumière c . Einstein a proposé une description de l'énergie lumineuse en termes de particules, introduisant le photon dont l'énergie est quantifiée :

$$E = h\nu$$

où h ($= 6,625 \times 10^{-34}$ J s) est la constante de Planck et ν la fréquence du rayonnement reliée à la longueur d'onde λ par $\nu = c/\lambda$. L'interaction entre le rayonnement et la matière est due aux échanges d'énergie entre photons et atomes, échanges régis par les lois de la mécanique quantique.

Le Soleil est une étoile, une boule d'hydrogène et d'hélium, siège de réactions nucléaires de fusion en son centre qui relâchent de l'énergie. Sa température centrale atteindrait 15×10^6 K. Sa température de surface beaucoup plus faible peut se déterminer par la couleur de son rayonnement (voir plus loin). Il délivre une puissance L_0 ($\approx 3,9 \times 10^{26}$ W), appelée luminosité. Puisque l'énergie est conservée dans le vide, à une distance d du Soleil, le flux d'énergie solaire fois la surface doit être égale à L_0 :

$$S_0 4\pi d^2 = L_0$$

Avec $d = 1,5 \cdot 10^{11}$ m la distance moyenne entre la Terre et le Soleil, cette relation donne un flux solaire sur la Terre de $1\,379 \text{ W m}^{-2}$. Il peut être aujourd'hui mesuré avec précision par des satellites en orbite à l'extérieur de l'atmosphère et on prendra :

$$S_0 = 1\,360 \text{ W m}^{-2}$$

avec S_0 appelée constante solaire, constante en pratique, car comme pour les étoiles la luminosité L_0 n'augmente que très lentement à l'échelle du milliard d'années. La quantité d'énergie qui arrive en moyenne sur la sphère terrestre peut se calculer facilement avec le dessin suivant :

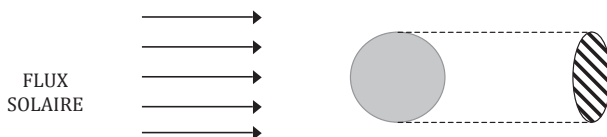


Figure 10.30

Le flux solaire incident est intercepté par la surface correspondant à l'ombre de la Terre, le disque hachuré de surface πR_T^2 (R_T le rayon terrestre).

La surface hachurée est l'ombre de la Terre sur un plan perpendiculaire aux rayons incidents. Comme cette surface vaut πR_T^2 (R_T le rayon terrestre), l'énergie reçue par la Terre est donc simplement $S_0 \pi R_T^2$. Une partie de cette énergie solaire est réfléchie, réflexion définie par l'albédo, le rapport entre énergie réfléchie et énergie incidente. L'albédo α est grand ($\sim 0,5$) dans les régions polaires à cause de l'effet miroir de la glace, ($0,3$ à $0,7$) au-dessus des nuages, assez important sur les déserts ($\sim 0,35$) et beaucoup plus faible sur les océans ($0,02$ à $0,1$). Une valeur moyenne globale de l'albédo terrestre est $\alpha \approx 0,3$. La quantité d'énergie absorbée par la Terre est donc $(1 - \alpha) S_0 \pi R_T^2$ en unité W. Soumise à cet apport solaire, la température

de la Terre va augmenter mais jusqu'où ? Fourier comprit en 1827 qu'une stabilisation n'était possible que si la Terre perdait autant d'énergie qu'elle en gagnait du Soleil et assigna les pertes à la notion de chaleur obscure, aujourd'hui rayonnement infrarouge. Un corps noir (*black body*) est un matériau opaque qui absorbe toutes les radiations incidentes sur lui. Ce faisant, il réémet un rayonnement particulier connu sous le nom de rayonnement du corps noir et qui dépend de sa propre température. Planck (1900) a pu déterminer l'énergie du rayonnement, fonction de la longueur d'onde λ et de la température T , émise par le corps noir idéalisé. Lorsque l'on fait la somme sur toutes les longueurs d'ondes de la loi de Planck, l'énergie totale du rayonnement du corps noir est donnée par :

$$E_{bb} = \sigma T^4 \quad 10-70$$

la loi dite de Stefan-Boltzmann (1879) avec $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ qui donne le flux radiatif (en W m^{-2}) émis à la température T du corps. En 1893, Wien a établi une loi, donnant la longueur d'onde du maximum d'énergie rayonnée en fonction de la température du corps :

$$\lambda_{MAX} = 2898/T$$

avec la longueur d'onde λ_{MAX} en micron ($1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$) et T en kelvin. Avec la loi de Wien, il devient très simple de déterminer la température de n'importe quelle source de lumière sous l'hypothèse que la source se comporte comme un corps noir idéal. Le rayonnement solaire dont les longueurs d'onde s'étendent de 0,3 à 0,7 μm fournissent ainsi la température d'émission par les couches externes du Soleil, 5780 K pour une longueur d'onde centrale de 0,5 μm . Les longueurs d'onde inférieures à 0,3 μm , les rayons ultraviolets, sont absorbés par la couche d'ozone O_3 dans la stratosphère. Les températures de la Terre, des océans et de l'atmosphère étant beaucoup plus basses, la loi de Wien indique que le rayonnement infrarouge émis par la haute atmosphère ($\approx 255 \text{ K}$) est centré autour de 11 μm . Les longueurs d'onde comprises entre 0,75 et 100 μm appartiennent au domaine du rayonnement dit infrarouge. Certains gaz traces de l'atmosphère (car leurs concentrations sont très faibles), vapeur d'eau, dioxyde de carbone, méthane appelés gaz à effets de serre ont un effet majeur sur le climat à cause de leur comportement vis-à-vis du rayonnement infrarouge : lorsque la fréquence d'un photon coïncide avec la transition quantique entre deux états d'une molécule, l'énergie du photon est absorbée et la molécule de gaz passe dans un état excité puis réémet le photon en retournant à son état fondamental. Les molécules comme H_2O ou CO_2 ont de très nombreuses raies d'absorption dans le domaine infrarouge qui ont été identifiées par spectroscopie, raies qui correspondent à des oscillations de vibration ou de rotation des molécules.

10.6.2 Bilan d'énergie et d'entropie de la Terre

Le système Terre - Océan - Atmosphère reçoit donc du Soleil l'énergie radiative $S_0(1 - \alpha) \pi R_T^2$. Le forçage solaire global moyen est donc :

$$Q_s = \frac{S_0(1 - \alpha)\pi R_T^2}{4\pi R_T^2} = \frac{S_0(1 - \alpha)}{4} \approx 240 \text{ W m}^{-2} \quad 10-71$$

où l'on a pris $\alpha = 0,3$. Ces 240 Wm^{-2} constituent donc le flux solaire global moyen au sommet de l'atmosphère. Comme l'atmosphère est assez transparente pour ce rayonnement visible, admettons en première approximation que le sol absorbe la majeure partie de ce rayonnement à la température moyenne de surface $T_S = +15^\circ\text{C}$ (288 K). La perte par rayonnement infrarouge peut être trouvée de deux façons. Connaissant les concentrations de chaque gaz à effet de serre en tous points de l'atmosphère, la première méthode est de calculer l'effet des multiples raies d'absorption de chaque gaz pour chaque fréquence et chaque direction du rayonnement, un calcul numérique lourd mais fait en routine dans les codes radiatifs atmosphériques. À partir des années 1980, une deuxième méthode est venue des satellites qui mesurent directement le rayonnement reçu de la Terre en fonction de la longueur d'onde. Ces observations permettent de trouver les températures d'émission infrarouge et les altitudes de ces émissions entre 5 et 10 km au-dessus des concentrations maximales de vapeur d'eau qui est le gaz à effet de serre majeur. L'une ou l'autre méthode fournit donc le rayonnement réémis par la Terre et des comparaisons excellentes ont pu être faites localement entre la théorie et l'observation satellitaire. Appelons Q_{IR} la moyenne spatiale de ces pertes infrarouges. Si la Terre est en équilibre, l'énergie interne U et l'entropie S sont constantes. La première loi demande alors :

$$Q_S - Q_{\text{IR}} + W = 0 \quad 10-72$$

Comme la Terre flotte dans le vide, le travail d'expansion 10-1 est donc nul et $W = 0$:

$$Q_S - Q_{\text{IR}} = 0 \quad 10-73$$

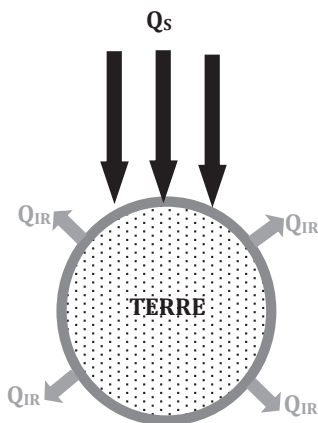


Figure 10.31

La première loi appliquée à la Terre équilibre le rayonnement reçu du Soleil Q_S et le rayonnement infrarouge Q_{IR} qui est émis dans toutes les directions. Le travail d'expansion W est nul puisque la pression extérieure p_{EX} est nulle.

Supposons pour les vertus de l'exercice que l'atmosphère soit transparente pour le rayonnement solaire et que la Terre émette comme un corps noir. L'équilibre du gain solaire Q_S et de la perte infrarouge Q_{IR} définit la température d'émission T_E de la Terre :

$$\frac{S_0(1-\alpha)}{4} = \sigma T_E^4 \quad 10-74$$

qui est donnée par :

$$T_E = \left(\frac{S_0(1-\alpha)}{4\sigma} \right)^{1/4}$$

Avec les valeurs ci-dessus, on trouve $T_E \approx 255 \text{ K} = -18^\circ \text{C}$.

La troposphère s'étend de la surface de la Terre jusqu'à la stratosphère située à une altitude de 8 à 15 km. Dans la troposphère, la température décroît en moyenne au taux $\Gamma_{MOY} = -dT/dz = 6,5 \times 10^{-3} \text{ K m}^{-1}$ (proche de ce que l'on appelle le gradient adiabatique humide), voir figure 10.32.

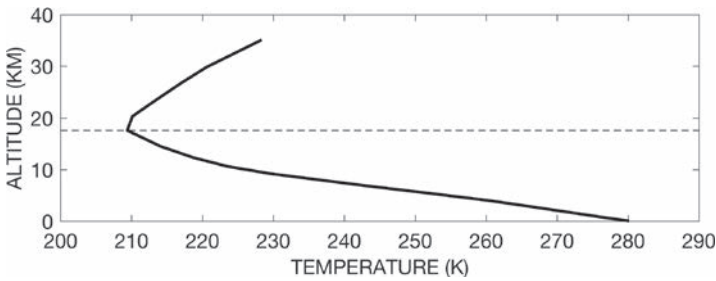


Figure 10.32

La température moyenne tirée de 1976 *US Standard Atmosphere* en fonction de l'altitude. Le pointillé est la tropopause, la limite supérieure de la troposphère qui est la couche la plus importante pour le climat.

Compte tenu de la convection (la relation 10-17), on s'attendrait plutôt à voir l'air chaud léger en altitude et l'air froid lourd au sol et cette décroissance surprenante s'explique par la compressibilité de l'air (voir exercice 45). L'altitude d'émission z_{IR} du flux infrarouge vers l'espace est donc :

$$z_{IR} = \frac{T_S - T_E}{\Gamma_{MOY}} = \frac{288 - 255}{6,5 \times 10^{-3}} = 5076 \text{ m}$$

Ceci est une moyenne globale, les altitudes d'émission pouvant être beaucoup plus élevées dans les régions équatoriales quand les cumulus convectifs atteignent le sommet de la troposphère (15 km) ou beaucoup plus faibles au-dessus des déserts secs des latitudes subtropicales. Connaissant T_E , la façon la plus élémentaire pour essayer de prédire la température de surface de la Terre est de modéliser la présence

de l'atmosphère entre la surface et l'altitude z_{IR} par une couche atmosphérique transparente au flux solaire mais opaque au flux infrarouge (un corps noir) :

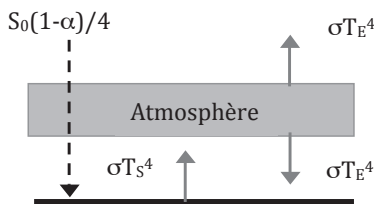


Figure 10.33

L'équilibre des flux au sommet de l'atmosphère est identique au cas précédent et donc la température de l'atmosphère est la température d'émission T_E . Pour déterminer la température T_S , l'équilibre des flux au sol donne :

$$\frac{S_0(1-\alpha)}{4} + \sigma T_E^4 = \sigma T_S^4$$

et donc :

$$\sigma T_S^4 = 2\sigma T_E^4$$

une dernière relation qui n'est autre que l'équilibre des flux infrarouges pour l'atmosphère. Ainsi $T_S = 2^{1/4}T_E \approx 303 \text{ K} = 30^\circ \text{C}$. L'équilibre au sol montre en fait que :

$$2 \times \frac{S_0(1-\alpha)}{4} = \sigma T_S^4$$

Le sol reçoit maintenant non seulement le rayonnement solaire mais aussi une quantité de flux infrarouge de l'atmosphère égale au rayonnement solaire, et donc tout se passe comme si le rayonnement solaire avait doublé. À l'équilibre, le sol doit donc augmenter sa température T_S pour pouvoir réémettre ce forçage double. Ce que l'on appelle l'effet de serre G est défini par la différence entre l'infrarouge émis par la surface terrestre et celui émis au sommet de l'atmosphère Q_{IR} , encore appelé OLR (*Outgoing Long wave Radiation*) :

$$G = \sigma T_S^4 - \sigma T_E^4 = \sigma T_E^4 = \frac{S_0(1-\alpha)}{4}$$

L'effet de serre du modèle de la figure 10.33 est donc égal au rayonnement solaire absorbé au sol. Comme la prédiction T_S (+ 30 °C) dépasse la température moyenne de la Terre observée à la surface (+ 15 °C), ce modèle purement radiatif est excessif. Il néglige les mouvements verticaux de l'atmosphère, la convection thermique qui va évacuer l'excès de chaleur vers le haut, un effet considéré par les modèles d'atmosphère appelés radiatif-convectif.

Les relations 10-30, 10-31 permettent de trouver la variation d'entropie $d_E S$ du système Terre due aux échanges radiatifs avec l'environnement (ici le cosmos). La détermination du flux d'entropie associé avec le rayonnement électromagnétique fut réalisée par Planck en 1913. Notoirement complexe, elle ne peut pas être abordée à

ce stade. Signalons qu'il fallut attendre près d'un siècle pour estimer les flux radiatifs à partir des mesures satellitaires lors de l'expérience ERBE (*Earth Radiation Budget Experiment*) (voir Stephens et O'Brien, 1993). En continuant avec les hypothèses ci-dessus, on peut avoir une idée de l'échange d'entropie causée par les processus radiatifs sur la Terre de la façon suivante. Le flux solaire Q_S est absorbé au niveau du sol à la température T_S tandis que Q_{IR} est perdu à la température d'émission T_E en altitude de sorte que :

$$d_E S = \frac{Q_S}{T_S} - \frac{Q_{IR}}{T_E} = Q_S \left(\frac{1}{T_S} - \frac{1}{T_E} \right) \quad 10-75$$

après avoir utilisé 10-73. Puisque $T_E < T_S$, les échanges radiatifs avec l'environnement impliquent donc $d_E S < 0$, une diminution des échanges d'entropie entre la Terre et l'environnement. L'approche statistique microscopique rend compte de cette diminution de la manière suivante : le rayonnement solaire incident est une collection de photons de haute énergie (haute fréquence) concentrés sur des rayons parallèles à la direction Soleil - Terre quand le rayonnement infrarouge renvoie des photons de basse énergie (basse fréquence) dans toutes les directions, une situation beaucoup plus désordonnée.

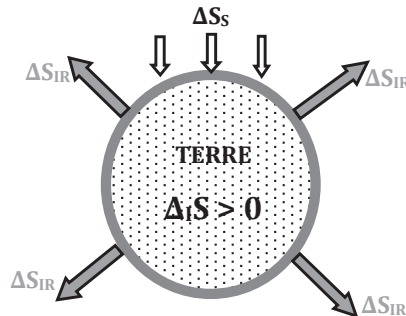


Figure 10.34

Le rayonnement solaire apporte une certaine quantité d'entropie à la terre $\Delta S_S > 0$. Mais une plus grande quantité associée au flux infrarouge ΔS_{IR} est exportée vers l'espace et $\Delta S_{IR} < 0$. Toutes les transformations naturelles irréversibles du moteur Terre produisent de l'entropie de façon irréversible $\Delta_I S > 0$. Quand le système est à l'équilibre $\Delta S = \Delta_I S + \Delta S_S + \Delta S_{IR} = 0$. D'après Stephens et O' Brien, 1993.

Supposons que la Terre soit à l'équilibre thermodynamique, son entropie est alors constante. La relation 10-30 décompose sa variation d'entropie en variation d'entropie interne au système et celles dues aux échanges avec l'extérieur. Ainsi :

$$dS = d_I S + d_E S = 0 \Rightarrow d_I S = -d_E S > 0 \quad 10-76$$

Ainsi on peut dire qu'à l'équilibre les transformations naturelles irréversibles qui ont lieu en permanence sur la Terre sont rendues possibles par la décroissance de l'entropie associée aux échanges d'entropie avec le cosmos. On peut créer d'autant plus de désordre en interne sur la Terre que le flux solaire importe d'ordre.

Si l'on restreint maintenant le système à la seule atmosphère, la relation 10-72 qui exprime l'équilibre thermodynamique au travers de la première loi devient :

$$Q_S - Q_{IR} + Q_{AT} + W = 0 \quad 10-77$$

Deux termes additionnels apparaissent en effet : le premier Q_{AT} est la chaleur nette échangée entre l'atmosphère et la surface terrestre (et ses 70 % d'océan) et le second fait apparaître le travail W quand le vent frotte sur la surface de la terre et de la mer. Du point de vue de l'atmosphère, ce travail est une dissipation d'énergie cinétique et $W < 0$. L'atmosphère fonctionne comme un moteur thermique, car elle gagne de la chaleur par le sol à la température haute T_S , rejette de la chaleur à la température basse T_E et fait du travail sur l'environnement, non seulement pour mettre les océans en mouvement mais aussi pour faire pleuvoir. Le rendement d'un moteur de Carnot fonctionnant entre ces deux températures données par 10-35 atteint 11 %. On peut estimer le travail du moteur atmosphérique W de la façon suivante : du point de vue de l'océan, $W' = -W$ est un travail positif fait par l'atmosphère pour mettre en mouvement l'océan que l'on peut estimer en chaque point si l'on connaît la force \mathbf{F} du vent par unité de surface (on parle de tension du vent) et le courant de surface \mathbf{u} :

$$W' = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{A}$$

avec A une surface horizontale. Des estimations récentes sur l'océan global (Roquet *et al.*, 2011) donnent une moyenne de $2,3 \text{ W m}^{-2}$. Quand on estime le rendement du moteur par le rapport :

$$\eta = \frac{W'}{Q_S}$$

avec le travail fait par le vent sur l'océan $W' \approx 2,3 \text{ W m}^{-2}$ et $Q_S = 240 \text{ W m}^{-2}$, le rendement réel du moteur « atmosphère » tombe à environ 1 %, un ordre de grandeur plus faible que l'optimum de Carnot. Ceci n'est qu'un ordre de grandeur et la détermination du rendement thermodynamique de l'atmosphère reste un problème de recherche actuel.

En mettant de côté les phénomènes de marées causés par la gravitation, les mouvements de l'atmosphère et des océans importants pour le climat ont pour origine les variations géographiques des forçages solaires et infrarouges avec la latitude. N'étant pas équilibrés localement, des mouvements naissent dans l'atmosphère et dans l'océan pour transporter l'énergie en excès des basses latitudes vers les hautes latitudes. Intéressons-nous au rayonnement solaire reçu en un point sur la Terre : cela dépend du cosinus de l'angle entre les rayons solaires et la normale à la surface de la sphère et cet angle change en permanence, avec la rotation de la Terre sur elle-même provoquant l'alternance jour-nuit, avec la rotation de la Terre autour du Soleil provoquant l'alternance des saisons dues à l'obliquité, l'angle de $23,4^\circ$ entre l'équateur et le plan de l'écliptique. Mais l'orbite de la trajectoire et l'obliquité varient aussi sur des périodes multi-millénaires, des variations qui influent fortement sur le rayonnement solaire des hautes latitudes, un effet introduit par Milankovic pour expliquer l'origine des cycles glaciaires sur ces mêmes périodes de forçage. Connaissant ce cosinus de l'angle en fonction du temps, on peut calculer le

flux solaire reçu à chaque latitude en fonction du temps. La moyenne annuelle au sommet de l'atmosphère est montrée sur la figure 10.35 :

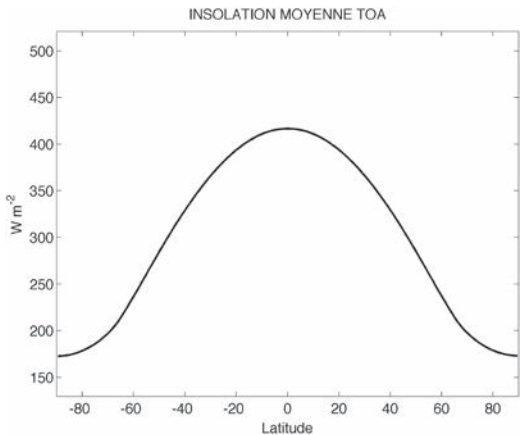


Figure 10.35

Le flux solaire en moyenne annuelle en W m^{-2} au sommet de l'atmosphère (TOA-top of atmosphere).

La moyenne annuelle du flux solaire incident montre le déséquilibre du forçage solaire avec la latitude : plus de 400 W m^{-2} arrivent dans les régions équatoriales comparées à environ 170 W m^{-2} aux pôles. Le flux solaire incident corrigé par l'albédo et les observations du flux infrarouge au sommet de l'atmosphère permettent d'obtenir Q_S et Q_{IR} en fonction de la latitude sur la figure 10.36.

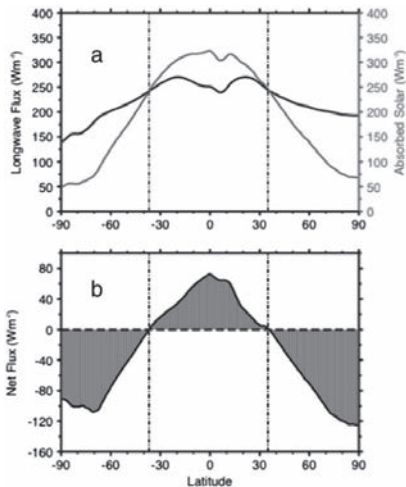


Figure 10.36

La figure (a) montre l'observation du flux solaire absorbé (gris) et du flux infrarouge émis au sommet de l'atmosphère (noir). Le forçage terrestre est la différence des deux en (b). Les bandes de latitudes excédentaires et déficitaires sont séparées par les deux frontières autour de 35° . Source : Stephens et L'Ecuyer, 2015.

On observe que le forçage infrarouge varie beaucoup moins en latitude que le forçage solaire avec pour conséquence un excès aux latitudes inférieures à 35° et un déficit au-delà. Si la température en moyenne annuelle ne change pas sous l'effet de ce forçage radiatif, cela veut dire que l'excès d'énergie reçue aux basses latitudes est transporté par la circulation des deux fluides, air et eau, vers des latitudes plus élevées. À partir des valeurs de la figure 10.36, on détermine facilement le transport d'énergie vers les pôles nécessaire pour assurer cet équilibre thermique. Il atteint un maximum de 6 PW ($1 \text{ PW} = 10^{15} \text{ W}$) vers 35° de latitude. Circulation atmosphérique et océanique s'organisent pour faire ce transport et les observations dans chaque milieu montrent que les contributions se répartissent à raison de 2/3 pour l'atmosphère et 1/3 pour l'océan.

La physique du transport atmosphérique dans la cellule de Hadley entre 35°S et 35°N est celle d'un moteur thermique.

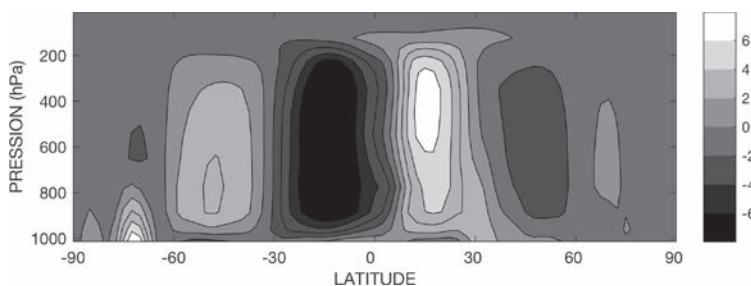


Figure 10.37

La circulation atmosphérique moyennée sur l'année et selon la longitude dans un diagramme latitude, pression. Les contours sont des lignes de courant, la circulation se faisant dans le sens (respectivement contraire) des aiguilles d'une montre autour d'une région claire (respectivement sombre). Les valeurs, des débits massiques, sont à multiplier par $10^{10} \text{ kg s}^{-1}$. Source des données : réanalyse NCEP.

L'air chaud monte rapidement un peu au nord de l'équateur puis se refroidit en se déplaçant vers les pôles en altitude. Plus lourd, l'air redescend de chaque côté vers 35° de latitude. La boucle est finalement fermée par un mouvement de l'air en surface qui se réchauffe en allant vers l'équateur. Notez que la convergence de l'air chaud a lieu au nord de l'équateur, une zone appelée zone de convergence intertropicale (ITCZ). La force de Coriolis qui agit sur ces mouvements méridiens est à l'origine des alizés (des vents d'est) en surface et des vents d'ouest en altitude. Ces deux boucles dans le plan latitude-altitude sont des cellules thermiques directes. Chaque cellule est à l'image d'un moteur thermique cyclique alimenté par une source chaude en surface (le forçage solaire) et refroidi par une source froide en altitude (le forçage infrarouge), les montées et les descentes d'air pouvant être considérées comme des transformations adiabatiques en première approximation. À des échelles plus petites, cette physique du moteur thermique à laquelle il faut ajouter les changements de phase de l'eau, se retrouve au centre de l'explication des cyclones tropicaux qui se forment sur le bord Est des océans quand la température de surface de la mer dépasse 28°C .

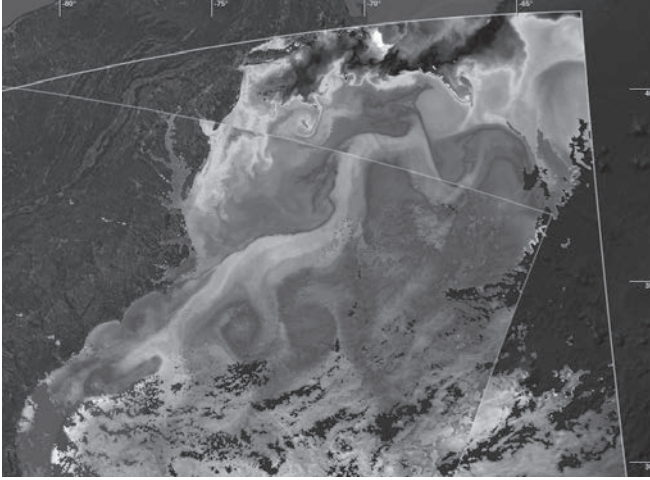


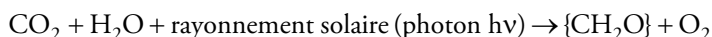
Figure 10.38

La température de surface de la mer au large des côtes américaines (de la Floride à Cape Cod) vue par le satellite *MODIS* le 30 août 2010. La température est d'autant plus élevée que la nuance de gris est claire. Source : OceanDataLab.

La température de surface de la mer obtenue par radiométrie infrarouge sur la figure 10.38 montre une langue d'eau chaude transportée par le Gulf Stream vers le nord. Les ondulations et les taches circulaires sont la signature de tourbillons océaniques de 100 à 300 km de diamètre qui sont produits par l'instabilité du Gulf Stream. Quand il quitte la côte, l'extension du Gulf Stream devient la dérive nord atlantique, un ensemble de fronts et de tourbillons instationnaires qui effectuent un transport de chaleur vers le nord. En se dirigeant vers le nord-est en surface, cette dérive se refroidit régulièrement. Une partie recircule horizontalement, une partie poursuit sa route vers le pôle. Quand les eaux deviennent suffisamment denses, elles plongent et créent l'eau profonde en mer du Groenland et en mer de Norvège. Ces eaux profondes retournent vers les basses latitudes plaquées le long de la côte américaine. Dans le plan latitude-profondeur, la circulation océanique de l'Atlantique nord a donc aussi la forme d'une cellule thermique directe, courants vers le pôle Nord en surface et vers l'équateur en profondeur qui assurent le transport méridien de chaleur de l'équateur vers le pôle. Il existe des complications dans l'océan : si la force de flottabilité 10-17 permet aux eaux denses de plonger tout comme elle permet à l'air chaud de monter dans la convergence intertropicale, il est plus difficile de comprendre comment les eaux profondes se réchauffent pour fermer la boucle. Et comme leur volume n'augmente pas au cours du temps, elles doivent se réchauffer mais c'est difficile, car le forçage solaire est tout en haut à la surface et la diffusion moléculaire très faible. Une part importante des recherches actuelles sur cette circulation dite thermohaline est justement d'identifier les processus physiques qui permettent cette remontée des eaux profondes en surface.

10.6.3 Énergie du vivant

Les réactions chimiques résultent de collisions moléculaires avec mise en commun d'un ou de plusieurs électrons dans des liaisons atomiques. Les organismes sont aussi le siège de telles réactions chimiques à pression constante qui conservent la masse et l'enthalpie des molécules mises en jeu dans une réaction. Bien que l'agriculture soit très ancienne, la découverte de la photosynthèse est tardive et étroitement liée à la découverte des gaz. Priestley, en 1776, nota que la combustion d'une bougie produit du dioxyde de carbone tandis qu'une plante produit de l'oxygène. Peu après, Hingen-Houz identifia le rôle central de la lumière comme source d'énergie et la première écriture de la réaction de photosynthèse est due à de Saussure en 1804. Cette réaction chimique fondamentale qui permet à l'énergie solaire de fournir de l'énergie chimique utilisable par les cellules des plantes, des algues ou du phytoplancton pour créer de la matière organique à partir du dioxyde de carbone, de l'eau et de sels nutritifs (ions nitrate NO_3^- et phosphates PO_4^{3-}) sous l'effet du rayonnement solaire s'écrit succinctement :

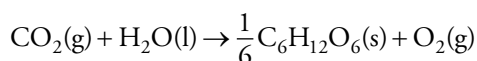


où l'élément produit à droite $\{\text{CH}_2\text{O}\}$ est une combinaison générique représentant les glucides, le constituant de la matière organique. Cette réaction est une réaction d'oxydoréduction, réaction d'échanges d'électrons entre éléments dite rédox. La réaction se passe au sein d'une cellule appelée chloroplaste dont la membrane contient la chlorophylle, le pigment qui permet l'absorption de l'énergie solaire. Les plantes absorbent donc du dioxyde de carbone et de l'eau et fabriquent de la matière organique et de l'oxygène sous l'effet du rayonnement solaire (visible). Mais la matière organique se dégrade par la réaction inverse, respiration ou combustion :



Cette réaction restitue l'eau, le CO_2 et l'énergie utilisée lors de la photosynthèse, sous forme de chaleur dégagée quand on fait brûler du bois, du charbon ou du pétrole.

Une question centrale est d'estimer le rendement thermodynamique de la photosynthèse. La réaction de synthèse du glucose permet d'y répondre :



avec les notations (g) pour phase gazeuse, (l) pour phase liquide et (s) pour phase solide. En effet, la formation du glucose demande une enthalpie $\Delta_{\text{CH}} = 0,49 \text{ MJ}$ par mole de O_2 pour 1/6 de mole de glucose produite. L'énergie de N_A photons avec N_A le nombre d'Avogadro, est :

$$E_{\text{PH}} = N_A \frac{hc}{\lambda}$$

En remplaçant N_A , h et c par leurs valeurs :

$$E_{\text{PH}} = \frac{1,19 \times 10^8}{\lambda}$$

avec E_{PH} en joule mole^{-1} et la longueur d'onde λ en nm ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$). La chlorophylle absorbe principalement dans le bleu et dans le rouge avec des pics vers 450 et 650 nm. Les plantes sont vertes, car le vert de la lumière solaire est réfléchi et diffusé quand les autres longueurs d'ondes sont absorbées par les chloroplastes et utilisées pour fabriquer de l'énergie chimique. On estime ainsi que 50 % du rayonnement solaire est utilisé par la photosynthèse. Un exemple montre comment on pourrait calculer un rendement de la conversion énergétique. Une longueur d'onde de 480 nm près du pic de la chlorophylle a, le pigment majeur, absorbe une énergie lumineuse $E_{PH} = 0,25 \text{ MJ mole}^{-1}$. Mais combien de multiples de ces N_A photons sont-ils nécessaires pour fabriquer une mole de O_2 par photosynthèse ? La réponse de la mécanique quantique est qu'il en faut à peu près 9. Si l'on divise l'enthalpie de formation du glucose par mole de O_2 par l'énergie solaire $9 \times E_{PH}$ nécessaire, on trouve un rendement de :

$$\eta_{\text{PHOTO}} = \frac{\Delta_C H}{9E_{PH}} = \frac{0,49}{2,2} = 22\%$$

un rendement maximal, car on verra qu'il est beaucoup plus faible en pratique à l'échelle d'une culture.

Les feuilles des plantes supérieures ont adapté leur forme en lamelles pour répondre à trois objectifs : exploiter la lumière, permettre un échange gazeux efficace du CO_2 et organiser l'export des produits de la photosynthèse vers le reste de la plante. La feuille doit également limiter la perte en eau par évaporation. Dans la feuille, la cellule centrale de la photosynthèse est le chloroplaste, d'une taille de 3 à 10 μm , illustré sur la figure ci-dessous :

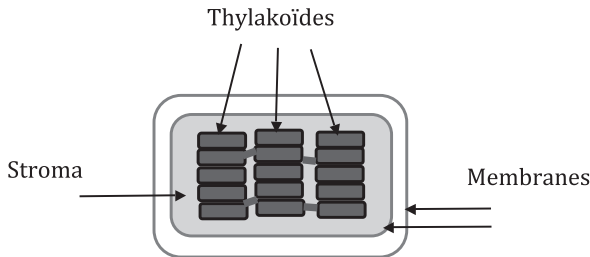


Figure 10.39

La cellule des feuilles, le chloroplaste, qui joue le rôle central dans la photosynthèse. D'après Campbell *et al.*, 2012.

Le stroma est un liquide dense qui renferme les molécules d'ADN tandis que les thylakoïdes sont des sacs aplatis, communiquant entre eux, dont les membranes contiennent la chlorophylle, le pigment actif qui absorbe l'énergie solaire, et permet la synthèse des molécules organiques. Le schéma fonctionnel du chloroplaste est donné sur la figure 10.40.

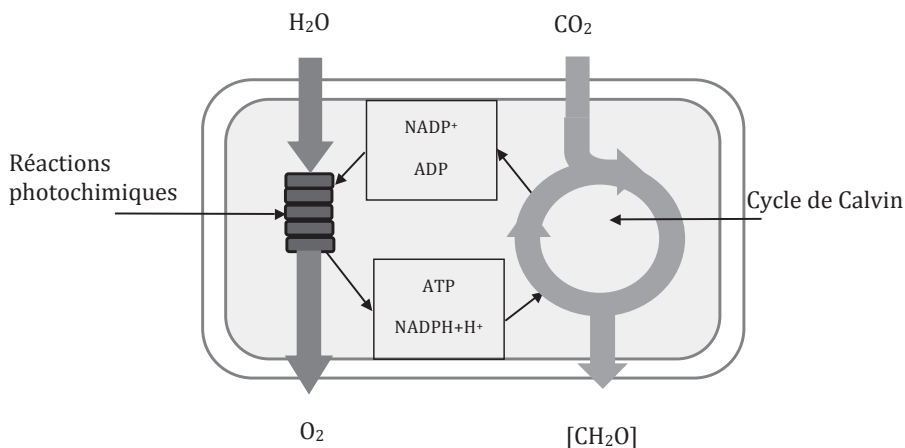


Figure 10.40

Le schéma fonctionnel du chloroplaste : les réactions photochimiques à gauche transforment l'énergie solaire et la molécule H_2O en énergie chimique et en oxygène. Le cycle de Calvin à droite fixe le carbone du CO_2 et synthétise les glucides. D'après Campbell *et al.*, 2012.

Les chloroplastes sont de fait des usines chimiques qui fonctionnent à l'énergie solaire. La photosynthèse fonctionne en deux étapes. Une première étape de réaction rédox au cours de laquelle l'énergie lumineuse permet la création dans les thylakoïdes de deux molécules stables, la NADPH (nicotinamide adénine dinucléotide phosphate) et l'ATP (adénosine triphosphate). On a pu observer que c'est la molécule H_2O qui se scinde dans les thylakoïdes pour fabriquer la molécule d'oxygène. La deuxième étape utilise la NADPH et l'ATP pour réduire le CO_2 en glucide, le cycle de Calvin qui a lieu dans le stroma. Au cours de ce cycle, le CO_2 est utilisé pour produire des molécules organiques, le carbone fixé étant réduit en glucide par le couple $NADPH + H^+$. L'énergie nécessaire pour le fonctionnement du cycle de Calvin vient de l'ATP. Le détail du fonctionnement chimique du chloroplaste est extraordinairement complexe et le lecteur pourra consulter par exemple le livre *Biologie* de Campbell *et al.*, 2012.

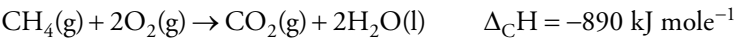
Lorsqu'ils mangent, les êtres vivants du règne animal brûlent ces carbohydrates pour grandir, réparer leurs tissus, maintenir leur température corporelle, penser et exercer une activité physique. D'un point de vue thermodynamique, le corps humain est un système ouvert qui échange matières et énergie et avec l'environnement (ingestion d'aliments, respiration, transpiration et excrétion, production de travail et échanges de chaleur). La cellule biologique elle-même est aussi un système ouvert qui laisse passer nutritifs et déchets à travers sa membrane extérieure. Le métabolisme est l'ensemble des réactions chimiques qui permettent aux cellules biologiques d'acquérir de l'énergie, de la stocker et de l'utiliser. L'énergie au niveau des muscles est stockée dans l'ATP immédiatement disponible pour contracter une fibre musculaire. Cette ATP est synthétisée par des réactions d'oxydation faisant intervenir la synthèse du glucose dans le foie ou celle d'acides gras provenant de la graisse déjà stockée

dans le corps. Le métabolisme demande l'intervention de nombreuses enzymes qui jouent le rôle de catalyseurs pour activer des cellules musculaires, synthétiser et transporter des grandes et petites molécules. La synthèse de l'ADN est un processus qui convertit au final l'énergie en information utile, le codage du génome. Mais l'oxydation des composés organiques ne conduit pas uniquement à fabriquer des macromolécules très ordonnées, une partie est perdue en chaleur pour maintenir la température corporelle.

Le choix des thèmes et les données du paragraphe suivant sont tirés de Atkins.

10.6.3.1 Propriétés thermochimiques des fuels

Les combustibles fossiles également produits par la photosynthèse témoignent de l'énergie solaire d'un passé lointain. La consommation d'un fuel dans un feu ou un moteur est le résultat d'une réaction de combustion. Pour le méthane :



L'enthalpie de combustion standard est l'enthalpie molaire donnée par mole de la substance combustible, ici CH₄. Le tableau suivant en donne quelques-unes :

Substance	$\Delta_{\text{C}}\text{H}$ [kJ mole ⁻¹]	Masse molaire [g]
Carbone C(s) graphite	-394	12
Éthanol C ₂ H ₅ OH(l)	-1 368	46
Glucose C ₆ H ₁₂ O ₆	-2 808	180
Glycine (amino acide) CH ₂ (NH ₂)COOH(s)	-969	75
Hydrogène H ₂ (g)	-286	2
Iso-octane C ₈ H ₁₈ (l)	-5 461	114
Méthane CH ₄ (g)	-890	16
Propane C ₃ H ₈ (g)	-2 220	44
Sucrose C ₁₂ H ₂₂ O ₁₁ (s)	-5 645	342

Tout ce tableau concerne la combustion de substances fabriquées par l'activité biologique, la croissance des plantes, que ce soit au présent ou au passé lorsque l'on parle de fuels fossiles. Il permet de comparer leurs capacités énergétiques. En pratique on a plutôt besoin des enthalpies spécifiques qui sont exprimées en joule par gramme ou des densités d'enthalpie exprimées en joule par litre dont les conversions sont les suivantes :

Enthalpie spécifique = $\Delta_{\text{C}}\text{H}/M$, avec M la masse molaire en gramme.

Densité d'enthalpie = $\Delta_{\text{C}}\text{H}/V_{\text{M}}$, avec V_M le volume molaire.

Le tableau suivant détaille les réactions de combustion et donne l'enthalpie spécifique et la densité d'enthalpie de quelques fuels importants.

Tableau 10.11

Fuel	Réaction	Δ_{CH} [kJ mole ⁻¹]	Enthalpie spécifique [kJ g ⁻¹]	Densité d'enthalpie [kJ litre ⁻¹]
Hydrogène	$2\text{H}_2(\text{g}) + \text{O}_2(\text{g}) \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}(\text{l})$	-286	142	13
Méthane	$\text{CH}_4(\text{g}) + 2\text{O}_2(\text{g}) \rightarrow \text{CO}_2(\text{g}) + 2\text{H}_2\text{O}(\text{l})$	-890	55	40
Iso-octane	$2\text{C}_8\text{H}_{18}(\text{l}) + 25\text{O}_2(\text{g}) \rightarrow 16\text{CO}_2(\text{g}) + 18\text{H}_2\text{O}(\text{l})$	-5 461	48	$3,3 \times 10^4$
Méthanol	$2\text{CH}_3\text{OH}(\text{l}) + 3\text{O}_2(\text{g}) \rightarrow 2\text{CO}_2(\text{g}) + 4\text{H}_2\text{O}(\text{l})$	-726	23	$1,8 \times 10^4$
Éthanol	$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}(\text{l}) + 3\text{O}_2(\text{g}) \rightarrow 2\text{CO}_2(\text{g}) + 3\text{H}_2\text{O}(\text{l})$	-1 368	29,7	$2,3 \times 10^4$
Glucose	$\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6(\text{s}) + 6\text{O}_2(\text{g}) \rightarrow 6\text{CO}_2(\text{g}) + 6\text{H}_2\text{O}(\text{l})$	-2 808	16	$2,5 \times 10^4$

On s'aperçoit que l'hydrogène a une enthalpie spécifique qui se compare bien à celle des autres fuels d'origine fossile. Il présente un grand avantage puisque sa combustion ne génère pas de CO_2 . En revanche il est très léger et sa densité d'enthalpie est bien plus faible que pour les autres. Il faut donc en stocker un bien plus grand volume pour avoir la même quantité d'énergie. Comme il n'existe pas à l'état naturel, il faut le produire par électrolyse de l'eau ou par réaction entre du gaz naturel et de la vapeur d'eau à haute température. Compte tenu de ses propriétés, d'autres méthodes de production sont en cours de développement.

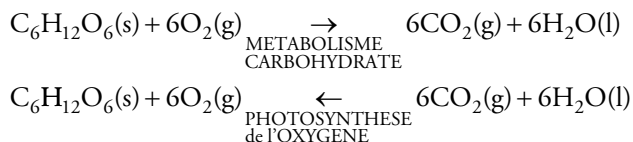
10.6.3.2 Besoins alimentaires

Les besoins énergétiques quotidiens d'une personne jeune (20 ans) sont de 12 MJ pour un homme et de 9 MJ pour une femme. Si on divise par un jour, la puissance moyenne est 140 W pour un homme et 104 W pour une femme. Ces besoins sont couverts par des réactions de combustion d'aliments comme indiqué tableau 10.12.

Tableau 10.12

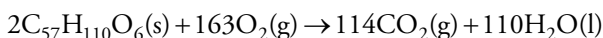
Aliments	Δ_{CH} [kJ g ⁻¹]
Glucose	-16
Amidon (starch)	-17
Graisse	-38

Nous avons déjà vu la réaction de combustion du glucose :



Elle est exothermique puisque $\Delta_{\text{C}}H$ est négatif (la réaction inverse de synthèse du glucose par photosynthèse demande de l'énergie solaire).

La réaction d'une graisse comme la tristéarine est :



Si la consommation quotidienne est fournie uniquement par le glucose, un homme devrait en ingérer 750 g et une femme 560 g. On pourra préférer l'amidon qui a une enthalpie un peu plus élevée, mais surtout des fibres indigestes (de la cellulose) qui aident le transit intestinal. Les graisses comme la tristéarine ont des enthalpies encore plus élevées. Elles sont stockées dans l'organisme et ne sont utilisées que quand les carbohydrates commencent à s'épuiser. Les protéines sont aussi une source d'énergie mais ses composants, les amino-acides, sont surtout utilisés pour construire d'autres protéines. Une partie seulement de toute cette énergie chimique alimentaire est disponible pour effectuer du travail musculaire. En effet le corps humain perd de la chaleur par radiation, conduction et évaporation, dès lors le transfert de chaleur est utilisé pour conserver la température de l'organisme dans des limites étroites de quelques degrés seulement, $\pm 2,5^\circ\text{C}$, pour un fonctionnement correct. La circulation du sang est le vecteur de cette chaleur pour assurer la stabilité thermique de toutes les parties du corps. Lorsque l'on rougit soudainement, un afflux de sang arrive dans les vaisseaux capillaires sous la peau et de la chaleur est perdue par conduction et transpiration. La perte par évaporation est simplement l'enthalpie de vaporisation de l'eau $\Delta_{\text{VAP}}H = 44 \text{ kJ mole}^{-1}$. La chaleur demandée pour évaporer un litre d'eau est donc :

$$Q_{\text{EVAP}} = \frac{\rho \Delta_{\text{VAP}}H}{M_{\text{H}_2\text{O}}} = 2,4 \text{ MJ litre}^{-1}$$

avec $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ et la masse molaire de l'eau $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ g}$. Lors d'une activité physique intense, on peut perdre 1 à 2 litres d'eau par heure, soit une perte d'énergie de 2,4 à 5 MJ par heure.

Les réactions de combustion qui se passent dans les cellules biologiques sont des réactions spontanées qui augmentent l'entropie du système. La transformation de grosses molécules de glucose ou de graisse en plus petites (H_2O et CO_2) dans le processus de combustion augmente le désordre et donc l'entropie. En revanche comment expliquer la synthèse des macromolécules de la vie qui s'assemblent dans les cellules et composent les blocs de construction des organismes vivants ? Quand ces molécules s'assemblent pour faire des tissus et des organes, l'ordre augmente et donc l'entropie du système diminue. La deuxième loi dit que ceci n'est possible

que si des échanges avec l'environnement existent pour compenser. En suivant la méthodologie de 10-43, le corps se maintient en régime stationnaire grâce à deux échanges, la combustion des aliments qui fournit le transfert de chaleur Q_{IN} à la température $T_{IN} = 37^\circ\text{C}$ et le corps humain qui perd la quantité Q_{OUT} au bénéfice de l'environnement à la température T_{OUT} plus basse (par conduction, convection et radiation). La dépense énergétique d'une personne en vie mais au repos est appelée métabolisme basal. Si aucun travail n'est effectué, alors ce métabolisme basal est tel que $Q_{IN} = Q_{OUT}$, typiquement de l'ordre de 100 W. On peut alors écrire les variations d'entropie de l'environnement :

$$\Delta\dot{S}_{ENV/ALIM} = -\frac{\dot{Q}_{IN}}{T_{IN}} \quad \Delta\dot{S}_{ENV/EXT} = +\frac{\dot{Q}_{OUT}}{T_{OUT}}$$

$$\Delta\dot{S}_{ENV/TOTAL} = -\frac{\dot{Q}_{IN}}{T_{IN}} + \frac{\dot{Q}_{OUT}}{T_{OUT}} \approx \dot{Q}_{IN} \left(\frac{1}{T_{OUT}} - \frac{1}{T_{IN}} \right) = +4,4 \times 10^{-2} \text{ W K}^{-1} > 0$$

pour $T_{OUT} = 273 \text{ K}$

Le point supérieur a été ajouté puisqu'ici les transferts de chaleur sont par unité de temps, donc des puissances. La deuxième loi demande que la variation d'entropie totale du système {corps + environnement} soit positive :

$$\Delta\dot{S} = \Delta\dot{S}_{CORPS} + \Delta\dot{S}_{ENV/TOTAL} \geq 0$$

Cette inégalité montre que la croissance de l'entropie de l'environnement chauffé par le corps permet à ce dernier d'utiliser une partie du désordre de l'environnement, pour permettre aux cellules biologiques de créer de l'ordre en interne ($\Delta\dot{S}_{CORPS} \leq 0$). Il n'y a pas de violation de la deuxième loi : la croissance spontanée des organismes est possible tant que la croissance de l'entropie de l'environnement compense la décroissance qui apparaît dans l'assemblage des macromolécules d'un organisme complexe.

10.6.4 Énergie électrique

L'électricité permet de distribuer l'énergie à grande distance des sources de production d'énergie. Toute les sources d'énergie, à l'exception de la photosynthèse et du solaire thermique passif, demandent un dispositif de conversion du travail mécanique (une turbine en rotation) en énergie électrique. On se contente de passer en revue brièvement les processus de base qui interviennent.

10.6.4.1 Énergie potentielle

La charge électrique élémentaire q placée dans un champ électrique \mathbf{E} subit une force :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad 10-78$$

Comme le champ électrique dérive d'un potentiel, la force électrique est conservative et une conservation d'énergie en découle. Le travail de cette force \mathbf{F} est :

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = -qdU = -d(qU)$$

avec ici U le potentiel électrique, l'énergie potentielle électrique est juste qU . Comme le courant est le débit de charge électrique $I = dq/dt$, la puissance électrique est simplement UI . Supposons que la puissance $P_C = UI$ issue du générateur d'une centrale électrique soit acheminée sur une ligne de résistance R . La loi d'Ohm fournit le courant $I = U/R$ dans la ligne et la puissance perdue sur la ligne (transformée en énergie thermique) s'écrit $P_L = RI^2$. En remplaçant I par P_C/U on trouve :

$$P_L = \frac{R}{U^2} P_C$$

La perte en ligne sera donc d'autant plus faible que la résistance sera faible et que la tension sera élevée. C'est la raison pour laquelle la puissance électrique émanant des centrales thermiques se fait avec des lignes à haute tension (on en trouve à plus de 700 kV). On estime la perte sur le réseau électrique (*grid*) à environ 10 % en moyenne (plus près de 7 % en Europe et aux États-Unis). L'usage de courants alternatifs est nécessaire pour utiliser des transformateurs de tension nécessaires à chaque extrémité pour retrouver les tensions d'utilisation 110 V ou 220 V selon les pays.

10.6.4.2 Générateur électrique

Le développement de l'électricité est entièrement dû au rendement très élevé grâce auquel on peut transformer du travail mécanique en énergie électrique (un générateur) et on en rappelle brièvement le principe physique. Les moteurs électriques ont existé bien avant les générateurs et leur principe est illustré sur la figure 10.41 :

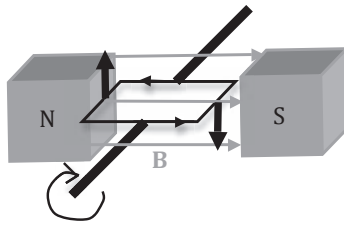


Figure 10.41

Le schéma d'un moteur électrique : une spire conductrice alimentée par un courant est placée dans l'entrefer d'un aimant. Elle est soumise aux forces de Laplace (flèches noires) qui créent un couple et font tourner l'axe.

Le champ magnétique \mathbf{B} est représenté par les flèches grises dirigées du pôle Nord au pôle Sud de l'aimant. La boucle rectangulaire de courant parcourue par un courant soumis aux forces de Laplace se met à tourner dans le sens indiqué.

Ceci s'explique, car en présence d'un champ magnétique \mathbf{B} une particule de charge électrique q se déplaçant à la vitesse \mathbf{v} est soumise à la force de Lorentz :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad 10-79$$

En appliquant la règle du produit vectoriel, on voit que le cadre conducteur alimenté par un courant dans le sens indiqué va être soumis au couple des forces de Lorentz qui vont le faire tourner dans le sens trigonométrique négatif. Monté sur un axe libre avec des contacteurs tournants, l'axe se met en rotation et peut fournir du travail mécanique. La figure 10.40 est donc le schéma d'un moteur électrique que l'on peut résumer ainsi :

boucle de courant + champ magnétique \Rightarrow couple de forces

Supposons maintenant qu'il n'y ait plus de courant dans le cadre conducteur de la figure 10.35 et que l'on tourne le cadre à la main, apparaît-il un courant dans le cadre ? ou encore :

couple de forces + champ magnétique \Rightarrow boucle de courant ?

La réponse positive à cette question fut apportée par Faraday en 1840, des années après que l'on ait réalisé que les courants produisaient des champs magnétiques et que les courants placés dans des champs magnétiques provoquaient des forces (la relation 10-79). Ces expériences étaient statiques. Faraday comprit que la génération de courant demandait que quelque chose change dans le temps : si on approche un aimant d'une boucle de courant, un courant appelé courant induit apparaît et la découverte par Faraday de l'induction est une des fondations de la révolution industrielle en permettant de transformer du travail mécanique (on bouge l'aimant) en électricité. La relation suivante est une conséquence directe de l'une des équations de Maxwell de l'électromagnétisme :

$$E_{\text{FEM}} = -\frac{d\phi}{dt} \quad 10-80$$

La quantité E_{FEM} est la circulation du champ électrique \mathbf{E} sur un tour de circuit et la quantité ϕ est le flux du champ magnétique à travers la boucle du conducteur et ce qui compte est la variation du flux. Ce flux est analogue au flux de masse vu en hydrodynamique. Considérons une boucle conductrice élémentaire entourant une surface dA de normale \mathbf{n} plongée dans un champ magnétique \mathbf{B} .

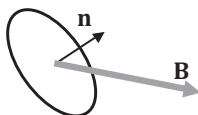


Figure 10.42

Le flux de \mathbf{B} à travers la surface dA de normale \mathbf{n} .

Le flux élémentaire $d\phi$ de \mathbf{B} à travers cette surface est $d\phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA = B \cos\theta dA$ si θ est l'angle que fait \mathbf{B} avec la normale \mathbf{n} . Ce flux peut donc changer, soit quand le champ magnétique change, soit quand l'orientation de la surface change. La relation 10-80 va permettre de comprendre le fonctionnement du générateur électrique alternatif.

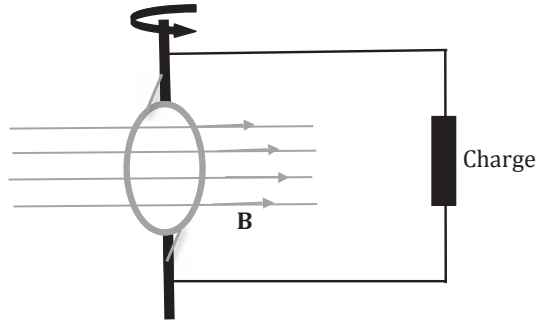


Figure 10.43

Sous l'effet de la rotation de l'arbre par une turbine, la bobine conductrice (en gris) change d'orientation dans le champ magnétique \mathbf{B} créé par un aimant permanent. Une force électromotrice apparaît dans la bobine et donc un courant est généré dans le circuit connecté à l'extérieur.

Le générateur est constitué d'une bobine conductrice (une superposition de spires élémentaires) qui tourne dans un champ magnétique fixe créé dans l'entrefer d'un aimant permanent. Les deux extrémités de la bobine sont connectées à l'axe par des contacteurs tournants. Le flux $\phi = B \cos\theta A$ si A est l'aire de la bobine et B est constant sur la surface. Si la bobine tourne avec la vitesse angulaire ω , alors $\theta = \omega t$. Quand la bobine comprend N tours de fil, la relation 10-80 donne :

$$E_{\text{FEM}} = -N \frac{d}{dt} (BA \cos \omega t) = NBA\omega \sin \omega t$$

Si aucun courant n'est tiré du générateur, la différence de potentiel U entre les deux fils conducteurs est égale à E_{FEM} et donc le système génère une tension alternative $U = U_0 \sin \omega t$. Si le générateur est connecté à une charge, un circuit de résistance R , un courant alternatif I est généré :

$$I = \frac{E_{\text{FEM}}}{R} = \frac{U_0}{R} \sin \omega t$$

On montre que la puissance électrique du générateur $P_G = E_{\text{FEM}} I$. L'ingénierie de fabrication des générateurs couplés aux turbines est très pointue et la qualité supérieure de ces systèmes est que la conversion de travail mécanique en énergie électrique se fait avec un rendement qui dépasse les 90 %. Notons que le micro d'une guitare électrique fonctionne de la même façon, la vibration de la corde engendrant un courant induit dans les spires de cuivre du micro.

10.6.5 Énergie nucléaire

10.6.5.1 Introduction

Depuis les travaux de Becquerel, de Marie et Pierre Curie sur la radioactivité, on savait que des éléments se transforment spontanément en d'autres éléments en émettant des particules. En bombardant une feuille d'or mince par des particules α de forte énergie (5,5 MeV) émises par une source de radon, Rutherford, Geiger et Marsden en 1911 observèrent l'angle de déviation des particules après interaction avec les atomes de la feuille d'or. La plupart des particules ne montraient que de faibles déviations, mais certaines en subissaient d'énormes allant jusqu'à revenir vers la source. Selon les mots de Rutherford, c'était comme si vous tiriez un obus de 15 pouces sur un mouchoir en papier et qu'il revenait sur vous...

Si l'interaction était causée par les forces électromagnétiques de particules distribuées sur la taille du nuage atomique, on ne devait s'attendre qu'à de faibles déviations de l'ordre du degré. Rutherford comprit que les fortes déviations n'étaient possibles que si les forces étaient beaucoup plus grandes, ce qui demandait que les charges positives des protons soient concentrées dans une région bien plus petite que celle de l'atome. En s'approchant d'une telle région, les déviations des particules pouvaient en effet être très grandes. En analysant les données, Rutherford découvrit que le rayon du noyau atomique, le lieu de rassemblement des protons et des neutrons, était environ 10^4 fois plus petit que le rayon atomique : l'atome était essentiellement de l'espace vide... (voir exercice 85).

Aux températures terrestres usuelles, les états de la matière se transforment par des réactions chimiques ou par des changements de phase. L'énergie de la combustion du charbon est obtenue par des réarrangements des électrons périphériques des atomes de carbone et d'oxygène qui donnent naissance à des molécules plus stables. Les électrons sont tenus par les forces électromagnétiques et cela ne demande que quelques électrons-volts pour les arracher. Aux très hautes températures des étoiles, ce sont les noyaux atomiques eux-mêmes qui entrent en collision. Le noyau d'un atome est composé de protons et de neutrons rassemblés sous le terme générique de nucléons. Pour contrer la répulsion électrique des protons, les nucléons sont liés entre eux par l'immense force nucléaire forte qui contracte le noyau de rayon 10^{-15} m quand l'atome a une taille de 10^{-10} m. Il faut alors quelques millions d'électrons-volts pour arracher un nucléon d'un noyau. Certains noyaux d'éléments naturels ou synthétisés ne sont pas stables et se désintègrent spontanément, la radioactivité naturelle terrestre en étant un exemple. La fusion de deux noyaux d'hydrogène pour produire de l'hélium est à l'origine de l'énergie solaire. La fission de noyaux d'uranium est la réaction des centrales nucléaires. Les énergies produites lors de la fission ou de la fusion sont le résultat de la différence entre la masse au repos des nucléons participants avant et après la réaction. Les réactions nucléaires mettent en jeu des énergies considérables et on retrouve ce facteur de 10^6 entre l'énergie libérée par 1 kg de charbon et celle libérée par 1 kg d'uranium.

Les particules constitutives du noyau atomique sont les protons et les neutrons dont les caractéristiques sont données dans le tableau 10.13.

Tableau 10.13

	masse au repos m_0 [kg]	masse au repos m_0 [u]	charge électrique q [C]
proton	$m_p = 1,67262 \times 10^{-27}$	$m_p = 1,0072765$	$+e = + 1,6 \times 10^{-19}$
neutron	$m_N = 1,67493 \times 10^{-27}$	$m_N = 1,0086649$	0
électron	$m_E = 9,1094 \times 10^{-31}$	$m_E = 5,486 \times 10^{-4}$	$-e = - 1,6 \times 10^{-19}$

Il est important de noter que les charges du proton et de l'électron sont égales et opposées, sans quoi l'atome ne pourrait pas exister. Par ailleurs les masses du proton et du neutron sont 1 836 et 1 838 fois respectivement plus grandes que la masse de l'électron, de sorte que masse atomique et masse du noyau sont très proches. Ces masses des noyaux ou des nucléons peuvent être déterminées expérimentalement de façon très précise par un spectrographe de masse en observant les déviations de la trajectoire d'une particule soumise à un champ électrique et à un champ magnétique connus.

Mais si les masses des atomes peuvent être comparées entre elles précisément, il est plus difficile de les comparer au kilogramme standard. Pour cette raison on a créé un deuxième standard de masse, la masse de l'atome de carbone $^{12}_6\text{C}$, auquel on a assigné la valeur de 12 unités de masse atomique, notée [u]. La relation entre u et le kilogramme est :

$$1 \text{ u} = 1,6605402 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1/12 \text{ de la masse de l'isotope } ^{12}_6\text{C}$$

Ainsi la masse d'une mole de carbone vaut $N_A \times 12 \times 1,6605402 \times 10^{-24}$ grammes = 12 grammes. Masse atomique en [u] et masse molaire en [gramme] sont donc identiques.

La notation juste utilisée pour le carbone demande explication. Pour caractériser un noyau élémentaire, aussi nommé nuclide, on utilise Z le numéro atomique égal au nombre de protons et A le nombre de masse est égal au nombre total de nucléons (protons + neutrons). La dénomination « nombre de masse » vient de ce que A est la masse du nuclide en unités atomiques u et arrondi à l'entier le plus proche. Par différence, le nombre de neutrons est $N = A - Z$. Le numéro atomique Z définit le nom de l'élément atomique du nuclide E que l'on écrit ^A_ZE . Les isotopes de E sont donc des éléments de même Z ayant des A différents. Ainsi ^1_1H ^2_1H ^3_1H dénotent les isotopes de l'hydrogène, deutérium, tritium respectivement. L'or possède 32 isotopes avec A allant de 173 à 204 dont seul l'élément $^{197}_{79}\text{Au}$ est stable, les 31 autres étant radioactifs.

En chimie, on dit que la masse des réactifs d'une part et l'énergie d'autre part sont conservées chacune séparément, mais Einstein a montré en 1905 que la masse est énergie. La masse transformée en d'autres formes d'énergie dans une réaction chimique est si petite que masse et énergie semblent conservées séparément. Dans les réactions nucléaires qui impliquent des énergies un million de fois plus fortes, le changement de masse peut être mesuré. L'équivalent en énergie d'une masse m est :

$$E_0 = mc^2 \qquad 10-81$$

Dans cette équation la plus connue du monde, E_0 est la masse-énergie ou énergie au repos. En pratique l'unité joule n'est pas utilisée car juste trop grande et on utilise l'électron volt :

$$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

où 1 eV est l'énergie cinétique acquise par un électron initialement au repos sous une différence de potentiel de 1 volt. Pour une masse atomique de 1 u, l'énergie 10-81 correspondante en eV est :

$$E_0 = 1,66 \times 10^{-27} \times (2,9979 \times 10^8)^2 = 1,492 \times 10^{-10} \text{ J} = 931 \text{ MeV}$$

et 10-81 devient dans ces unités :

$$E_0 [\text{MeV}] = 931 \times m [\text{u}]$$

Note :

Si la particule est en mouvement, on montre dans la théorie de la relativité que 10-81 reste correcte quand on remplace la masse au repos par la masse en mouvement m^* :

$$m^* = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

de sorte que l'énergie cinétique relativiste est :

$$E_C = m^* c^2 - mc^2 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

et aux vitesses v faibles devant c , E_C est négligeable devant l'énergie au repos mc^2 .

Bien avant la découverte du noyau, il avait été observé que certains éléments instables se désintégraient en d'autres nuclides en émettant selon les cas un noyau d'hélium ${}^4_2\text{He}$ le rayonnement α , ou un électron le rayonnement β^- , ou encore un rayonnement γ . Lors du processus de désintégration, un noyau instable génère des noyaux fils dans des états excités, avec un excès d'énergie par rapport à leur état naturel nommé « état fondamental ». Les noyaux fils reviennent dans l'état fondamental en émettant des photons gamma. Ainsi, très souvent, une désintégration est aussi accompagnée de rayonnement gamma qui n'est pas dévié par des champs électriques ou magnétiques.

La décroissance d'un échantillon qui contient N_0 nuclides instables est exponentielle :

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

Le temps de demi-vie, le temps auquel $N = N_0/2$, est utilisé pour caractériser la rapidité de la désintégration :

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

La loi de décroissance radioactive de N_0 nuclides instables s'écrit alors :

$$N = N_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$$

La radioactivité naturelle permet de dater. Au moment de leur formation, les roches contiennent le nuclide instable du potassium $^{40}_{19}\text{K}$ qui se désintègre en argon $^{40}_{18}\text{Ar}$ avec une demi-vie $T_{1/2} = 1,25 \times 10^9$ ans. En mesurant le rapport de ces deux nuclides dans une roche, on détermine son âge. De telles mesures pour les plus vieilles roches terrestres, la Lune ou les météorites fournissent l'âge de la Terre, au maximum $4,5 \times 10^9$ ans. Le carbone 14, le nuclide $^{14}_{12}\text{C}$ de demi-vie $T_{1/2} = 5730$ ans est produit à un taux constant dans l'atmosphère par interaction des rayons cosmiques avec l'azote de l'air et il y a typiquement un atome de carbone 14 pour 5×10^{11} atomes de carbone ordinaire (l'espèce stable). Cet isotope se comporte chimiquement comme le carbone ordinaire et les organismes vivants contiennent donc une petite fraction de ce carbone 14. À la mort de l'organisme, l'échange avec l'atmosphère stoppe et le carbone 14 décroît exponentiellement. En mesurant le nombre de noyaux de carbone 14 par gramme de matière organique, on peut ainsi déterminer le temps écoulé après la mort de l'organisme. Le charbon de vieux feux de camp ou encore d'Otzi, le chasseur mort il y a 4 500 ans et retrouvé dans un glacier des Alpes italiennes, ont été datés de cette façon.

10.6.5.2 L'énergie de cohésion des noyaux atomiques

Les forces des charges électriques positives entre protons se repoussant, on doit postuler de nouvelles forces pour assurer la cohésion du noyau, l'hypothèse des forces nucléaires. La stabilité d'un noyau atomique est associée à un défaut de sa masse. On observe en effet que la somme des masses des Z protons et N neutrons pris isolément est plus élevée que la masse m du noyau d'un élément. Le défaut de masse du noyau est défini par :

$$\Delta m = \sum_i m_i - m > 0$$

Pour un élément ^A_ZE , le défaut de masse est :

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_N + Zm_e - m$$

ou

$$\Delta m = Z(m_p - m_N + m_e) + Am_N - m$$

Compte tenu de 10-81, l'énergie du noyau est donc plus faible que celle de ses constituants. L'énergie de cohésion du noyau est définie par :

$$\Delta E_B = \Delta m c^2$$

Si on voulait séparer tous les nucléons du noyau, ΔE_B est l'énergie qu'il faudrait fournir aux nucléons. C'est une mesure de ce qui assure la cohésion du noyau. Une quantité encore plus utile est l'énergie de cohésion par nucléon qui est la mesure de la stabilité d'un noyau :

$$\Delta E_{BN} = \frac{\Delta E_B}{A}$$

Quand ΔE_{BN} est grand, il faut beaucoup d'énergie pour séparer les nucléons. Aston en 1927 mit au point un spectrographe de masse de grande précision qui lui permit de mesurer les masses des noyaux de quelques éléments qui furent complétées par la suite pour produire le tableau 10.14 pour quelques éléments.

Tableau 10.14

Élément	A	ΔE_{B} [MeV]
Deutérium	2	2,23
Hélium	4	28,29
Lithium	7	40,15
Béryllium	9	58,13
Fer	56	492,24
Argent	107	915,23
Iode	127	1 072,53
Plomb	206	1 622,27
Polonium	210	1 645,16
Uranium 235	235	1 783,80
Uranium 238	238	1 801,63

Ce tableau permet de construire la figure 10.44 qui donne ΔE_{BN} en fonction de A.

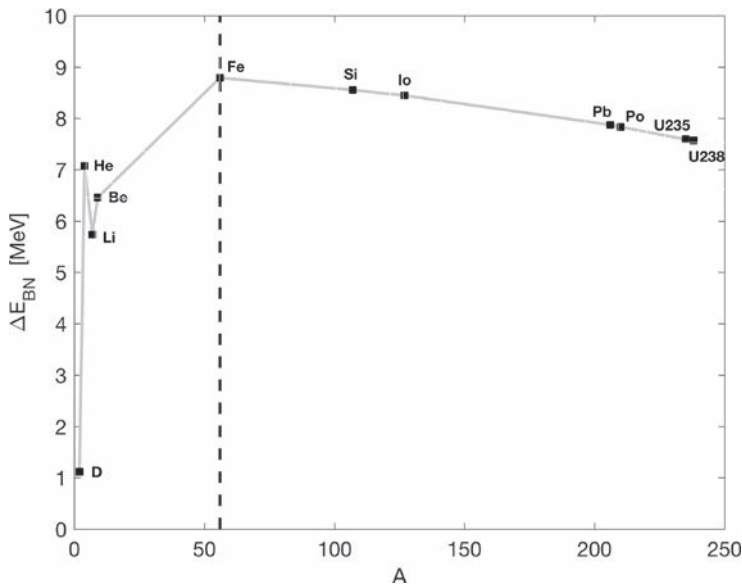


Figure 10.44

La courbe d'Aston tracée pour quelques nucléons donne l'énergie de cohésion par nucléon ΔE_{BN} des divers éléments en fonction du nombre de masse A. La droite en pointillé qui passe par le maximum du $^{56}_{26}\text{Fe}$ sépare le processus de fusion à gauche du processus de fission à droite.

Cette remarquable figure est le pilier de la physique nucléaire, car elle explique la production d'énergie de ces réactions. Elle montre que l'énergie de cohésion par nucléon passe par un maximum pour $^{62}_{28}\text{Ni}$ et $^{56}_{26}\text{Fe}$ (8,79 MeV/nucléon) des éléments proches du fer ordinaire et qui sont donc les noyaux les plus stables. Supposons qu'un noyau à droite du maximum se casse en deux, alors l'énergie de cohésion des deux morceaux sera plus grande que celle du noyau de départ. C'est la réaction de fission de l'uranium ou du plutonium (qui ont des A élevés) qui peut se déclencher par bombardement de neutrons lents et qui est à l'œuvre dans les centrales nucléaires et les bombes atomiques respectivement. À l'inverse, deux noyaux à gauche du maximum auront une énergie de cohésion plus forte s'ils s'assemblent : c'est le processus de fusion à l'œuvre dans le Soleil et les étoiles. Le maximum de la figure 10.44 sépare donc les processus de fusion à gauche des processus de fission à droite. On pense que le noyau terrestre, en dessous de 3 000 km de profondeur, est composé de 80 % de fer et 20 % de nickel, justement des éléments proches du maximum. Le premier réacteur nucléaire basé sur la fission fut construit en 1942 par l'équipe de E. Fermi sous le stade de football de l'université de Chicago.

Considérons un système qui est le siège d'une réaction chimique ou nucléaire, la masse passant de m_I à m_F :

$$E_I \rightarrow E_F$$

$$m_I \rightarrow m_F$$

Le changement d'énergie totale du système s'exprime par la quantité Q :

$$E_{0I} = E_{0F} + Q$$

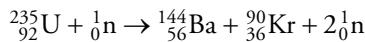
En utilisant 10-81, ceci se réécrit :

$$Q = -\Delta m c^2 \quad \text{avec } \Delta m = m_F - m_I \quad 10-82$$

Si la masse diminue, la réaction libère la quantité d'énergie Q et la réaction est exothermique. Si à l'inverse l'énergie (et la masse) du système augmente, alors Q est négatif : la réaction demande de l'énergie à l'environnement. C'est parce qu'il y a une perte de masse lors d'une fusion ou d'une fission nucléaire, que d'énormes quantités d'énergie peuvent être relâchées.

Exemples :

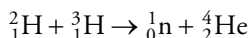
La fission d'un noyau d'uranium dans une centrale nucléaire est provoquée par le bombardement d'un neutron lent qui génère une grande variété de produits. La réaction la plus efficace énergétiquement est :



La réaction conserve le nombre et la charge des nucléons. Mais il y a un déficit de masse et l'énergie de réaction $Q = 200$ MeV est le signe d'une réaction exothermique très énergétique quand on la compare aux 4 eV libérés par la combustion d'un atome de carbone de pétrole fossile. Le nombre de noyaux présents dans un kg d'uranium est $N = N_A/0,235 = 2,56 \times 10^{24}$ de sorte que l'énergie libérée par la

fission d'un kg d'uranium est $Q = N \times 200 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19} = 81,5 \text{ TJ}$ (1 téra-joule = 10^{12} J) ou 22 GWh. On voit que la réaction fournit aussi deux neutrons et ces deux neutrons peuvent à nouveau casser d'autres atomes d'uranium et lancer la réaction en chaîne. La réaction est dite critique si chaque fission entraîne une nouvelle fission. Toute la clé du succès passe par le contrôle de l'énergie de ces neutrons : s'ils en ont trop, la réaction s'emballe et s'ils n'en ont pas assez, elle s'étouffe.

La fusion du deutérium et du tritium, deux isotopes de l'hydrogène, pour fabriquer un noyau d'hélium est la réaction nucléaire du Soleil et des bombes thermonucléaires :



L'énergie dégagée est $Q = 17,6 \text{ MeV}$. L'objet des recherches du projet ITER basé en France est de développer l'ingénierie pour réussir à contrôler cette réaction et en faire un jour la base d'une centrale.

Note :

Le minerai naturel est composé de 0,7 % d'uranium 235 et de 99,3 % d'uranium 238, mais seul l'uranium 235 est fissile. Le processus d'enrichissement utilise les masses différentes des deux isotopes pour les séparer par centrifugeuse. Plusieurs centrifugeuses en cascade sont nécessaires pour atteindre des concentrations de 4 à 5 % en uranium 235 nécessaires pour les réacteurs de deuxième génération (réacteurs à eau sous pression) mis en service entre 1977 et 1999. Le problème est que ces réacteurs ne consomment que 1 % de cet uranium 235... À plus long terme, l'uranium 238 peut être converti en plutonium 239 fissile par bombardement de neutrons rapides, ce qui permettrait de produire beaucoup plus d'énergie. Plusieurs systèmes avec des concepts différents sont en cours d'études avancées, avec l'objectif de consommer le maximum d'uranium 238 et d'améliorer encore la sécurité de ces réacteurs de quatrième génération (voir le Forum international Génération IV de la Nuclear Energy Agency créée sous l'égide de l'OCDE).

10.7 Les conversions d'énergie

En cette époque de réflexions générales sur les sources d'énergie à employer pour assurer un développement durable, à savoir celui qui préserve l'accès à l'énergie des générations futures et stoppe l'augmentation continue de la concentration en gaz à effets de serre, il est urgent de faire le bilan des énergies existantes en évaluant l'efficacité énergétique des conversions, l'aspect durable de leur usage et les conséquences sur l'environnement. Entre la fin du XVIII^e siècle et les années 1950, la consommation mondiale d'énergies fossiles a été multipliée par 8 puis a accéléré, une multiplication par 6 entre 1950 et 2010, soit un doublement tous les 20 ans ou une croissance de 3,6 % par an. Les principaux secteurs utilisateurs se répartissent en quatre grandes masses, le confort thermique des bâtiments, les transports, l'industrie et les conversions d'énergie. Si un être humain a besoin de 100 à 150 W (alimentation) pour fonctionner, ce besoin de pure survie atteint 1 TW pour la

population mondiale, mais la consommation mondiale d'énergie a atteint 18,5 TW en 2017, soit près de 20 fois plus... Elle est très inhomogène : les pays développés à consommations énergétiques abondantes et à faible densité de population (type États-Unis) consomment deux fois plus d'énergie par habitant que l'Europe ou le Japon et huit fois plus que les pays émergents.

10.7.1 Introduction

Tous les appareils demandent une fourniture d'énergie dite primaire qui est convertie en énergie secondaire. Le rendement qui constitue le facteur essentiel, est le rapport entre l'énergie secondaire fournie et l'énergie primaire reçue. Le rendement de quelques appareils courants est donné dans le tableau suivant :

Tableau 10.15

Dispositif	Rendement en %
Générateur électrique	70-90
Moteur électrique	50-90
Moteur thermique (voiture)	20-30
Moteur d'avion	36
Lampe à incandescence	5-20
LED	40-50
Cellule solaire (arséniure de gallium)	> 20
Cellule solaire (silicium)	15
Four domestique à gaz	70-85
Batterie d'accumulateur (système fermé)	72
Pile à combustible hydrogène – oxygène (système ouvert)	40

La conversion de diverses formes d'énergies en énergie électrique disponible aujourd'hui sur le réseau se résume en cinq grandes catégories d'équipement, les centrales thermiques basées sur les réserves fossiles, les centrales nucléaires, les centrales solaires et le photovoltaïque, les barrages hydroélectriques, les éoliennes (ou hydrolennes). D'autres conversions existent mais les ressources sont soit très localisées, soit encore très peu développées. C'est le cas des centrales marémotrices, de l'énergie thermique des mers (OTEC), de la géothermie et de la biomasse. Il est nécessaire de mentionner également le solaire thermique passif et l'aérothermie (les pompes à chaleur) utilisés directement pour le chauffage domestique mais qui évitent la conversion électrique. La plupart des conversions demandent des équipements et des investissements lourds, la production d'énergie étant centralisée.

Les ressources pour le solaire, l'éolien, le chauffage au bois ou encore la géothermie étant par définition décentralisées permettent un usage local évitant les pertes liées aux transports. Les énergies primaires se divisent en deux grandes catégories, les énergies minières limitées par définition et les énergies dites renouvelables. La première loi dit que l'énergie est conservée : elle existe sous différentes formes cinétique-potentielle-thermique-nucléaire-électrique et la première loi dit juste que l'énergie peut passer d'une forme à une autre. Elle ne dit pas du tout que l'énergie est renouvelable. L'usage du mot renouvelable se comprend par deux exemples : que ce soit le flux solaire incident ou le flux géothermique de l'intérieur de la Terre, ces deux énergies viennent de l'extérieur et comme elles sont là pour des centaines de millions d'années, on n'a juste qu'à puiser dedans. Donc une énergie n'est renouvelable que quand elle provient d'un réservoir extérieur immense.

L'intercomparaison de ces sources d'énergie demande au moins quatre informations : 1) une notion de densité d'énergie, l'énergie produite convertie par unité de masse pour les énergies minières ou par unité de surface pour les autres ; 2) la disponibilité géographique de l'énergie ; 3) le rendement évalué en faisant le rapport entre l'énergie électrique produite et l'énergie primaire injectée ; 4) les impacts sur l'environnement devenus aujourd'hui une priorité pour une majorité d'habitants. Bien sûr le coût de chaque énergie est aussi une information importante qui suit en permanence les déséquilibres entre l'offre et la demande, une question d'économie qui ne sera pas abordée ici.

La discussion qui suit et le tableau 10-16 ont été conçus pour rassembler une grande partie de ces informations qui permettent d'éclairer les choix d'énergie. La disponibilité des énergies minières qui dépend des réserves mondiales et dont les prédictions sont couramment revues dans un sens ou dans l'autre ne sont donc données qu'à titre indicatif. L'année 2017 a été choisie comme année nominale. La répartition des énergies primaires est donnée pour la France qui a consommé 529,4 TWh d'électricité en 2017. C'est 2,2 % de la consommation mondiale d'électricité qui était de $23,7 \times 10^3$ TWh.

Ont été également inclus dans ce tableau le solaire thermique et l'aérothermie, des conversions directes pour le chauffage, mais sans production électrique. Les propriétés des énergies primaires du tableau 10-15 sont passées en revue dans les paragraphes suivants.

Mentionnons que le remplacement des sources d'énergie fossile par des énergies propres qui utilisent l'environnement physique (vent, soleil, pluie) fait apparaître une difficulté. L'éolien ou le solaire sont par définition des énergies intermittentes dont la production ne s'adapte pas aux besoins de consommation électrique. Le stockage d'énergie en période de surproduction est devenu aujourd'hui une priorité pour adapter l'offre énergétique à la demande. Selon les constantes de temps du déséquilibre entre l'offre et la demande, l'énergie excédentaire peut être stockée sous forme électrique, mécanique, ou chimique dans des condensateurs, des volants en rotation, des batteries et bien sûr des barrages hydroélectriques fonctionnant en sens inverse. Le Supergrid Institute de Grenoble a été créé récemment pour développer ces solutions de stockage.

Tableau 10.16

Dispositif	Énergie primaire	Dépendances	Part de la production électrique en % France [Monde]	η en %
Centrale thermique à charbon (lignite, anthracite)	Énergie chimique $\Delta_c H = [15, 30] \text{ MJ kg}^{-1}$	Réserve mondiale : $1,0 \times 10^{12}$ tonnes – incertain	1,2 [40,8]	30-40
Centrale thermique au fioul (crude oil)	Énergie chimique $\Delta_c H = 45,5 \text{ MJ kg}^{-1}$	Réserve mondiale : $0,27 \times 10^{12} \text{ m}^3$ – incertain	2 [5,8]	30-40
Centrale thermique à gaz (95 % méthane)	Énergie chimique $\Delta_c H = 54 \text{ MJ kg}^{-1}$	Réserve mondiale : $200 \times 10^{12} \text{ m}^3$ – incertain	7 [20]	50-60
Centrale nucléaire	Énergie nucléaire LWR : $500 \times 10^9 \text{ J kg}^{-1}$	Réserve mondiale : $6,14 \times 10^6$ tonne métal Uranium < USD130/kgU $7,98 \times 10^6$ tonne métal Ur < USD260/kgU – incertain	71,6 [14,7]	30-35
Barrages hydro-électriques	Énergie potentielle	Ruissellement global : $40\,000 \text{ TWh/an}$ Pluviométrie en France : $[0,5, 1,8] \text{ m an}^{-1}$	10,1 [16,4]	90
Solaire photovoltaïque	Énergie radiative Flux solaire au sol en moyenne globale : 160 W m^{-2}	Production mondiale de silicium très pur : $3,2 \text{ Mt/an}$ Basses latitudes favorisées	1,7	15-20
Solaire thermique (panneaux solaires)	Idem ↑	Basses latitudes favorisées	N.A.	N.A.
Bioénergie (déchets, papiers, biogaz, bois)	Énergie chimique $\Delta_c H = [15, 21] \text{ MJ kg}^{-1}$		1,3	30-40
Biomasse (plantations)	Énergie radiative + photosynthèse du maïs + fermentation éthanol $\Delta_c H = 29,7 \text{ MJ kg}^{-1}$	Transformations de surfaces forestières en surfaces agricoles		< 1
Éolienne	Énergie cinétique du vent	$5 \text{ m s}^{-1} < \text{vitesse vent} < 25 \text{ m s}^{-1}$	4,5	10-15
Aérothermie (pompes à chaleur)	Chaleur de l'air extérieur	Aucune	16 TWh/an ou 3 %	N.A.
Géothermie	Énergie thermique du sous-sol	$12,6 \times 10^{24} \text{ MJ}$	0,015 [0,3]	
Usine marémotrice	Énergie potentielle des marées	Résonance des mers côtières	0,1	25
Énergie thermique des mers (OTEC)	25°C en surface, 5°C en profondeur	Régions tropicales	Absence	< 1

Sources : colonne 2 : Engineering Toolbox ; colonne 3 : Nuclear Energy Agency, Encyclopedia Britannica & bp.com ; colonne 4 : edf.fr, iea.org ; colonne 5 : le rendement thermodynamique η , rapport de l'énergie électrique produite à l'énergie primaire consommée. Le site de l'International Energy Agency, iea.org, donne accès aux consommations d'énergie par nature, par pays, par année, etc. Voir aussi le site de l'entreprise yearbook. enerdata.org et le livre de Mosseri et Jeandel, 2013.

10.7.2 Centrales thermiques

Les centrales thermiques forment l'essentiel de la production électrique mondiale. Elles utilisent toutes le principe du moteur thermique et ne diffèrent que par le choix du combustible choisi, charbon, fuel, gaz, nucléaire ou solaire, pour alimenter la source chaude du moteur. L'exemple d'une centrale nucléaire proposé par van Ness (1969) permet d'explorer beaucoup d'aspects du fonctionnement pratique d'une telle installation.

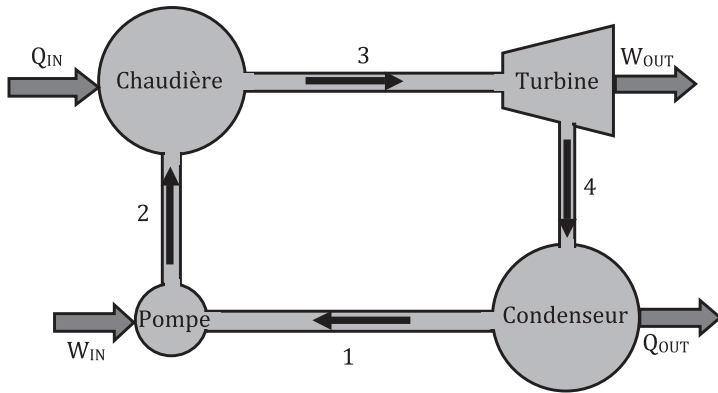


Figure 10.45

La figure illustre le schéma fonctionnel d'une centrale thermique à vapeur basée sur le cycle de Rankine. L'eau liquide ou vapeur est sous pression dans un circuit fermé : il n'y a pas d'échange de masse avec l'extérieur.

La figure 10.45 illustre le cycle de Rankine d'une centrale thermique à vapeur. De l'eau pure se déplace en circuit fermé le long du trajet 1-2-3-4 : elle passe dans des échangeurs de chaleur, chaudière et condenseur respectivement et change de phase au passage. Le circuit d'eau est en phase liquide sur les tronçons 1 et 2 et en phase vapeur sur les tronçons 3 et 4. Des valeurs réalistes de pression et de température sont prises le long du conduit de circulation d'eau. La chaudière est ici un réacteur nucléaire PWR (*Pressurized Water Reactor*) qui fournit 750 MW d'électricité au réseau.

10.7.2.1 Le cycle de Rankine

Il se compose des transformations suivantes :

- 1) Trajet 1-2, compression adiabatique : l'eau liquide à la température $T_C = 311 \text{ K}$ et à la pression $p_C = 0,069 \text{ bar}$ entre dans la pompe et est comprimée pour atteindre la pression élevée de la chaudière $p_H = 72 \text{ bars}$ et sa température a très peu changé puisqu'à ce stade, l'eau est liquide.
- 2) Trajet 2-3, chauffage isobarique dans la chaudière qui comporte 3 étapes : l'eau liquide est portée à son point d'ébullition puis vaporisée à température constante

pour devenir une vapeur saturée. Cette vapeur est finalement surchauffée pour atteindre la température $T_H = 561$ K. Le réacteur nucléaire fournit le transfert de chaleur Q_{IN} à l'eau au travers d'un échangeur thermique.

3) Trajet 3-4, détente adiabatique de la vapeur dans la turbine qui devient une vapeur humide. Les rotations des pales de la turbine fournissent le travail mécanique et un axe tournant entraîne un générateur électrique. Une petite partie de ce travail est aussi utilisée pour faire fonctionner la pompe. La pression de sortie de la turbine est $p_C = 0,069$ bar et la température est à nouveau T_C .

4) Trajet 4-1, condensation de la vapeur de façon isobare et isotherme pour retrouver en sortie l'eau liquide à la température de condensation T_C . La chaleur perdue Q_{OUT} est la chaleur de condensation, évacuée par un échangeur thermique.

Les variations de pression sur le circuit sont source de turbulence, les forces de frottement du fluide dans les tuyaux ne sont pas négligeables et de la chaleur est perdue en différents points par conduction thermique, autant d'éléments qui font que la centrale a un rendement moindre que celui du cycle de Carnot $\eta_C (= 1 - 311/561 = 0,44)$. Supposons que la centrale ait un rendement réel de 0,3, une valeur réaliste. La quantité de chaleur que la chaudière doit fournir à la température T_H (par unité de temps) est $Q_{IN} = 750 \text{ MW}/0,3 = 2\,500 \text{ MW}$. Le condenseur doit alors extraire la quantité $Q_{OUT} = 1\,750 \text{ MW}$.

10.7.2.2 Le dimensionnement de l'installation

Pour avoir une idée des tailles de conduites nécessaires, calculons le débit massique. Sachant que la chaudière fournit la quantité Q_{IN} en joule par seconde, le débit massique dans le tuyau en régime stationnaire est :

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}_{IN}}{L_V} = \frac{2500 \times 10^6}{2552 \times 10^3} = 0,98 \times 10^3 \text{ kg s}^{-1} = 59 \text{ tonnes par minute}$$

où L_V est la chaleur latente de vaporisation de l'eau à la pression p_H et à la température T_H . Il faut avoir recours à des tables de vaporisation de l'eau pour trouver la valeur de $L_V = 2\,552 \text{ kJ kg}^{-1}$ à la température considérée (voir références). Avec ρ la masse volumique, u la vitesse dans le tuyau et A l'aire de la section, le débit massique est :

$$\dot{m} = \rho u A$$

Dans la partie 3 de la figure 10.45, la masse volumique de la vapeur surchauffée est $\rho = 38 \text{ kg m}^{-3}$ et la vitesse u dans cette partie du tuyau est $u = 20 \text{ m s}^{-1}$. On en déduit une section de tube $A = 1,29 \text{ m}^2$, soit un tuyau de 1,28 m de diamètre pour accommoder le débit. En sortie de turbine, après expansion dans la partie 4, la densité de la vapeur a chuté à $\rho = 5,3 \times 10^{-2} \text{ kg m}^{-3}$. De plus fortes vitesses sont possibles dans cette section et $u = 150 \text{ m s}^{-1}$. Pour accommoder le même flux de masse dans cette partie, l'aire du tuyau atteint $A = 124 \text{ m}^2$, soit une conduite carrée de plus de 10 m de côté (en fait plusieurs conduites en parallèle).

10.7.2.3 Le choix des combustibles

Considérons maintenant le besoin en combustible de la chaudière. Pour une centrale nucléaire, on équilibre le besoin Q_{IN} et la réaction 10-81 (toujours par unité de temps) :

$$\dot{Q}_{IN} = \Delta \dot{m} c^2$$

Avec $\dot{Q}_{IN} = 2\,500\text{ MW}$, on obtient $\Delta \dot{m} = 2,8 \times 10^{-8}\text{ kg s}^{-1} = 0,87\text{ kg an}^{-1}$ d'uranium 235. Si la centrale fonctionne au charbon, l'enthalpie de combustion du charbon $\Delta_C H = 30\text{ MJ kg}^{-1}$ permet de trouver la masse utilisée $\frac{\dot{Q}_{IN}}{\Delta_C H} = 83\text{ kg s}^{-1}$ ou 2,6 Mt (million de tonnes) par an pour un charbon de bonne qualité calorifique. Si la centrale est solaire, le flux solaire annuel moyen de 160 W m^{-2} au sol du tableau 10-15 exigerait une surface de captage de $2\,500 \times 10^6 / 160$, soit environ 15 km^2 . Clairement les centrales solaires ne peuvent pas accommoder cette concentration de puissance. Par essence le solaire est une énergie de faible densité qu'il faut plutôt utiliser localement.

10.7.2.4 Les impacts sur l'environnement

Les impacts sur l'environnement ne sont que la conséquence de la croissance de l'entropie qui accompagne nécessairement la production d'une énergie électrique ordonnée. Les impacts d'une centrale thermique sont de deux sortes, les rejets thermiques et les rejets chimiques (la dispersion des molécules de la réaction chimique du combustible initial dans l'atmosphère).

Rejets thermiques

Le premier impact à considérer est évidemment la chaleur $Q_{OUT} = 1\,750\text{ MW}$ rejetée par la centrale, et ce, quel que soit le combustible en entrée. Supposons que l'eau de refroidissement de l'échangeur soit prise dans un fleuve de débit volumique D à la température T_{ENV} . Pour extraire la chaleur Q_{OUT} dans l'échangeur, le débit d'eau dans l'échangeur D_{ECH} doit être tel que :

$$\dot{Q}_{OUT} = \rho D_{ECH} C_p (T_C - T_{ENV})$$

Avec C_p la chaleur spécifique de l'eau, $T_C = 311\text{ K}$ et $T_{ENV} = 288\text{ K}$ ($15\text{ }^\circ\text{C}$), on trouve le débit volumique $D_{ECH} = 18\text{ m}^3\text{ s}^{-1}$. Cette eau pompée à la température T_{ENV} est ensuite rejetée dans le fleuve à la température T_C . Pour savoir de combien la température de l'eau du fleuve va augmenter en aval de la centrale, on écrit simplement :

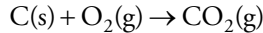
$$\dot{Q}_{OUT} = \rho D C_p \Delta T_{POL}$$

Dans cette dernière relation, le fleuve entier de débit volumique D fait office d'échangeur. Avec le débit typique de la Seine, $D = 500\text{ m}^3\text{ s}^{-1}$, on trouve une pollution thermique $\Delta T_{POL} = 0,83\text{ }^\circ\text{C}$ qui reste acceptable. En période d'étiage, le

problème peut devenir plus sérieux. C'est évidemment dommage de se priver de toute cette énergie thermique et les centrales dites de cogénération la récupèrent pour satisfaire des besoins de chauffage locaux.

Rejets chimiques

Le charbon contient 2,5 % de soufre qui se transforme en dioxyde de soufre après combustion, une émission à l'origine des pluies acides et de leur impact sur les forêts. Le problème majeur pour le climat est bien sûr l'émission de CO_2 , le gaz à effet de serre dont la concentration dans l'atmosphère est passée de 280 ppmv à l'aube de la révolution industrielle à 405 ppmv en 2017 par la consommation des énergies fossiles (1 ppmv = partie par million par volume). La physique radiative de Planck montre qu'il s'avère être la cause initiale du déséquilibre climatique global décelé actuellement. L'émission de CO_2 par la centrale thermique de la figure 10.45 fonctionnant au charbon peut être calculée par la réaction de combustion du carbone :



Cette réaction chimique montre qu'une mole de carbone C produit une mole de CO_2 , de sorte que si n est le nombre de moles et M la masse molaire, on a :

$$n_{\text{C}} = \frac{m_{\text{C}}}{M_{\text{C}}} = n_{\text{CO}_2} = \frac{m_{\text{CO}_2}}{M_{\text{CO}_2}}$$

La masse de CO_2 émise lors de la combustion d'une masse de carbone est donc :

$$m_{\text{CO}_2} = \frac{M_{\text{CO}_2}}{M_{\text{C}}} m_{\text{C}} = \frac{44}{12} m_{\text{C}} \approx 3,66 m_{\text{C}}$$

Avec la masse annuelle de carbone consommé calculée plus haut $m_{\text{c}} = 2,6 \times 10^9 \text{ kg an}^{-1}$, l'émission de cette centrale produit donc 9,5 Mt de CO_2 par an. La fermeture d'une centrale nucléaire comme Fessenheim (900 MW) et son remplacement par une centrale à charbon européenne conduit à une émission de CO_2 du même ordre de grandeur que celle-ci. Le captage du CO_2 en sortie des centrales à charbon est une solution qui fait l'objet de nombreuses recherches actuelles.

Notons aussi que la combustion thermique consomme l'oxygène atmosphérique. On est passé d'une perte d'oxygène de 2 Gt par an en 1900 à 38,2 Gt par an en 2015.

Hors accident, le fonctionnement d'une centrale nucléaire n'entraîne pas de pollution chimique atmosphérique. Mais comme la catastrophe de Fukushima (2011) l'a montré, un site nucléaire doit être choisi dans une région sans risques sismiques proches ou lointains (le risque de tsunamis en cas de proximité de la mer). L'erreur humaine est évidemment possible (Tchernobyl, 1986). Les impacts du nucléaire résident dans la construction de la centrale elle-même, un immense chantier, gros consommateur de ciment, dans son démantèlement en fin de vie et dans le recyclage des déchets radioactifs qui reste un problème majeur.

10.7.3 La géothermie

L'intérieur de la Terre dépasse les 5 000 °C et le flux thermique à sa surface atteint 46 TW. On estime que 60 % de ce flux est dû aux désintégrations radioactives des éléments naturels, uranium, thorium et potassium $^{238}_{92}\text{U}$, $^{235}_{92}\text{U}$, $^{232}_{90}\text{Th}$, $^{40}_{19}\text{K}$ présents dans le manteau et la croûte terrestre et le reste au refroidissement de la Terre par conduction thermique. Le gradient géothermique moyen est de l'ordre de 25-30 °C par km, mais peut être beaucoup plus élevé dans les zones volcaniques ou dans les régions de création de dorsales. Il existe deux exploitations possibles de production de chaleur, l'une directe par forage des aquifères du sous-sol à des températures de 30 à 120 °C pour chauffer des bâtiments, l'autre par l'utilisation de pompes à chaleur pour exploiter les profondeurs entre 0 et 300 m. La production d'électricité utilise la vapeur extraite directement du sous-sol (les geysers) ou d'aquifères à haute température pour alimenter les alternateurs. La production électrique était de 67 TWh/an en 2010, mais un potentiel bien supérieur existe. Notons également que le sous-sol peut aussi faire office de zone de stockage d'énergie excédentaire.

10.7.4 OTEC : Ocean Thermal Energy Conversion

Bien que cette source d'énergie océanique n'en soit restée qu'à des essais de démonstration, c'est l'endroit pour en dire quelques mots puisqu'il s'agit bien d'un procédé de centrale thermique. L'océan chauffé par le soleil en surface possède une couche d'eau chaude d'une centaine de mètres qui peut dépasser 25 °C dans les régions tropicales. En revanche, l'eau de fond formée par convection dans les régions polaires a des températures qui sont plus proches de la température de congélation (0 °C à 2 °C). L'océan fournit donc deux immenses réservoirs qui pourraient constituer la source et le puits d'une machine thermique. Le rendement de Carnot basé sur une température de surface de 25 °C et une de 5 °C vers 1 000 m n'est certes que de 6,7 %, mais la ressource semble énorme et l'idée n'avait pas échappé à Jules Verne qui la mentionne dans *Vingt mille lieues sous les mers* en 1870. D'Arsonval proposa peu après d'utiliser un circuit fermé d'ammoniac semblable au cycle de Rankine de la figure 10.45. De la vapeur d'ammoniac sous pression est produite au niveau de l'échangeur chaud, vapeur qui est ensuite utilisée pour agir sur une turbine puis re-condensée au niveau de l'échangeur d'eau froide. Le concept fut testé en 1979 sur une centrale installée sur une barge près d'Hawaï fournissant 18 kW d'électricité pendant quelques mois. Georges Claude (1930), celui qui inventa une méthode de liquéfaction des gaz, choisit un cycle ouvert, l'eau de mer devenant elle-même le fluide de travail. Les étapes principales d'un cycle OTEC ouvert sont les suivantes :

- (i) Évaporation de l'eau chaude dite « *flash* » par réduction de sa pression en dessous de la pression de vapeur saturante.
- (ii) Expansion de la vapeur à travers une turbine pour fournir l'électricité.

(iii) Condensation par échange de la chaleur avec l'eau froide. L'évaporateur, la turbine et le condenseur fonctionnent avec des pressions faibles de l'ordre de 1 à 3 % de la pression atmosphérique. L'eau de mer contient aussi des gaz dissous O_2 , N_2 et CO_2 qui ne sont pas condensables et dont il faut se débarrasser à la pression atmosphérique. À l'étape de condensation, notez que l'on récupère en plus une eau potable débarrassée de son sel, ce qui est un avantage appréciable.

Georges Claude ne réussit pas la partie technique, la plus grande difficulté étant de disposer de tuyaux de taille suffisante pour pomper l'eau froide en mer de 1 000 m jusqu'en surface. Plusieurs des difficultés techniques ont été résolues depuis et une centrale de 210 kW fut construite selon le concept de Georges Claude à Hawaï et opéra avec succès sous le leadership de L.A. Vega de 1993 à 1998, la plus grosse opération OTEC connue à ce jour. La puissance de ces essais reste néanmoins de deux ordres de grandeur inférieurs à la taille souhaitable pour une commercialisation compétitive. Les petites centrales continuent d'être étudiées comme solution propre pour l'alimentation d'îles tropicales. Les lecteurs intéressés pourront consulter la revue de L.A. Vega, 1999.

10.7.5 Éoliennes

Cette énergie a une longue histoire : les moulins en Perse remontent à la deuxième moitié du premier millénaire et leur développement au Moyen Âge est important. Certains de la ville de Nashtifan dans l'est de l'Iran, balayée par des vents du nord violents, fonctionnent encore. Déjà à ces époques on trouve les deux techniques d'ailes de moulins assemblées autour d'un axe de rotation vertical ou horizontal. Leur développement actuel a coïncidé avec la crise de l'OPEP des années 1970 avec des progrès indéniables : amélioration de l'indépendance énergétique, arrêt des pollutions environnementales des centrales à charbon, connexion au réseau électrique. Les cinq pays en pointe actuellement sont les États-Unis, la Chine, l'Allemagne, l'Espagne et l'Inde. On est passé d'éoliennes de 25 kW de puissance avec des diamètres de rotor de 10 m à des éoliennes de 6 MW et des diamètres de rotor de plus de 120 m. Le standard aujourd'hui est une machine à axe horizontal équipée de trois pales au sommet d'une tour de 130 m au moins. Le Danemark est devenu l'un des leaders de cette technologie (*Danish Wind Industry Association*). Cette énergie a un coût compétitif dans les régions avec de bonnes ressources de vent. À titre d'exemple, la production a été mesurée sur l'éolienne de 100 kW installée en 2010 près de l'école sur l'île de Nantucket (au sud-est de Boston). La production électrique annuelle atteint 200 MWh avec les variations saisonnières suivantes, 20 MWh par mois d'octobre à avril, avec un minimum de 7 MWh par mois en août (voir le détail sur www.ackenergy.org/nhs-wind-turbine.html). On en déduit que l'éolienne travaille à la puissance moyenne de 28 kW en hiver, soit le quart de sa puissance nominale de 100 kW (atteinte pour un vent maximum acceptable de $15,2 \text{ m s}^{-1}$) et chute à 9,7 kW en août, seulement 10 % du nominal. L'intermittence du vent joue donc un grand rôle, mais à la différence du solaire, la ressource en vent ne montre pas de différences importantes entre le jour et la nuit.

L'équation fondamentale des éoliennes

Il s'agit ici de trouver comment l'énergie cinétique du vent peut être convertie en énergie cinétique de rotation des ailes couplée à un générateur électrique.

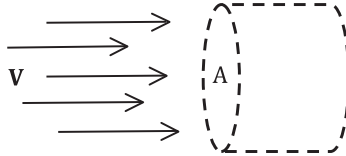


Figure 10.46

De l'air de vitesse V entre dans un volume de contrôle de section A perpendiculaire au vent.

L'énergie cinétique d'une particule de vent de masse m est :

$$E_C = \frac{1}{2} m V^2$$

Calculons la masse d'air Δm qui franchit la surface A perpendiculaire au vent pendant le temps Δt sur la figure 10.46. Elle occupe le petit volume de contrôle de surface A et de longueur $V\Delta t$ dont la masse est :

$$\Delta m = \rho A V \Delta t$$

Quand Δt tend vers zéro, on retrouve le débit massique :

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \rho A V$$

La puissance P_W est la variation d'énergie cinétique par unité de temps :

$$P_W = \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} V^2 = \frac{1}{2} \rho A V^3$$

L'éolienne n'extrait qu'une fraction de la puissance du vent et on exprime sa puissance par : $P_E = C_P P_W$ où C_P est le coefficient de puissance de l'éolienne. La puissance extraite du vent est alors :

$$P_E = \frac{1}{2} \rho A C_P V^3 \quad 10-83$$

La limite de Betz est la valeur théorique maximale $C_P|_{MAX} = 16/27 = 59\%$ dont la détermination est une belle application du théorème de l'énergie cinétique, l'objet de l'exercice 80. La perte est due au fait qu'une fraction significative de la vitesse de l'air et donc de l'énergie cinétique reste présente en aval de l'éolienne. La relation 10-83 montre la dépendance forte au vent avec cette loi en V^3 et l'importance de la taille à travers la surface d'air interceptée A . Ne reste plus

que l'amélioration de la partie aérodynamique du C_p où l'on retrouve les mêmes problèmes que pour les coefficients de portance des ailes. Pour garder une portance optimale, l'angle d'incidence varie le long de la pale, grand près de l'axe de rotation où les vitesses sont faibles, faible en bout de pale où les vitesses sont maximales. Avec un bon design, C_p peut atteindre 60 à 80 % de la limite de Betz, soit C_p compris entre 35 et 45 %. Attention, C_p n'est pas le rendement de l'installation car il reste la transformation de l'énergie mécanique en électricité dans le générateur, mais les générateurs actuels ont d'excellents rendements. Le problème majeur des éoliennes est l'intermittence du vent qui change en permanence dans les régions tempérées à cause de la turbulence associée aux dépressions des moyennes latitudes. La puissance nominale n'est en fait atteinte que pour des vitesses de vent dans une gamme étroite, supérieures à 5 ms^{-1} et inférieures à 25 ms^{-1} (vitesse à laquelle l'éolienne est arrêtée par sécurité). Pour juger de la production annuelle d'électricité, on introduit le facteur de capacité C_F qui est la puissance électrique moyenne mesurée sur un an divisée par la puissance nominale P_E . Une étude de site préalable demande d'obtenir la distribution de probabilité (l'histogramme) des vitesses de vent observées sur un an puisque cette distribution a une conséquence directe sur la valeur de C_F . Un bon site a un facteur de capacité $C_F \approx 0,3$. Passer de l'énergie cinétique du vent à une production d'électricité moyenne se fait donc avec un rendement global $\eta = C_p C_F$ autour de 10 %-15 %. Attention, les rendements souvent cités de la filière éolienne ne prennent pas en compte le rendement aérodynamique mais seulement ce facteur de capacité C_F .

10.7.6 Centrales hydroélectriques

L'énergie hydroélectrique est l'une des plus propres en opération mais son installation demande des travaux de construction gigantesques, des changements d'usage des sols, des déplacements de population (par exemple le village de Tignes). Les impacts d'exploitation concernent essentiellement l'écologie des rivières. La continuité du fonctionnement est entièrement dépendante des précipitations (pluie et neige) sur les bassins versants qui alimentent le réservoir en amont du barrage et de l'évaporation sur le réservoir. Environ 20 % de la production électrique mondiale est assurée par ces centrales. Des pays comme la Norvège, le Brésil et le Québec produisent plus de 90 % de leur électricité de cette façon. Au Québec, 57 centrales hydroélectriques représentent une puissance installée de 40 GW pour une production électrique annuelle de 180 TWh.

L'équation fondamentale des centrales hydrauliques

La physique est assez simple : la perte d'énergie potentielle se traduit par un gain d'énergie cinétique dans la chute qui est récupérée pour faire tourner une turbine qui entraîne un générateur électrique. La puissance que l'on peut obtenir est donc sensiblement égale à la variation d'énergie potentielle par unité de temps.

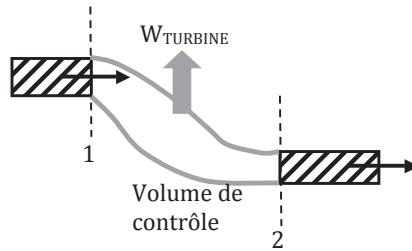


Figure 10.47

Le système est constitué de la région en gris sur la figure qui comprend la turbine. Ce système ouvert reçoit de la masse et de l'énergie à la section 1 en haut et en perd à la section 2 en bas.

La figure 10.47 illustre un volume de contrôle en gris limité par la section 1 en amont et la section 2 en aval. Ce volume de contrôle définit le système, mais la nouveauté ici est que ce système est ouvert aux échanges avec l'extérieur : de la masse et de l'énergie entrent en 1 et ressortent en 2. Une turbine permet d'extraire le travail fourni par le système. On va supposer qu'il n'y a pas de variations de température et que le fluide, l'eau, est incompressible. Il n'y a donc ni transfert de chaleur, ni travail d'expansion et il n'y a donc pas lieu d'introduire l'énergie interne puisqu'elle est constante sous ces hypothèses. La masse qui entre en 1 pendant le temps Δt est $\Delta m = \dot{m} \Delta t$ avec \dot{m} le débit massique et cette même quantité sort à la section 2. Le théorème de l'énergie cinétique s'applique et donc pendant le temps Δt le travail W_{TURBINE} fait sur le système est égal à la variation d'énergie aux frontières 1 et 2 :

$$W_{\text{TURBINE}} = \frac{1}{2} \Delta m V_2^2 + \Delta m g z_2 - \frac{1}{2} \Delta m V_1^2 - \Delta m g z_1$$

en divisant par Δt et en prenant la limite, la puissance fournie à la turbine est :

$$P_{\text{TURBINE}} = \dot{m} \left[g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2) \right]$$

C'est essentiellement le premier terme de variation d'énergie potentielle qui est important ici, car la vitesse en amont dans le lac de retenue est faible et l'énergie cinétique en aval a fortement chuté après le passage de l'eau dans la turbine :

$$P_{\text{TURBINE}} \approx \dot{m} g(z_2 - z_1) = D \rho g(z_2 - z_1) \quad 10-84$$

Comme $z_1 > z_2$, l'énergie sortante est plus faible que l'énergie entrante, P_{TURBINE} est donc négatif et le système fournit du travail sur l'environnement par l'intermédiaire de la turbine. La conversion en puissance électrique au travers d'un générateur se fait avec un rendement élevé typiquement 0,9. La seconde expression fait intervenir le débit volumique $D = \dot{m}/\rho$. La puissance électrique de l'installation dépend donc du produit de la hauteur de chute et du débit dans l'installation. Il en résulte deux types d'installation, celle de montagne avec une forte hauteur de chute sur la

hauteur du barrage et celle de plaine où la hauteur de chute est faible, mais le débit peut être important si l'on intercepte une rivière sur une grande largeur. La difficulté reste la prédiction du débit qui dépend lui-même de la hauteur de chute, de la largeur des canaux de transfert et des forces de frottement du fluide importantes sur les parois et toujours difficiles à calculer. D'un point de vue purement dimensionnel, si on admet que la vitesse V dépend de la hauteur de chute $Z = z_1 - z_2$ et de g , on trouve que V varie comme $\propto Z^{1/2}$ précisément comme dans la formule de Torricelli du § 9.5.1.1. Dans ce cas la puissance varie comme $\propto Z^{5/2}$. Un cas que l'on peut calculer facilement est celui d'une rivière de profondeur uniforme, en pente douce et en écoulement permanent (indépendant du temps). Dans ce cas la force de gravité est équilibrée par la force de frottement au fond, de la forme déjà rencontrée pour la traînée des ailes d'avion au § 9.5.1.2.

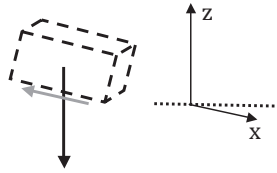


Figure 10.48

La figure montre un volume de contrôle d'une rivière de profondeur uniforme, en pente douce dans la direction x . L'axe z est selon la direction verticale vers le haut. Les flèches (noire, grise) indiquent respectivement le poids du volume de contrôle et la force de frottement exercée par le lit de la rivière.

L'équilibre des forces dans la direction x sur la masse de rivière contenue dans le volume de contrôle $\Delta x/h$ avec l la largeur, h la profondeur et Δx un élément de longueur est :

$$\rho g \sin \theta (h/\Delta x) = \rho C_D V^2 (l/\Delta x)$$

avec θ l'angle entre la direction x du flot et l'horizontale. La force de gravité est proportionnelle au volume tandis que la force de frottement au fond proportionnelle à la surface du fond $l/\Delta x$ avec un coefficient de traînée empirique C_D . Après simplifications, on trouve la vitesse V et le débit volumique D :

$$V = \left(\frac{gh \sin \theta}{C_D} \right)^{1/2}$$

$$D = l h^{3/2} \left(\frac{g \sin \theta}{C_D} \right)^{1/2}$$

Ces relations de Chézy requièrent la connaissance du coefficient de traînée C_D . Selon la nature du fond, plus ou moins rugueux, C_D peut varier d'un ordre de grandeur de 0,004 à 0,03.

10.7.7 Centrales marémotrices

Une centrale marémotrice comme celle de la Rance fonctionne selon le même principe qu'une centrale hydroélectrique à ceci près que la différence de niveau change alternativement toutes les six heures entre marées hautes et marées basses. Les turbines ont donc été spécialement étudiées pour pouvoir travailler en flot montant et en flot descendant. En pratique pourtant 90 % de la production se fait en mode descendant. La puissance nominale de la centrale de la Rance est de 240 MW (10 groupes de 24 MW). Elle fonctionne avec un débit fort (maximum de $6\,600\text{ m}^3\text{ s}^{-1}$) et une hauteur de chute faible (maximum de 13,5 m en marées de vives eaux). Elle fournit de l'ordre de 550 GWh par an au réseau électrique. Un tiers de la consommation électrique de l'île de Guernesey est ainsi assuré par un câble sous-marin depuis la centrale de la Rance. Si la puissance nominale de 240 MW était utilisée 24 heures sur 24, la production annuelle d'énergie serait de $240 \times 24 \times 365,25 = 2\,104\text{ GWh}$. En divisant la production effective par cette production nominale, on obtient un rendement de 26 % significativement plus faible que pour un barrage hydroélectrique à cause du caractère oscillant de la dénivellation et du débit.

10.7.8 Biomasse

L'énergie stockée dans le sol lors d'une excellente récolte (l'énergie de la biomasse) ne représente guère que 1 % de l'énergie solaire annuelle reçue. Plusieurs causes expliquent cette différence entre le rendement maximal de la réaction de photosynthèse η_{PHOTO} et ce pourcentage très faible d'énergie solaire stockée dans le sol par la biomasse : les plantes ne sont sensibles qu'à certaines longueurs d'onde et n'absorbent qu'une fraction de l'énergie solaire. De plus le processus sature quand le rayonnement solaire est trop intense. Finalement le processus fournit l'énergie du métabolisme de la plante, l'import des minéraux du sol par les racines, la respiration cellulaire et les processus d'évapotranspiration de l'eau, la réplication de l'ADN... Donc la photosynthèse ne se réduit pas à synthétiser de la biomasse. Si on veut utiliser cette biomasse comme énergie, le processus pour la créer est donc faible, de l'ordre de 0,6 W par mètre carré de surface cultivée. Si on la rapporte au flux solaire moyen de 160 W m^{-2} reçu au sol, le rendement effectif pour fabriquer cette énergie de biomasse n'est donc plus que de 0,4 %. En régime stationnaire les arbres croissent en consommant du CO_2 puis meurent et la dégradation organique dans le sol libère le CO_2 (et de la vapeur d'eau). C'est exactement la même chose si le bois est utilisé pour se chauffer plutôt que de l'abandonner à la décomposition dans un sous-bois. S'il est utilisé pour la construction, le bilan est meilleur puisque le carbone est alors stocké sur une longue période. Puisque la photosynthèse absorbe autant de CO_2 que la consommation n'en rejette, l'idée de planter est attractive, car le bilan en CO_2 est alors nul. Ainsi des biofuels à l'éthanol constituent déjà quelque % des consommations des moteurs automobiles aux États-Unis. La réaction est une fermentation au cours de laquelle bactéries et levures permettent de métaboliser le

sucres des plantes. Deux difficultés apparaissent pourtant immédiatement. La première est qu'augmenter les surfaces cultivables pour cette application demandera inmanquablement de réduire encore l'espace des forêts naturelles. Cette déforestation d'installation augmentera les émissions de CO_2 et aura des impacts négatifs sur la biodiversité et sur les écosystèmes. La deuxième est liée à l'usage des fertilisants et pesticides pour la culture dont la production demande beaucoup d'énergie et dont l'impact sur la biodiversité devient problématique. Si l'électricité utilisée pour la production agricole vient d'une centrale thermique à énergie fossile, il est indispensable de faire le bilan net entre l'énergie fossile consommée pour produire cette énergie naturelle (en incluant la consommation en carburant de l'exploitation agricole) et l'énergie fossile économisée par l'usage de ces biofuels.

10.7.9 *Le solaire*

Le solaire dit passif est largement utilisé et depuis longtemps pour le chauffage domestique. Le four solaire d'Odeillo dans les Pyrénées est un dispositif expérimental qui permet d'obtenir de très hautes températures grâce à une dizaine de milliers de miroirs qui renvoient les rayons réfléchis sur un récepteur parabolique, le matériau à exposer se trouvant au foyer. Des températures de $3\,500\text{ }^\circ\text{C}$ peuvent être obtenues, la puissance du four pouvant atteindre $3,2\text{ MW}$. Une centrale solaire traditionnelle fonctionne comme une centrale thermique du § 10.7.2, la source d'énergie de la chaudière permettant de générer la vapeur provenant de miroirs concentrant l'énergie solaire. La centrale Noor I de 510 MW construite près de Ouarzazate au Maroc fonctionne sur ce principe. Elle comporte $500\,000$ miroirs répartis sur une surface de 450 hectares.

Mentionnons aussi les expériences de tours solaires, des centrales solaires à effet de cheminée (*solar updraft towers*) constituées d'une grande serre de captage d'air chaud au sol et d'une tour très haute permettant d'évacuer la chaleur en altitude à la température la plus basse possible. L'énergie cinétique du flux d'air ascendant (un thermique convectif) est captée par une turbine classique. Une telle centrale de 50 kW de puissance (avec une tour de 194 m) a été construite à Manzanares en Espagne en 1981 et a pu fonctionner pendant 7 ans avant d'être détruite par une tempête.

Finalement les étangs solaires (*solar ponds*) sont des sources de chauffage très simples. L'eau est chauffée par rayonnement solaire, mais pour éviter la perte par convection thermique à la surface de l'étang, on crée une stratification en sel : avec une salinité qui augmente en profondeur, la densité reste faible en surface et forte en profondeur et les particules chaudes du fond sont incapables de monter car juste trop denses (à cause de la salinité), et la convection thermique dans l'étang est inhibée. Un circuit secondaire au fond de l'étang joue le rôle d'échangeur pour récupérer l'énergie thermique.

Le solaire photovoltaïque est lié à la découverte des semi-conducteurs. Un métal comme le cuivre est un bon conducteur car ses électrons libres peuvent se déplacer librement dans le métal. À l'inverse dans un isolant les électrons sont fortement

localisés auprès des atomes. Un semiconducteur comme le silicium est intermédiaire entre les deux, puisqu'en fonction de l'augmentation de sa température, sa conductivité augmente considérablement. Ayant des caractéristiques d'isolant à basse température, il devient conducteur à haute température. Une radiation d'énergie $h\nu$ suffisamment grande (dans le spectre visible) peut permettre aux électrons initialement localisés auprès des atomes de devenir des électrons mobiles. Une fois mobile, l'électron laisse un trou vide chargé positivement. Soumis à un champ électrique, l'électron et le trou se déplacent en sens inverse. Une cellule photovoltaïque possède un champ électrique qui collecte les électrons sur une électrode et les trous sur l'autre, fournissant une différence de potentiel entre ces deux électrodes pouvant servir de batterie solaire et générer un courant électrique si branché à l'extérieur. La conversion d'énergie solaire en électricité peut atteindre un rendement de 20 % pour des cellules au silicium. L'avantage bien sûr par rapport à une centrale thermique solaire est de ne nécessiter aucune concentration d'énergie solaire. La technologie fut développée au départ pour l'industrie spatiale qui utilise d'ailleurs maintenant des semiconducteurs d'arséniure de gallium permettant des rendements de 30 %. Le solaire photovoltaïque est maintenant entré dans une phase commerciale intense et c'est l'une des énergies renouvelables dont la puissance installée augmente le plus fortement. Le silicium constitue 25 % de la croûte terrestre, le deuxième élément le plus abondant après l'oxygène. Le minerai de départ est la silice SiO_2 présente dans le quartz. Le silicium est utilisé dans les alliages d'aluminium, pour fabriquer le silicone, pour le solaire et pour la microélectronique (qui requiert le niveau de pureté maximal). Le degré de pureté qu'il faut atteindre pour l'usage photoélectrique du silicium atteint moins d'une partie par million. La chimie de ce raffinage pour faire fondre, purifier et cristalliser le silicium est énergivore et produit donc du CO_2 . En 2017, la production mondiale de ce qu'on appelle un polysilicium était de 3,2 Mt, la Chine en produisant 71 % et la France 3 % (voir le site www.mineral.info.fr).

10.7.10 *Le système thermodynamique mondial*

En 2021, 7,9 milliards d'habitants de notre planète utilisent de l'énergie pour répondre à leurs besoins, qu'ils soient vitaux, de service, de transport, de confort, voire de simple satisfaction personnelle. La question abordée ici est d'identifier les dépenses globales d'énergie de cette population et d'en trouver les impacts. En se focalisant sur la seule production d'électricité, on va donc considérer l'ensemble des systèmes thermodynamiques qui produisent le travail ordonné pour ces quelques 7,5 milliards d'habitants de l'année 2017, une année normale dont les chiffres sont disponibles.

10.7.10.1 Le rendement global annuel

L'électricité mondiale consommée était de $23,7 \times 10^3$ TWh en 2017 qui est l'équivalent du travail produit W_{OUT} . Le site de l'IEA (International Energy Agency) donne la valeur de l'énergie primaire utilisée cette année-là, à savoir 13,95 Gtoe.

Un toe (*ton oil equivalent*) est l'énergie fournie en brûlant une tonne de pétrole brut. Elle sert de standard en économie pour comparer diverses sources d'énergie et $1 \text{ Mtoe} = 4,1868 \times 10^{16} \text{ J}$. L'énergie primaire Q_{IN} apportée au système est donc $Q_{\text{IN}} = 13,95 \times 10^3 \times 4,1868 \times 10^{16} = 5,84 \times 10^{20} \text{ J}$. En divisant par l'année, on obtient une puissance moyenne de 18,5 TW qui est le chiffre cité dans l'introduction. Le rendement moyen de la transformation, le rapport énergie électrique sur énergie primaire est après conversion en joule :

$$\eta_{\text{HUM}} = \frac{23,7 \times 10^{15} \text{ Wh}}{13,95 \times 10^3 \text{ Mtoe}} \times \frac{3600 \text{ s}}{4,18 \times 10^{16} \text{ J/Mtoe}} = 14,6\%$$

Le rendement global moyen est assez faible mais cache de grandes disparités (voir la colonne 5 du tableau 10-15). Il permet de calculer l'énergie thermique Q_{OUT} transférée à l'environnement :

$$W_{\text{OUT}} = 8,53 \times 10^{19} \text{ J}$$

$$Q_{\text{IN}} = 5,84 \times 10^{20} \text{ J}$$

$$Q_{\text{OUT}} = \left(\frac{1 - \eta_{\text{HUM}}}{\eta_{\text{HUM}}} \right) W_{\text{OUT}} = 5,85 \times W_{\text{OUT}} = 4,99 \times 10^{20} \text{ J}$$

Sur les $5,84 \times 10^{20} \text{ J}$ d'énergie primaire consommée par l'humanité en 2017, 85 % sont donc perdus dans les conversions énergétiques et transférées à l'environnement sous forme de chaleur. Q_{OUT} représente près de six fois l'énergie électrique utilisée, ce qui donne une idée du gaspillage. Pour mettre Q_{OUT} en perspective, calculons l'énergie solaire Q_{SOL} reçue au sol en un an. En multipliant le flux solaire moyen reçu au sol (160 Wm^{-2}) par la surface de la terre et le nombre de secondes dans l'année, on obtient :

$$Q_{\text{SOL}} = 160 \times (5,1 \times 10^{14} \text{ m}^2) \times (3,15 \times 10^7 \text{ s}) = 2,57 \times 10^{24} \text{ J}$$

Les impacts environnementaux de l'énergie Q_{OUT} transférée à l'environnement ne représentent que 0,019 % de Q_{SOL} . Ces rejets de chaleur sont faibles mais malgré tout mesurables dans les îlots urbains. Le besoin de l'humanité en énergie primaire Q_{IN} ne représente qu'une très faible fraction, 0,022 %, de l'énergie solaire reçue en un an sur la planète. Atmosphère et océans en utilisent évidemment beaucoup plus. La conclusion est que le Soleil fournit à la Terre un immense réservoir d'énergie renouvelable de haute qualité qui peut aisément satisfaire les besoins de l'humanité.

10.7.10.2 Émissions de CO₂ et réchauffement global

L'autre impact environnemental des transformations d'énergie concerne les rejets chimiques. Les centrales thermiques basées sur les fuels fossiles rejettent du dioxyde de soufre SO₂, des oxydes d'azote NO_x et bien sûr du CO₂. Les deux premiers sont à l'origine des pluies acides (acide sulfurique et nitrique) et de leurs impacts sur les forêts. Le CO₂ atmosphérique absorbé par les océans dans les régions polaires entraîne également une acidification des océans qui attaque les coraux dont la structure est en carbonate de calcium, CaCO₃. L'IEA estime le rejet en CO₂ en 2017 à

32,8 Gt CO₂ (ou 8,9 GtC/an après multiplication par 12/44, le rapport des masses molaires du carbone et du CO₂). Note : 1 Gt CO₂ est égale à 10¹² kg de dioxyde de carbone. La quantité par habitant atteint 4,37 t CO₂ par an. Environ la moitié du CO₂ est absorbée par l'océan et la biosphère terrestre et le reste s'accumule dans l'atmosphère lentement mais sûrement au rythme de 1,5 ppmv par an en moyenne. Les codes radiatifs fondés sur la loi de Planck et l'identification des raies d'émission du CO₂ (autour de 15 μm) permettent de calculer le forçage radiatif causé par un doublement du CO₂ (disons de 280 ppmv à la période préindustrielle à 560 ppmv – la concentration était de 405 ppmv en 2017). Si E_{IN} et E_{OUT} dénotent les flux d'énergie entrante et sortante aux frontières du système, c'est-à-dire au sommet de l'atmosphère, le forçage radiatif R_F est la variation de E_{IN} – E_{OUT} consécutive au changement imposé mais avant le réajustement du système :

$$R_F = \Delta(E_{IN} - E_{OUT})$$

Pour un doublement de CO₂, les codes radiatifs donnent R_F = 4 W m⁻². Avec l'augmentation du CO₂, les altitudes d'émission infrarouge augmentent, mais comme la température diminue avec l'altitude, l'émission infrarouge vers l'espace E_{OUT} (= OLR) diminue. Un déséquilibre apparaît puisque le forçage solaire E_{IN} est maintenant plus grand que E_{OUT}. Il s'agit maintenant de trouver l'augmentation de la température terrestre de surface en réponse à ce forçage radiatif une fois que tout le système {atmosphère + océan} s'est réorganisé. La réponse à cette question est beaucoup plus difficile que le calcul de R_F et ne peut être apportée que par un modèle de climat qui inclut tous les compartiments et tous les processus majeurs pour calculer ce retour à l'équilibre. Sous l'effet du forçage radiatif du CO₂, des rétroactions importantes s'activent pour déstabiliser le système. Les principales sont celles de la vapeur d'eau et de la glace (*water vapor feedback* et *ice albedo feedback*). Pour la première, quand la température augmente, l'atmosphère accepte plus de vapeur d'eau qui augmente les émissions infrarouges et donc l'effet de serre. Pour la deuxième, une augmentation de la température diminue la surface des glaces polaires et donc l'albédo diminue et le forçage solaire de la planète augmente. Le paramètre λ appelé sensibilité du climat résume l'effet de toutes ces rétroactions calculé par la réponse d'un modèle :

$$\lambda = \frac{\Delta T}{R_F}$$

La sensibilité du climat λ est simplement la variation de température globale de la surface terrestre en réponse à la perturbation du flux de chaleur R_F imposé. Chaque modèle a sa propre sensibilité, car ils ont une grille spatiale d'une certaine taille en dessous de laquelle les processus hydrodynamiques et thermiques ne sont pas calculés : avec une grille spatiale de 100 km, ce qui est déjà une grille fine pour un modèle de climat, les nuages, les tourbillons océaniques d'échelles inférieures sont juste absents. Ils sont paramétrisés par des lois *ad hoc* qui n'ont rien d'universelles. Après quelques centaines d'années de calcul, la sensibilité du climat mesurée par les différents modèles se situe dans une fourchette λ = [0,5, 1,1] °C par W m⁻². Le réchauffement global causé par un doublement de CO₂ est donc

$\Delta T_{2xCO_2} = \lambda R_F 2xCO_2 = [2, 4, 4] \text{ } ^\circ\text{C}$. Sous une hypothèse linéaire, une variation de CO_2 de la période préindustrielle à 2017 (avec $CO_2 = 405,5 \text{ ppmv}$) prédit un réchauffement global :

$$\Delta T_{PI-2017} = \frac{125,5}{280} \times [2, 4, 4] = [0,9, 2] \text{ } ^\circ\text{C}$$

Certes une dispersion d'un facteur deux entre la prédiction des différents modèles apparaît mais l'intervalle est grosso modo en accord avec l'augmentation observée de la température de surface sur les continents de $1,5 \text{ } ^\circ\text{C}$ sur les 150 ans de la période industrielle. C'est avec ce type de validation que la prédiction du climat est effectuée par les modèles de climat avec une sélection de scénarios variés d'émissions futures de CO_2 déduites de projections de croissance des activités industrielles, de la population mondiale, etc.

10.7.10.3 La respiration des habitants

Qu'en est-il de l'effet de la simple respiration de la population ? Est-ce une source significative de CO_2 ? Une façon simple d'estimer l'ordre de grandeur est de prendre 100 W comme la puissance moyenne nécessaire pour la vie d'une personne (le métabolisme basal) et de choisir le glucose comme alimentation. Les données du tableau 10-10 indiquent le nombre de moles de glucose à brûler chaque seconde pour générer ces 100 W :

$$n_{\text{GLUCOSE}} = \frac{100}{2808 \times 10^3} = 3,56 \times 10^{-5} \text{ mole s}^{-1}$$

Comme chaque mole de glucose consommée génère 6 moles de CO_2 :

$$n_{CO_2} = 6 n_{\text{GLUCOSE}} = 2,13 \times 10^{-4} \text{ mole s}^{-1}$$

La masse de CO_2 émise par jour par cet habitant moyen est de $0,810 \text{ kg}$ ou 295 kg/an . La population mondiale de 2017 a donc émis environ $2,2 \text{ Gt } CO_2$; c'est $6,7 \%$ de la quantité de CO_2 due aux activités industrielles citée plus haut. Si on y ajoute élevage et faune sauvage, l'effet global de la respiration des êtres vivants sur la production de CO_2 n'est pas du tout négligeable.

10.7.10.4 Activités humaines et budget d'entropie

L'environnement industriel fournit la chaleur Q_{IN} au système mondial qui lui fournit en retour la chaleur Q_{OUT} . La variation de l'entropie de l'environnement est donc :

$$\Delta S_{\text{ENV}} = -\frac{Q_{\text{IN}}}{T_{\text{IN}}} + \frac{Q_{\text{OUT}}}{T_{\text{OUT}}}$$

La température T_{IN} est la haute température des chaudières alors que T_{OUT} est la plupart du temps la température de l'environnement, disons $15 \text{ } ^\circ\text{C}$ en moyenne globale. Le deuxième terme de droite est donc le terme dominant et :

$$\Delta S_{\text{ENV}} \approx \frac{Q_{\text{OUT}}}{T_{\text{OUT}}} = \frac{4,99 \times 10^{20}}{273,15 + 15} = 1,7 \times 10^{18} \text{ J K}^{-1}$$

Ramené à la population de 7,5 milliards d'habitants en 2017, $\Delta S_{\text{ENV}} = 2,26 \times 10^8 \text{ J K}^{-1} \text{ hab}^{-1}$ ou encore $6,2 \times 10^5 \text{ J K}^{-1} \text{ hab}^{-1}$ et par jour avec des disparités d'un ordre de grandeur entre les habitants des pays développés et ceux des pays émergents.

L'autre source d'entropie est associée avec la libération dans l'atmosphère de tous les gaz de combustion (dont le CO_2), molécules auparavant bien rangées dans les structures moléculaires de divers combustibles fossiles présents dans le sous-sol. En divisant l'émission totale de CO_2 de 2017 par la population mondiale, l'émission est de 4,4 t CO_2 par habitant et par an (soit 10^5 moles an^{-1}), une émission dont la distribution est encore une fois très inhomogène entre pays développés et pays émergents.

La deuxième loi, la relation 10-43, exige la croissance de l'entropie totale {les systèmes des centrales + l'environnement} : $\Delta S \geq 0$. Compte tenu de l'extensivité :

$$\Delta S = \Delta S_{\text{SYS}} + \Delta S_{\text{ENV}} \geq 0$$

Comme on vient de montrer que $\Delta S_{\text{ENV}} > 0$, la deuxième loi permet $\Delta S_{\text{SYS}} \leq 0$, la signature de travail mécanique transformable en électricité qui permet en aval la fabrication d'objets ordonnés utilisés par la population mondiale.

10.7.11 *Conclusions*

En résumé, la production d'énergie électrique ordonnée, disponible dans les pays développés, est donc accompagnée d'un immense désordre exigé par la croissance de l'entropie. La merveille de la photosynthèse vient de ce qu'une partie de ce désordre atmosphérique du CO_2 peut à nouveau être rangé dans des structures moléculaires de plus en plus complexes, acides aminés, protéines, ADN lorsque de nouveaux organismes apparaissent dans les océans et dans la biosphère terrestre. Cette photosynthèse, le début de la chaîne de fabrication d'êtres complexes, ne demande que de l'énergie solaire de haute qualité essentiellement inépuisable. C'est elle qui permet de diminuer localement l'entropie constatée lors de la formation des macromolécules de la vie.

On dispose maintenant d'une base physique solide qui rationalise le besoin pressant de la réduction des émissions des gaz à effets de serre pour atténuer le réchauffement global. Quand on se rappelle que la consommation d'énergie mondiale est près de vingt fois supérieure à la consommation d'énergie nécessaire pour la simple survie individuelle, disons celle de l'homme de Néandertal, on se dit que de la marge existe pour la réduire, évidemment de façon prioritaire dans les pays développés, les plus gros consommateurs. Mais qui dit consommation d'énergie dit production de biens par des entreprises qui versent des salaires qui seront bien sûr dépensés pour manger, se loger et... consommer. La recherche de solutions permettant une diminution de la consommation des énergies primaires, la croissance des énergies renouvelables et des conditions de vie meilleures que celles de l'homme de Néandertal est le défi du siècle qui vient. La deuxième loi de la croissance de l'entropie nous montre que

la diminution des pertes et donc l'amélioration des rendements des conversions d'énergie joueront le rôle central.

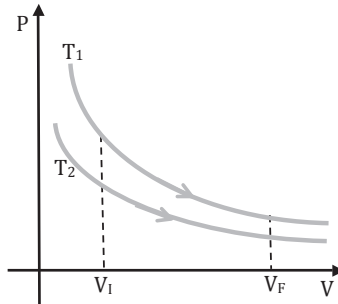
Et pour finir sur une note d'humour attribuée au grand physicien Arnold Sommerfeld (1868-1951) :

« La thermodynamique est une science amusante. La première fois que vous l'étudiez, vous ne comprenez rien du tout. La deuxième fois que vous la parcourrez, vous pensez la comprendre, à l'exception d'un ou deux points. La troisième fois que vous y revenez, vous savez que vous ne la comprenez toujours pas, mais à ce moment-là vous vous êtes tellement habitué au sujet que cela ne vous dérange plus du tout. »

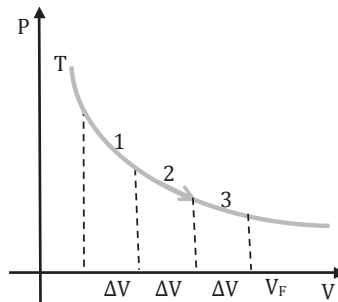
10.8 Applications

10.8.1 Questions de réflexion et concepts

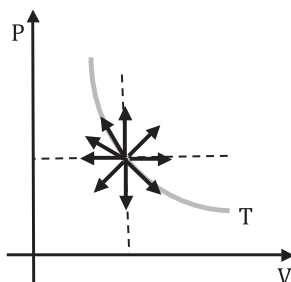
R1. On veut comparer les deux expansions isothermes de la figure pour deux températures différentes T_1 et T_2 mais pour la même variation de volume. Comparez le travail fait par le gaz, la variation d'énergie interne du gaz, l'énergie transférée sous forme de chaleur au gaz pour ces deux processus.



R2. Trois transformations isothermes sont indiquées sur la figure chacune étant une expansion d'une même variation du volume ΔV . Comparez et classez du plus grand au plus petit le travail fait par le gaz, la variation d'énergie interne du gaz, l'énergie transférée sous forme de chaleur au gaz pour chacun de ces trois processus.

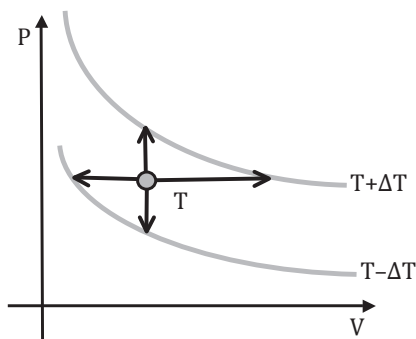


R3. La figure montre l'état initial d'un gaz sur un diagramme (V, p). L'arc gris est un isotherme particulier T . Indiquez les changements de température éventuels sur chacune des directions des chemins dessinés sur la figure.



R4. Un gaz placé dans un cylindre isolé est comprimé de façon adiabatique jusqu'à la moitié de son volume. L'entropie augmente-t-elle, diminue-t-elle ou reste-t-elle constante dans la transformation ?

R5. Le point central représente l'état d'un gaz parfait à la température T . Comparez et classez les changements d'entropie sur les quatre transformations de la figure.



R6. En vous servant des données du tableau 10.15, estimez la durée de vie des ressources fossiles charbon, gaz et pétrole au rythme de la consommation mondiale de l'année 2017.

10.8.2 Exercices

Les données nécessaires des exercices sont présentes sur les tableaux 10-1 à 10-4.

Thermique

1. C Le beurre a un contenu énergétique utilisable de 25 kJ par gramme. Comparez cette ressource avec l'énergie potentielle pour atteindre le sommet de l'Everest (8 800 m) pour une personne de 70 kg partant d'un camp de base situé à

5 000 m d'altitude. Quelle est la masse de beurre correspondant à cette variation d'énergie potentielle ?

2. C On utilise une bouilloire électrique de 2 000 W pour chauffer 100 grammes d'eau pour un café instantané. Calculez le temps nécessaire pour chauffer l'eau de 20 °C à 100 °C en négligeant les pertes de chaleur.

Faire l'expérience avec votre bouilloire, mesurez le temps de chauffe. En comparant à la prévision théorique, déterminez le rendement de votre bouilloire par le rapport puissance effective sur puissance nominale (affichée sur la plaque de l'appareil).

Chaleur spécifique de l'eau à pression constante et à la température ordinaire $C_p = 4\,190 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$

3. Quelle quantité de chaleur est dissipée par les freins d'une voiture de masse m ($= 1\,000 \text{ kg}$) si elle s'arrête à partir d'une vitesse de 50 km h^{-1} ? On utilise cette chaleur pour chauffer 1 litre d'eau initialement à 30 °C. Quelle sera la température finale ?

4. C Un radiateur a une puissance de 500 W. Combien de temps faudra-t-il à ce radiateur pour faire fondre 1 kg de glace à 0 °C ? Enthalpie latente de fusion $\Delta H_{\text{TRS}} = 6 \text{ KJ mole}^{-1}$, masse molaire de l'eau $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ g}$.

5. C En panne de courant dans son restaurant, un chef décide de secouer l'eau de son café dans une bouteille thermos (parfaitement isolée) pour amener l'eau du robinet de 15 °C à 100 °C. À chacun de ces mouvements, l'eau tombe de 30 cm et il fait 30 de ces mouvements par minute. Combien de temps cela lui prendra-t-il ?

6. C Un coureur de 70 kg génère 1 200 W de chaleur. Pour rester à 37 °C, cette chaleur doit être évacuée. Sachant qu'une température de 44 °C est fatale, combien de temps s'écoulera-t-il avant d'atteindre cette température si cette chaleur n'est pas évacuée ? Prendre comme chaleur spécifique du corps humain $C_p = 3\,480 \text{ J kg}^{-1}$.

7. Le soleil chauffe de l'eau circulant dans des tubes placés sur le toit d'une maison. Seulement 20 % de l'énergie solaire est convertie en chaleur à cause de diverses pertes. Si on veut amener les 200 l d'eau du circuit de 15 °C à 30 °C en trois heures, quelle surface de collecteur faut-il disposer sur le toit si le flux solaire est de 400 W m^{-2} ? Capacité thermique massique de l'eau liquide $C = 4\,185 \text{ J K}^{-1} \text{ k}^{-1}$.

8. C Un objet sphérique en céramique de 10 cm de rayon à la température de 20 °C est placé dans un four de poterie à 500 °C. On suppose que l'objet et les parois du four rayonnent comme un corps noir. Calculez les énergies radiatives émises par la sphère et absorbées par la sphère (en watt). Quelle est l'énergie nette reçue par la sphère ?

9. Une personne de 75 kg a une surface de 2 m^2 .

(i) Déterminez la perte de chaleur nette par radiation si sa température de peau est de 30°C et si la température de l'environnement est de 18°C . On supposera que le corps se comporte comme un corps noir.

(ii) Le taux du métabolisme basal est la quantité d'énergie dépensée par une personne au repos. Environ 80 % de l'énergie générée par le corps est transformée en chaleur, le reste servant à faire fonctionner le système. Au repos on perd la chaleur surtout par radiation. Déterminez le taux du métabolisme basal de cette personne.

10. C Le flux géothermique moyen en surface sur les continents est de $60 \times 10^{-3} \text{ W m}^{-2}$. Déterminez la dérivée dT/dz (z vertical) appelée gradient géothermique. Si la température de surface est de 0°C , quelle est la température à l'équilibre à la base de la croûte continentale située à 40 km de profondeur ?
Données : $k_C = 3 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

11. Une couche de magma de 10 m d'épaisseur se trouve prise en sandwich entre deux couches sédimentaires. Estimez le temps de refroidissement du magma. Il faudra calculer le coefficient de diffusion thermique. Données : $k_C = 3 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 3000 \text{ kg m}^{-3}$, $C_p = 1000 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

12. C Un livre de cuisine indique des temps de cuisson de rôtis de viande de bœuf de 30 minute par kg.

(i) Estimez le coefficient de diffusion et la conductivité thermique de la viande. Prendre $C_p = 3480 \text{ J kg}^{-1}$.

(ii) Trouvez comment le temps de cuisson varie avec la masse de viande. Donnez les temps de cuisson pour 2 kg, 5 kg...

13. Le coefficient R d'isolation d'un matériau est le rapport entre son épaisseur L et sa conductivité thermique $R = L/k_C$. On considère que $R = 30$ est un minimum pour un climat froid. De quelle épaisseur de bois, laine de roche ou mousse de polyuréthane faut-il disposer pour assurer cette isolation ?

14. C Un isolant composite.

Deux matériaux de conductivité k_1 et k_2 et d'épaisseur L_1 , L_2 sont collés l'un à l'autre pour faire un isolant. Les températures extérieures et intérieures sont respectivement T_1 et T_2 . Calculez le flux thermique à travers cet isolant à l'équilibre ? Le facteur R , une sorte de résistance, lit le flux F et la différence de température ΔT : $\Delta T = R F$. Calculez le facteur R équivalent.

Généralisez le facteur R au cas d'une multicouche de N matériaux d'épaisseur L_i et conductivité k_{Ci} .

15. * C Supposons que la température d'un barreau solide infini varie comme $T = a \cos(mx)$ à un instant $t = 0$. Le processus de diffusion thermique le long du barreau est caractérisé par un coefficient de diffusion k_D . Déterminez l'évolution temporelle de la température. Montrez comment l'amortissement varie avec m .

Indice : la solution de l'équation de diffusion peut être trouvée par la technique de séparation des variables. On écrit que $T(x, t) = F(t)G(x)$ et on détermine les équations différentielles ordinaires auxquelles F et G obéissent.

16. C Changement de phase.

(i) Quelle quantité de chaleur faut-il fournir à une masse m ($= 2 \text{ kg}$) de glace à -20°C pour l'amener à l'état liquide à $+20^\circ\text{C}$?

(ii) On ne fournit que 400 kJ de chaleur, quel est l'état final et la température du système ?

Données : chaleur latente de fusion de l'eau à 0°C : $L_F = 333 \text{ kJ kg}^{-1}$, chaleur spécifique de la glace $C_I = 2\,220 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, chaleur spécifique de l'eau $C_W = 4\,190 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

17. Au départ, on a 10 grammes de glace à la température de -20°C . On transfère de la chaleur de façon continue à cette masse de glace au rythme de 20 W , soit 20 J chaque seconde.

Faire un graphe de la température en fonction du temps jusqu'à ce que toute l'eau se soit vaporisée.

On utilisera les valeurs de la chaleur spécifique de la glace $C_I = 2\,220 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, chaleur spécifique de l'eau $C_W = 4\,190 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, du problème précédent. Pour la chaleur latente de fusion de l'eau à 0°C , on prendra $L_F = \Delta_{FUS}H(273 \text{ K})/0,018 = 334 \text{ kJ kg}^{-1}$ et pour la chaleur latente de vaporisation : $L_V = \Delta_{VAP}H(373 \text{ K})/0,018 = 2\,261 \text{ kJ kg}^{-1}$.

18. * C La croissance de l'épaisseur de la glace d'un étang (ou de l'océan Arctique).

Considérons un réservoir d'eau à une température T juste supérieure à la température de fusion de la glace T_F . De l'air froid à une température négative $T_0 = -10^\circ\text{C}$ envahit la surface. De la glace va se former, mais à quel rythme ?

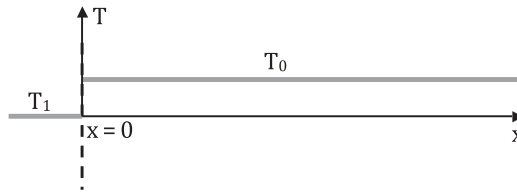
(i) En supposant que la couche de glace d'épaisseur h reste en permanence à l'équilibre thermodynamique, déterminez le profil de température et le flux de chaleur F_I dans la glace en fonction de T_0 et T_F supposées fixes.

(ii) En raisonnant sur une colonne de surface horizontale unité, déterminez le gain de volume de glace formé pendant le temps Δt . En déduire l'équation différentielle gouvernant $h(t)$.

(iii) Trouvez la solution de cette équation et déterminez le temps nécessaire pour que la glace atteigne le fond d'un étang de 1 m de profondeur.

Données : température de fusion de la glace $T_F = 0^\circ\text{C}$, chaleur latente de fusion de la glace $L_F = \Delta_{FUS}H(273 \text{ K})/0,018 = 334 \text{ kJ kg}^{-1}$, conductivité thermique de la glace $k_I = 2,25 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, densité de la glace $\rho_I = 0,92 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.

19. * C L'ordre de grandeur de l'âge de la Terre a été estimé par Lord Kelvin en calculant le temps de refroidissement de la Terre par conduction thermique depuis sa formation. On reprend son calcul avec des données actuelles. Il représente la Terre comme un domaine semi-infini, unidimensionnel, au sein duquel la température initiale des roches molles est $T_0 = 1\,200\text{ °C}$. À la surface de la Terre en $x = 0$, la température est maintenue en permanence à celle de l'espace extérieur, disons $T_1 = 0\text{ °C}$.



Comme on connaît le flux géothermique moyen émis à la surface terrestre $Q = 65 \times 10^{-3}\text{ W m}^{-2}$, on peut en déduire le gradient thermique à la surface (l'exercice 10).

Combien faut-il de temps depuis les conditions initiales pour que le gradient calculé soit égal au gradient observé, se demande Kelvin.

La solution est celle de l'équation de diffusion avec les conditions initiales et aux limites illustrées sur la figure.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$T(x = 0, t) = T_1$$

$$T(x, t = 0) = T_0$$

avec k la diffusivité thermique.

(i) La solution peut être obtenue en effectuant le changement de variable $y = \frac{x}{\sqrt{\pi k t}}$, (y est alors adimensionnel). Déterminez l'équation différentielle ordinaire du second ordre satisfaite par $T(y)$. Trouvez la solution qui peut s'exprimer avec la fonction erreur ci-dessous :

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\zeta^2} d\zeta$$

$$\text{erf}(\infty) = 1$$

(ii) Calculez le gradient thermique en surface $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0}$.

(iii) Déterminez l'âge de la Terre avec les données ci-dessous. Discutez.

Données : la conductivité thermique varie dans l'intervalle $k_C = 3 (\pm 2)\text{ W m K}^{-1}$. On prendra $C_p = 10^3\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$, $\rho = 3 \times 10^3\text{ kg m}^{-3}$ et donc $Q = 65 \times 10^{-3}\text{ W m}^{-2}$.

20. C L'observation montre qu'un objet se refroidit ou se réchauffe selon la différence de température entre un objet et son environnement, soit $\Delta T = T_{\text{OBJ}} - T_{\text{ENV}}$. Newton a proposé de modéliser l'évolution de cette différence comme :

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -\lambda \Delta T$$

(i) Connaissant la loi de Stefan pour la radiation d'un corps noir, pour quel ΔT le modèle de Newton est-il valable ? De quoi peut bien dépendre le paramètre λ ? Pourquoi le signe - à droite ?

(ii) Si $\Delta T = \Delta T_0$ à $t = 0$, trouvez comment ΔT varie avec t .

(iii) Une maison sans chauffage (ni isolation) de masse m , de surface A et de capacité calorifique C passe de 20°C à 17°C en une heure quand la température extérieure $T_{\text{ENV}} = 6^\circ\text{C}$. Calculez la valeur de λ pour la maison. Expliquez comment améliorer la situation (diminuer λ).

Équilibre des gaz

21. C Un échantillon de gaz parfait de masse $m = 1,26 \times 10^{-4}$ kg a une température de 50°C , est contenu dans un volume $V (= 0,75$ litre) à la pression $p (= 2,24$ atm). Quelle est la masse d'une particule (atome ou molécule) de ce gaz ? Déterminez la masse molaire du gaz et identifiez-le.

22. C On prend un litre de N_2 à $p = 2$ bars et 298 K. Quelle est la variation d'énergie interne du gaz lorsque T augmente de 10 K ? Quelle énergie est nécessaire pour chauffer une mole de N_2 de 0 K à 298 K à volume constant ?

23. C Hulin. L'équation d'état pour n moles d'un gaz réel s'écrit $p = n \frac{RT}{V} + \phi(T, V)$, où V est le volume occupé, T et P la température et la pression du gaz. R est la constante universelle des gaz. La fonction $j(T, V)$ est inconnue.

Que peut-on dire des propriétés de la fonction $j(T, V)$?

24. L'argon est-il un gaz parfait à 400 K et 3 bars ? Pour l'argon $a = 1,35$ litre⁶ bar mole⁻², $b = 3,20 \times 10^{-2}$ litre³ mole⁻¹.

Indice : calculez le volume molaire par la loi des gaz parfaits et estimez la taille des termes correctifs dans l'équation de van der Waals. L'alternative est de voir l'exercice 23 pour trouver le volume molaire à partir de l'équation de van der Waals.

25. Les cylindres de gaz comprimé du commerce sont remplis à une pression de 200 bars. Déterminez le volume molaire de l'oxygène à cette pression et à 25°C avec (i) la loi des gaz parfaits, (ii) l'équation de van der Waals. Pour l'oxygène

$a = 1,37 \text{ litre}^6 \text{ bar mole}^{-2}$, $b = 3,87 \times 10^{-2} \text{ litre}^3 \text{ mole}^{-1}$. En déduire le facteur de compression Z .

Note : le calcul du volume molaire avec l'équation de van der Waals demande de trouver les racines d'un polynôme de degré 3. Identifiez l'intervalle où se trouve la racine acceptable avec une calculatrice graphique par exemple. Utilisez la méthode de Newton pour trouver la racine qui convient (à programmer).

26. 10 moles d'éthane C_2H_6 sont contenues dans un volume de $4,86 \text{ m}^3$ à 27°C . Déterminez la pression exercée par l'éthane avec (i) la loi des gaz parfaits, (ii) l'équation de van der Waals. Calculez le facteur de compression Z . Conclure. Pour l'éthane $a = 5,58 \text{ litre}^6 \text{ bar mole}^{-2}$, $b = 3,19 \times 10^{-2} \text{ litre}^3 \text{ mole}^{-1}$.

27. Une montgolfière est remplie d'air chaud à 120°C , l'air extérieur étant à 20°C . Quel doit être le volume du ballon pour équilibrer le poids d'une personne de 60 kg ?

28. C La température de la couche externe du Soleil (corona) est $1,0 \times 10^6 \text{ K}$. Cette couche est juste au-dessus de la photosphère de rayon $6,96 \times 10^8 \text{ m}$. La masse du Soleil est $1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$ et celle d'un atome d'hélium est $6,646 \times 10^{-27} \text{ kg}$. La vitesse rms des atomes d'hélium est-elle suffisante pour se libérer de l'attraction gravitationnelle du Soleil ?

29. C Pression atmosphérique et ballon stratosphérique.

L'idée est de concevoir un ballon gonflé à l'hélium pouvant emporter une masse M ($= 100 \text{ kg}$ poids de la nacelle + équipements scientifiques) à 30 km d'altitude dans la stratosphère. La difficulté est que pression et masse volumique de l'atmosphère varient fortement avec l'altitude. En revanche, on va supposer pour les besoins du design du ballon que la température reste à peu près constante $T \approx 250 \text{ K}$, ce qui reste vrai à 15 % près. L'équation des gaz parfaits pour l'air sec est $\frac{p}{\rho} = R_D T$ avec $R_D = 287 \text{ J kg}^{-1}$.

(i) Utilisez la relation hydrostatique et négligez les variations de g avec l'altitude pour montrer que la pression décroît exponentiellement en fonction de z comme : $p(z) = p_0 e^{-z/H}$ avec $H = RT/g$ et p_0 la pression au sol ($z = 0$ au sol). Si ρ_0 est la masse volumique au sol, trouvez $p(z)$. Calculez p et ρ à $z = 30 \text{ km}$.

(ii) La masse volumique de l'air et de l'hélium au sol à 20°C sont respectivement $\rho_0 = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$ et $\rho_1 = 0,178 \text{ kg m}^{-3}$. Déterminez le volume minimum V_0 du ballon au sol pour assurer le décollage. Quelle masse d'équipements peut-on embarquer ?

(iii) On suppose que le ballon monte doucement de sorte que les températures intérieures et extérieures restent égales. Quand le ballon monte, la pression et la densité extérieure diminuent rapidement. Trouvez le volume du ballon à l'altitude

de consigne de 30 km. Trouvez la pression à l'intérieur du ballon si celui-ci est hermétiquement clos.

Note : pour éviter de déchirer l'enveloppe du ballon (en caoutchouc ou bien en polyéthylène), il existe une soupape d'évacuation pour égaliser les pressions entre l'intérieur et l'extérieur.

La première loi

30. C Une masse m ($= 1 \text{ kg}$) d'eau liquide à 100°C est convertie en vapeur à 100°C par ébullition à la pression standard ($p = 1 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$). Le volume de l'eau passe de 1 litre à $1,671 \text{ m}^3$. Comme la transformation est isotherme, le système a été mis en contact avec un réservoir pour fournir la chaleur nécessaire.

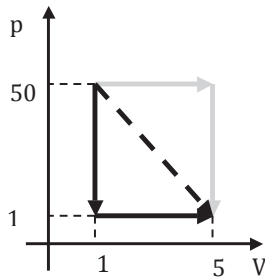
Quel travail W a-t-il été fait par le système durant cette expansion ?

Quelle quantité de chaleur ? Qu'a-t-il fallu fournir ?

Quel a été le changement d'énergie ΔU du système ?

Commentez sur la répartition des valeurs de W , Q et ΔU .

31. C Un gaz subit une expansion de 1 à 5 m^3 , la pression chutant de 50 Pa à 10 Pa. Calculez le travail fourni par le gaz sur chacun des trois chemins (noir, gris et pointillés) du diagramme (V, p) de la figure.



32. Trouvez les relations qui lient p et V , puis T et p , puis V et T , pour le processus adiabatique d'un gaz parfait.

33. Comparez les pentes d'une transformation isotherme et d'une transformation adiabatique au même point sur un diagramme (V, p). En déduire que la température décroît dans une expansion adiabatique. Expliquez pourquoi.

34. C Montrez que le travail fait par l'environnement sur un gaz parfait dans une transformation adiabatique d'un état d'équilibre (V_1, p_1) à un état (V_2, p_2) est :

$$W = \frac{1}{\gamma - 1} (p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

Montrez que ceci peut se réécrire successivement :

$$W = nC_V(T_2 - T_1)$$

Expliquez pourquoi le travail s'exprime ici comme la variation d'énergie interne. Quand on fait une expansion adiabatique de V_1 à V_2 , l'expression ci-dessus reste inutilisable puisque T_2 est inconnue. Montrez que l'on peut la réécrire comme :

$$W = nC_V T_1 \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right]$$

Indice : pour une transformation adiabatique, on se rappellera des relations suivantes (voir exercice 29) :

$$pV^\gamma = \text{constant}$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{constant}$$

35. C Hulin. Trouvez la forme générale de la dépendance en p et V de l'énergie interne U d'un gaz dont les adiabatiques ont une équation de la forme $pV^\gamma = \text{constant} = \eta$ (avec $\gamma = \text{const}$). Partir de la première loi : $dU = dQ - pdV$ et montrer que $\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_\eta = -p$.

36. Un gaz est maintenu à pression constante p ($= 2 \times 10^6$ Pa) et subit une expansion, le volume passant de $5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ à $9 \times 10^{-3} \text{ m}^3$. Quelle quantité d'énergie sous forme de chaleur faut-il fournir au gaz dans les deux cas suivants :

L'énergie interne est constante.

L'énergie interne augmente de la même quantité que le travail fait sur l'environnement.

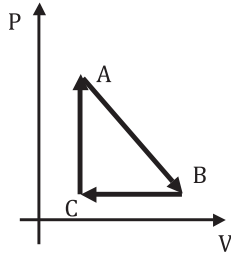
37. C Un gaz supposé parfait de volume V ($= 40$ l) est initialement à la pression p ($= 4 \times 10^5$ Pa) et subit une expansion de sorte que $pV = \text{constant}$.

Quelle est la variation d'énergie interne du gaz ?

Calculez le travail fait sur l'environnement et l'énergie absorbée sous forme de chaleur quand le volume double.

38. Combien de joules sont absorbés par 3 moles de gaz parfait qui sont l'objet d'une expansion isotherme depuis une pression initiale $p_1 = 5$ bars à une pression finale $p_2 = 3$ bars à 0°C ?

39. Un gaz subit le cycle ABC de la figure, un cycle répété 100 fois par minute. Sur le diagramme (V, p) le point A a pour coordonnées $(2 \times 10^{-3} \text{ m}^3, 3 \times 10^6 \text{ Pa})$ et B les coordonnées $(8 \times 10^{-3} \text{ m}^3, 1 \times 10^6 \text{ Pa})$.



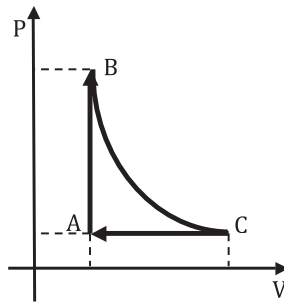
Déterminez la puissance du moteur.

40. Un gaz diatomique est l'objet d'une expansion adiabatique, le volume final étant 1,35 fois plus grand que le volume initial. La température initiale est de 18°C . Quelle est la température finale ?

41. Le gaz situé dans une chambre d'expansion-compression suit le cycle ABCA sur la figure ci-dessous. L'arc BC est une transformation adiabatique.

Le travail net effectué par le gaz sur l'environnement sur le cycle vaut 15 J. La chaleur transférée au gaz sur le segment AB est $Q_{AB} = 20\text{ J}$.

Déterminez la valeur de l'énergie transférée par le système sous forme de chaleur sur le segment CA.

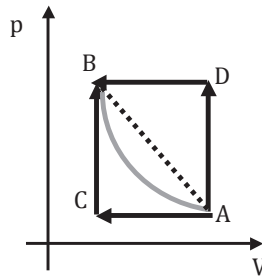


42. Une mole d'un gaz monoatomique suit le cycle ABCA de la figure ci-dessus. L'arc BC est une transformation adiabatique. Les températures aux points A, B, C sont $T_A = 300\text{ K}$, $T_B = 600\text{ K}$, $T_C = 455\text{ K}$.

(i) Calculez la chaleur Q transférée au système ou à l'environnement, la variation d'énergie interne ΔU et le travail fait par le système sur chacun des tronçons puis sur l'ensemble du cycle.

(ii) La pression initiale au point A est $p = 1\text{ atm}$ ($1,013 \times 10^5\text{ Pa}$). Calculez pression et volume aux points B et C.

43. C Sur la figure suivante, le gaz est amené de façon adiabatique du point A au point B (l'arc gris sur la figure).



(i) Si le point A a pour coordonnées $(V_1, p_1) = (8 \text{ litres}, 10^5 \text{ Pa})$, montrez que les coordonnées de B sont $(V_2, p_2) = (1 \text{ litre}, 32 \times 10^5 \text{ Pa})$ si le coefficient $\gamma = 5/3$. Calculez le travail effectué pour passer de A à B selon l'arc adiabatique ainsi que la variation d'énergie interne.

(ii) D'autres transformations sont possibles pour aller de A à B. Calculez le travail W et la chaleur Q fournis au système pour chacune des 3 transformations ci-dessous effectuée de façon réversible.

- Transformation A C B.
- Transformation A D B.
- Transformation telle que p varie linéairement avec V (la droite pointillée).

44. C Le paradoxe de Emden, 1938.

Why do we have winter heating ?

The layman will answer: « to make the room warmer. »

The student of thermodynamics will perhaps so express it: « To import the lacking (inner, thermal) energy. » If so, then the layman's answer is right, the scientist's is wrong.

Un refuge de montagne est rempli d'un volume V d'air, un gaz diatomique assimilé à un gaz parfait. La température initiale de l'air est T_1 . Après avoir allumé un poêle à bois, la température de l'air passe à la valeur T_2 . Quelle est la variation ΔU de l'énergie interne de l'air dans le refuge ?

Où est donc passée la chaleur du poêle ?

Expliquez l'effet agréable de la température plus élevée T_2 sur une personne dans le refuge.

Note : comme le refuge laisse forcément passer l'air, la pression intérieure reste égale à la pression atmosphérique à l'extérieur. Comme V et p sont constants, quand la température augmente, le nombre de moles diminue. Le système est donc ouvert et c'est l'origine du paradoxe.

45. * C Pourquoi la température de l'air décroît-elle avec l'altitude dans l'atmosphère ?

On suppose que les mouvements de l'air chauffés par le sol sont rapides de sorte que la diffusion thermique n'a pas le temps d'agir. Le mouvement d'une particule est alors adiabatique. Si la particule monte, elle subit une détente adiabatique puisque la pression décroît avec l'altitude. On s'attend à ce que la température de la particule diminue.

Au cours d'un déplacement infinitésimal, la variation d'énergie de la particule est :

$$du = -pdv$$

On a écrit ici l'énergie interne et le volume par unité de masse de sorte que $v = V/m$, le volume massique ou spécifique qui est égal à $1/\rho$.

(i) Montrez que cette relation peut se réécrire : $c_p dT = vdp$ en utilisant les expressions pour les gaz parfaits. Il faudra montrer que $c_p = C_p/M$ avec C_p la chaleur spécifique par mole et M la masse molaire de l'air sec, $M = 28,96$ g. L'air est composé de gaz diatomique de sorte que $C_p = 7/2R$.

(ii) La particule ne change pas la distribution de pression à l'équilibre de l'atmosphère qui est hydrostatique. En déduire qu'à l'équilibre $\Gamma_A = -dT/dz = g/c_p$. Montrez que la température décroît de près de 1°C par 100 m. Cette variation est appelée gradient adiabatique sec. L'observation montre une décroissance de la température avec l'altitude plus proche de $0,65^\circ\text{C}$ par 100 m à cause de l'effet de condensation de la vapeur d'eau négligé ici.

46. * C La stabilité de l'atmosphère sèche

La relation 10-15 donne l'accélération verticale d'une particule fluide de densité ρ_2 insérée dans un fluide de densité ρ_1 :

$$a_z = g \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} \right)$$

(i) Montrer que cette expression devient dans le cas de l'air pris comme un gaz parfait :

$$a_z = g \left(\frac{T_2 - T_1}{T_2} \right)$$

(ii) La particule est au repos à la température $T_1(z_0)$ au niveau z_0 et la température de l'air environnant varie comme :

$$T_1 = T_1(z_0) - \Gamma (z - z_0)$$

L'exercice précédent montre que si la particule se déplace adiabatiquement, sa température varie comme :

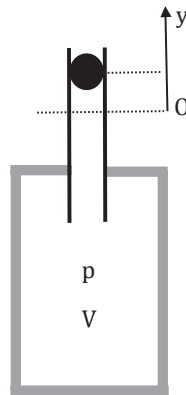
$$T_2 = T_1(z_0) - \Gamma_A (z - z_0)$$

Calculez l'accélération verticale d'une particule déplacée adiabatiquement de $\eta = z - z_0$. En déduire l'équation différentielle du second ordre gouvernant les *petits* déplacements $\eta(t)$. Montrez que la particule oscille si $\Gamma < \Gamma_A$ et qu'à l'inverse l'air est instable si le gradient de l'air est supérieur au gradient adiabatique $\Gamma > \Gamma_A$. Dans cette situation, la convection thermique (pour l'air sec) se déclenche et la particule peut atteindre une grande altitude.

(iii) Calculez la période d'une oscillation lorsque $\Gamma = 0,65 \Gamma_A$, une valeur typique observée. Ces oscillations de gravité *internes* d'un fluide stratifié stablement joue un grand rôle dans l'atmosphère et dans l'océan.

47. * C L'expérience de Rüchhardt, 1929

Rüchhardt a pu mesurer le coefficient $\gamma = C_p/C_v$ avec le dispositif expérimental suivant :



Le gaz est contenu dans un récipient de volume V . Le bord supérieur est équipé d'un tube dans lequel peut coulisser une balle métallique sphérique de masse m . La balle et le tube sont parfaitement ajustés pour éviter les fuites et le frottement entre les surfaces est minimisé. Si la pression initiale du gaz est atmosphérique p_{ATM} , le poids de la balle comprime le gaz et à l'équilibre la pression devient :

$$p = p_{ATM} + mg/A$$

avec A la surface de la section du tube. On choisit l'origine d'un axe y en ce point d'équilibre.

Supposons que l'on enfonce un peu la balle d'une petite distance y , la pression dans le récipient augmente, une force de rappel sur la balle apparaît qui se met à osciller et la mesure de la fréquence des oscillations permet de déterminer γ .

Deux hypothèses sont utilisées :

- 1) Comme les oscillations sont rapides, on peut négliger la diffusion thermique et le gaz subit des compressions et détentes adiabatiques.
- 2) Comme les variations sont petites, on suppose que le gaz reste en équilibre thermodynamique.

Ceci permet d'utiliser la relation 10-17.

(i) Montrez que la force de rappel sur la balle $F(y) = -\frac{\gamma p A^2}{V} y$

(ii) En déduire la fréquence des oscillations harmoniques de la balle et montrez que :

$$\gamma = \frac{mV\omega^2}{A^2 p}.$$

48. C Hulin. L'univers est rempli par un gaz parfait monoatomique de température T . Il existe une cavité vide avec un bouchon d'ouverture. On enlève un instant le bouchon, et suite au rapide remplissage par le gaz de cette cavité, on remet très rapidement le bouchon de telle sorte qu'il empêche l'équilibre thermodynamique de s'installer entre la cavité et l'univers. Déterminez la température du gaz dans la cavité.

La deuxième loi et l'entropie

49. C Supposons deux corps de température T_1 et T_2 avec $T_1 > T_2$. S'ils sont mis en contact de l'énergie sous forme de chaleur, une quantité Q positive ou négative est transférée du corps chaud au corps froid.

Calculez la variation d'entropie de chaque corps ΔS_1 , ΔS_2 , puis $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$ du système dans son ensemble en fonction de Q , T_1 et T_2 .

Montrez que $\Delta S > 0$, la signature d'un processus irréversible, si seulement $Q > 0$.

50. Montrez que la variation d'entropie d'une substance chauffée de façon réversible à pression constante est :

$$\Delta S = nC_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

On supposera C_p constant.

Application : quelle est la variation d'entropie de 1 kg d'eau porté de 20 °C au point d'ébullition normal de 100 °C ?

51. C Deux morceaux de cuivre de masse $m = 1$ kg, l'un à 50 °C, l'autre à 0 °C, sont mis en contact dans un container isolé. Calculez la variation d'entropie totale du système des deux blocs. La chaleur spécifique du cuivre est $C = 385 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ supposée constante sur l'intervalle de température.

52. C Un kilogramme d'eau à 273 K est mis en contact avec un réservoir à 373 K.

(i) Quand l'eau a atteint 373 K, quelle est la variation d'entropie de l'eau ? Quelle est la variation d'entropie du réservoir ? Quelle est la variation d'entropie totale {eau + réservoir} ?

(ii) Comment pourrait-on chauffer cette eau de 273 K à 373 K sans augmenter l'entropie totale ?

53. Une masse d'eau m_1 ($= 1,5$ kg) à 100 °C est versée dans une autre masse d'eau m_2 ($= 2,5$ kg) à 20 °C. Une fois l'équilibre atteint et le mélange complet, quelle est la variation d'entropie du système $\{1 + 2\}$?

Note : on négligera l'énergie cinétique des mouvements de l'eau.

54. C Un grand réservoir à la température T_2 est mis en contact avec un petit système à la température T_1 . L'équilibre thermique est rétabli quand le système atteint la température T_2 du réservoir. On appellera C la capacité thermique du système de sorte que la chaleur transmise du réservoir au système est $Q = C (T_2 - T_1)$.

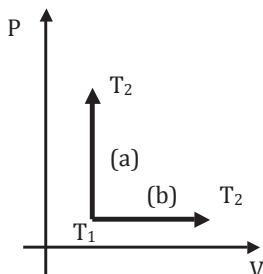
Calculez la variation d'entropie de l'état initial au nouvel équilibre du réservoir et du système ainsi que la variation d'entropie totale en fonction du rapport $x = T_1/T_2$. Tracez ces variations d'entropie en fonction de x . Discutez selon que ce rapport x est inférieur ou supérieur à 1.

55. L'eau et la glace coexistent à 0 °C. Il faut $L_F = 6\,000$ J pour faire fondre une mole de glace à cette température. Calculez la différence d'entropie entre une mole d'eau et une mole de glace à cette température.

56. C Calculez la variation d'entropie du système et celle de l'environnement d'un échantillon d'azote de masse $= 14$ grammes à 298 K et 1 bar qui double de volume dans les trois cas suivants :

- une expansion isotherme réversible ;
- une expansion isotherme irréversible, l'extérieur étant le vide, $p_{EX} = 0$;
- une expansion adiabatique réversible.

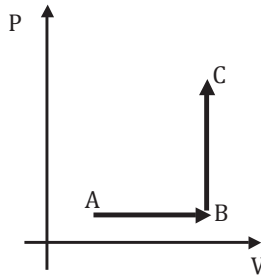
57. Un gaz parfait est initialement à la température T_1 au point indiqué sur le diagramme (V, p) . Une transformation l'amène à la température T_2 , soit par le chemin (a), soit par le chemin (b) sur la figure. Calculez et comparez les variations d'entropie du gaz sur ces deux chemins.



58. Calculez le changement d'entropie de $0,5$ l d'argon à 25 °C et 1 bar qui subit une expansion jusqu'à un volume de 1 l et qui est simultanément chauffé pour atteindre 100 °C.

Indice : on peut scinder la transformation en deux transformations réversibles, une expansion isotherme jusqu'au volume final et un chauffage réversible à volume constant pour atteindre la température finale. Le gaz est monoatomique et la chaleur spécifique molaire à volume constant est donc $C_V = 3/2 R$.

59. La figure montre une transformation d'un gaz monoatomique idéal sur un diagramme (V, p) composée d'une expansion isobare de A à B, suivie d'une augmentation de pression à volume constant (transformation isochore) de B à C. L'échantillon contient N atomes de gaz. Les coordonnées des points A et C sont (V_1, p_1) et $(3V_1, 3p_1)$ respectivement. Calculez la variation d'entropie du gaz en fonction de N , et des pressions et volumes initiaux et finaux.

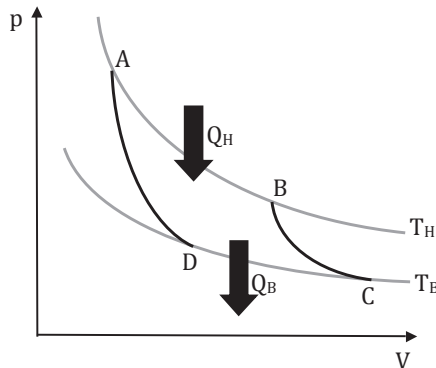


Cycles de moteurs thermiques, réfrigérateurs et pompes à chaleur

60. * C Le cycle de Carnot a été analysé dans le cours avec un diagramme (S, T) . Mais il est analysé traditionnellement avec un diagramme (V, p) , ce qui va être fait ici. Sur l'arc AB isotherme (température T_H), le système reçoit une quantité de chaleur Q_H . Sur l'arc CD également isotherme (température T_B), le système perd une quantité de chaleur Q_B . Q_H et Q_B sont définies positives. Les arcs BC et DA sont adiabatiques. L'objectif est de prouver que :

$$\frac{Q_H}{T_H} = \frac{Q_B}{T_B}$$

qui est un élément crucial pour montrer que l'entropie est une fonction d'état.



(i) Montrez que les quantités de chaleurs échangées sur les arcs isothermes sont respectivement :

$$Q_H = nRT_H \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$$Q_B = nRT_B \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)$$

(ii) En utilisant la relation entre volume et température pour une transformation adiabatique, montrez que :

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C}$$

(iii) En déduire : $\frac{Q_H}{T_H} = \frac{Q_B}{T_B}$

(iv) Calculez le travail fait sur chaque branche du cycle et montrez que le travail total est :

$$W' = nR(T_H - T_B) \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

(v) Trouvez le rendement du moteur.

61. Un moteur de Carnot opère entre les températures $T_H = 850$ K et $T_B = 300$ K. Le travail fourni sur un cycle est 1 200 J. La durée d'un cycle est de 0,25 s.

(i) Quel est le rendement de ce moteur ?

(ii) Quelle est la puissance moyenne de ce moteur ?

(iii) Quelle quantité de chaleur est transférée du réservoir T_H ?

(iv) Quelle quantité de chaleur est évacuée vers le réservoir T_B ?

(v) Quelle est la variation d'entropie du gaz lors du contact avec la source chaude ? et lors du contact avec la source froide ? Quelle est la variation d'entropie du gaz sur le cycle ?

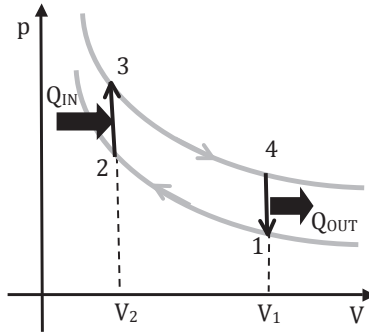
62. Un moteur de Carnot fonctionne avec de l'air, molécules d'azote essentiellement (diatomiques). Pendant la phase d'expansion isotherme, la pression décroît d'un facteur 5. Pendant la phase d'expansion isentropique, le travail fait par le moteur est $3,5 \times 10^2$ J.

Quel est le travail fait par le moteur sur un cycle complet ?

63. Une mole de gaz monoatomique subit un cycle de Carnot entre les températures de 400 K et 300 K. Sur la transformation isotherme du haut du cycle (les faibles pressions), le volume initial est de 1 litre et le volume final de 5 litres. Trouvez le travail fait sur le cycle et les transferts de chaleur avec les deux sources.

64. * C Le cycle d'Otto, 1876.

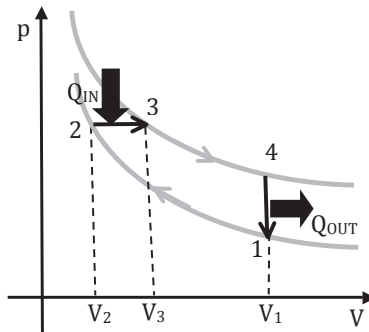
Le cycle d'Otto est une version idéalisée du cycle d'un moteur à essence. Un mélange d'air et d'essence est introduit en 1. Il subit une compression adiabatique de 1 en 2. Une étincelle est générée par la bougie sur l'étape 2-3 et la chaleur de combustion Q_{IN} du mélange entre à volume constant. Une détente adiabatique a lieu de 3 à 4. Sur le segment 4-1, les produits de combustion et la chaleur Q_{OUT} sont évacués. Le système est ouvert puisque de l'essence et de l'air entrent et sortent lors de l'injection et l'échappement, mais comme ce sont les mêmes masses de substance, on considère que le système {air} subit un cycle fermé.



Montrez que le rendement du moteur est $\eta = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}$ avec $\gamma = C_p/C_v$ et r le rapport de compression $r = V_1/V_2$. Ce rapport r ne peut pas être trop grand, car sinon apparaît une pré-ignition spontanée sur le trajet 1-2 de compression avant l'intervention de la bougie. En pratique, pour les moteurs commerciaux $7,5 \leq r \leq 10$ et $\gamma_{AIR} = 1,4$. Frottement et conduction thermique réduisent fortement le rendement des moteurs réels.

65. * Le cycle Diesel

L'air est comprimé adiabatiquement du point 1 à 2 jusqu'à la pression atteinte en 2 où l'essence diesel injectée peut s'enflammer spontanément. L'essence est injectée de façon à ce que la combustion se fasse à pression quasi constante entre 2 et 3 et le volume augmente. Le reste est identique au cas du cycle d'Otto ci-dessus.



Montrez que le rendement de ce moteur diesel est :

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{r_E^{-\gamma} - r_C^{-\gamma}}{r_E^{-1} - r_C^{-1}}$$

avec $r_E = V_1/V_3$ le rapport d'expansion et $r_C = V_1/V_2$ le rapport de compression. Comme uniquement de l'air est comprimé sur le trajet 1-2, il n'y a pas de risque de pré-ignition et le rapport de compression peut être plus grand que pour le moteur à essence. On pourra prendre $r_C = 15$, $r_E = 5$ et $\gamma_{\text{AIR}} = 1,4$ pour calculer le rendement.

66. C Une auto roule à 95 km h^{-1} . En brûlant l'essence, le moteur fournit un travail mécanique au taux de $2,7 \times 10^4 \text{ J s}^{-1}$. Le rendement du moteur est de 30 %. Quel volume d'essence est-il brûlé par seconde ? En déduire le nombre de litres consommés au 100 km. La combustion de l'essence fournit une énergie $4,4 \times 10^7 \text{ J kg}^{-1}$ et sa masse volumique est $7,2 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}$.

67. L'enthalpie de combustion de l'essence est de 47 kJ mole^{-1} . Un moteur d'avion fonctionne entre 1500 K et 700 K . Quelle altitude maximum un avion de 400 kg peut-il atteindre lorsque 5 moles d'essence sont brûlées ?

68. C Un réfrigérateur idéal fait 200 J de travail pour extraire 600 J du compartiment froid. Quel est le coefficient de performance du réfrigérateur ? Quelle quantité d'énergie est transférée à la cuisine ?

69. C Le moteur d'un réfrigérateur a une puissance de 200 W . La température du congélateur est de 270 K et l'air extérieur est à 300 K . Supposant que ce soit un réfrigérateur de Carnot, quelle est la quantité maximum d'énergie qui peut être extraite du freezer en 10 minutes ?

70. Trouvez le travail minimum nécessaire pour extraire une quantité de chaleur de 1 joule d'un corps à la température de 0°C quand la température de l'environnement est de 20°C .

71. Une pompe à chaleur maintient la température d'une maison à 20°C alors que la température extérieure est de 3°C . Calculez le travail minimum nécessaire pour transférer 100 J de chaleur vers l'intérieur.

72. C Une pompe à chaleur alimentée électriquement fonctionne sur un cycle de Carnot. La source à basse température est un tuyau de 10 m enfoncé dans le sol où la température est de 10°C toute l'année. La source chaude, l'intérieur de la maison, est à 20°C .

(i) Quelle quantité de chaleur est délivrée à l'intérieur de la maison pour chaque joule d'électricité utilisée ? Déterminez le coefficient de performance.

(ii) Faire le même calcul si maintenant l'air extérieur à $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ est pris comme source froide.

Cela vaut-il le coup de creuser ce trou de 10 m ?

73. C En utilisant les données des constantes utiles, calculez la capacité thermique de l'atmosphère et de l'océan (le produit masse \times chaleur spécifique). Comparez. Soumis au flux solaire moyen 240 W m^{-2} (au sommet de l'atmosphère) pendant un siècle, calculez le rapport des températures atteintes par chaque milieu. Discutez.

74. Quelle taille de panneau solaire faut-il utiliser en camping pour faire fonctionner une télévision de 100 W ? Le forçage solaire moyen à la surface terrestre est $Q_S = 160\text{ W m}^{-2}$ et le rendement du panneau est de 15 %.

75. La consommation annuelle mondiale d'énergie électrique atteignait $23,7 \times 10^3\text{ TWh}$ en 2017. Le forçage solaire moyen à la surface terrestre est $Q_S = 160\text{ W m}^{-2}$. Quelle surface de panneau solaire de rendement 15 % faudrait-il utiliser pour produire toute cette électricité ?

76. C Le soleil émet comme un corps noir. Calculez sa température d'émission avec la loi de Stefan-Boltzmann. La luminosité du soleil est $L_0 = 3,9 \times 10^{26}\text{ W}$ et la photosphère a un rayon $r_S = 6,96 \times 10^8\text{ m}$.

77. C Jupiter est à une distance de 5,19 UA du Soleil dont la luminosité vaut $L_0 = 3,9 \times 10^{26}\text{ W}$. L'albédo de Jupiter est de 0,52. Calculez la température d'émission de Jupiter. La température d'émission observée est de 124 K. Comment expliquer la différence avec la valeur calculée ?

78. C L'albédo de la Lune est $\alpha = 0,11$. Le flux solaire est le même que sur la Terre, mais elle n'a ni atmosphère ni océan et donc aucun moyen de transporter la chaleur d'un point à un autre (autrement que par la faible conduction thermique des roches). Calculez la température en un point de la Lune à l'équilibre thermique quand les rayons solaires font un angle θ avec la normale à la surface en ce point. Tracez $T(\theta)$. Quelle est la température maximale atteinte sur la Lune ? Pourquoi n'est-elle pas observée sur la Terre ?

79. C Quelques caractéristiques de Mars sont données dans le tableau suivant :

Température de surface [K]	Masse [kg]	Rayon [km]	Distance au Soleil [UA]	Albédo	Pression au sol [bar]
223	$0,642 \times 10^{24}$	3 390	1,52	0,25	6×10^{-3}

(i) Mars se situe à une distance moyenne du Soleil $d = 2,28 \times 10^{11}$ m (1,52 UA) dont la luminosité est $L_0 = 3,84 \times 10^{26}$ W. Calculez la température d'émission de Mars et comparez avec la température observée. Calculez l'effet de serre.

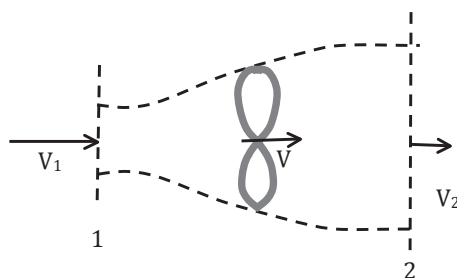
(ii) Calculez la gravité sur Mars (voir chapitre 7). En déduire la masse d'une colonne d'un m^2 d'atmosphère martienne. Comparez avec la Terre. Calculez la masse totale de l'atmosphère martienne.

(iii) L'atmosphère martienne est composée essentiellement de dioxyde carbone. Voici les rapports en volume des différents gaz :

	CO ₂	N ₂	Ar	O ₂
$Y_i = V_i/V$	0,953	$2,7 \times 10^{-2}$	$1,6 \times 10^{-2}$	$1,30 \times 10^{-3}$

Calculez le nombre de moles et la masse de CO₂ sur Mars (voir exercice 82).

80. * C La limite de Betz des éoliennes : une application du théorème de l'énergie cinétique.



L'écoulement stationnaire a une vitesse V_1 en amont de l'éolienne, une vitesse V sur l'éolienne et une vitesse V_2 en aval de l'éolienne. Pour appliquer le théorème de l'énergie cinétique, on considère le bloc de fluide dont les limites sont en pointillé sur la figure ci-dessus. La section du volume est A_1 en amont, A_2 en aval et A est la surface balayée par l'éolienne. Le théorème de l'énergie cinétique appliquée à ce bloc de fluide demande de calculer le travail de la force exercée par l'éolienne. Trouver la force est une application de la relation 9-11 obtenue en considérant le déplacement du bloc de fluide pendant un temps Δt .

(i) Appliquez la conservation de la masse du bloc pendant le temps Δt .

(ii) Calculez la variation d'énergie cinétique du bloc de fluide pendant le temps Δt (c'est-à-dire la puissance).

(iii) Calculez la force F exercée par l'éolienne et le travail par unité de temps Δt .

(iv) En écrivant le théorème de l'énergie cinétique pour le bloc de fluide, montrez que la vitesse au niveau de l'éolienne est :

$$V = 1/2(V_1 + V_2)$$

(v) Écrire le rendement, rapport de la puissance P extraite par l'éolienne à la puissance disponible $P_0 = \frac{1}{2} \rho A V_1^3$, en fonction de $x = V_2/V_1$. Montrez que le rendement est maximal pour une valeur de x que l'on déterminera. En déduire la valeur maximale de P/P_0 .

81. On dit parfois à tort que la biologie des organismes viole la deuxième loi parce que les réactions biochimiques réduisent l'entropie en convertissant des éléments chimiques bruts, disparates en substances organiques faites de macromolécules très ordonnées. Mais cet argument néglige les échanges de chaleur entre le corps et son environnement. Supposons que la chaudière interne (l'estomac) qui brûle les aliments fournisse 100 W au corps (le système) et que la même puissance thermique soit perdue par le corps humain au repos. On appelle cela le métabolisme basal car aucun travail musculaire n'a lieu. La température du corps est de 37 °C, celle de l'environnement de 20 °C, calculez le changement d'entropie de l'ensemble {corps + environnement} et concluez.

82. C L'atmosphère est composée d'un mélange de gaz. Les principaux N_2 et O_2 ont un rapport de volume de 78,1 % et 21 % respectivement. Le rapport de volume $Y_i = V_i/V$ est la fraction en volume occupé par un gaz #i comprenant n_i moles aux conditions standards de température et de pression, et donc :

$$pV_i = n_iRT$$

Le gaz total comprenant $n = \sum n_i$ moles, occupant le volume $V = \sum V_i$ aux mêmes conditions de p et T a pour équation d'état :

$$pV = nRT$$

On en déduit :

$$Y_i = \frac{V_i}{V} = \frac{n_i}{n}$$

Pour un gaz #i occupant un volume V à la température T de nombres de moles n_i , la pression partielle est donnée par :

$$p_i V = n_i RT$$

et la loi de Dalton dit que la pression totale est la somme des pressions partielles :

$$p = \sum p_i$$

On en déduit que l'on a aussi :

$$Y_i = \frac{V_i}{V} = \frac{n_i}{n} = \frac{p_i}{p}$$

La masse de l'atmosphère est $m_{ATM} = 5,3 \cdot 10^{18}$ kg et la masse molaire équivalente du mélange de gaz qui constitue l'air sec est $M_{AIR} = 28,97$ grammes.

(i) Calculez le nombre de moles d'air, d'azote et d'oxygène présentes dans l'atmosphère.

Calculez aussi la masse d'azote et la masse d'oxygène.

(ii) Sur 2000-2013, la combustion des réserves fossiles a consommé $9,5 \times 10^{14}$ moles de O_2 par an. Si la production d'oxygène par photosynthèse dans les couches superficielles de l'océan et dans les forêts devait brutalement cesser, combien d'années faudrait-il pour que l'oxygène présent dans l'atmosphère soit entièrement consommé par la combustion ?

(iii) La concentration en CO_2 en 2017 était $Y_{CO_2} = 405$ ppmv (1 ppmv = partie par million en volume). Calculez le nombre de moles et la masse de CO_2 .

(iv) Le volcanisme injecte 0,1 GtC (giga tonnes de carbone) par an. Calculez le nombre de moles de CO_2 injectées par an. En supposant comptant ce flux d'injection, calculez le temps nécessaire qu'il aurait fallu pour arriver à la concentration actuelle sous l'effet de ce seul volcanisme, c'est-à-dire en l'absence d'activité photosynthétique et d'absorption par l'océan.

83. C La masse atomique du carbone stable $^{12}_6C$ est $m = 12$ u. Calculez l'énergie de cohésion du carbone par nucléon. Comparez avec la valeur de la figure 10.38.

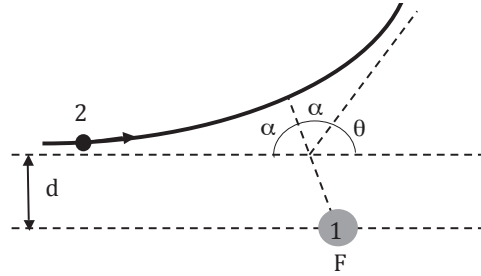
Même question pour l'uranium naturel $^{238}_{92}U$ de masse $m = 238,05$ u. Cet isotope est transformé par enrichissement en l'élément fissile $^{235}_{92}U$ qui est le combustible des centrales nucléaires.

84. C Un spectrographe de masse permet de trouver que le rapport du nombre d'atomes stable d'argon $^{40}_{18}Ar$ au nombre d'atomes radioactif de potassium $^{40}_{19}K$ d'une roche lunaire est de 10,3. Si on suppose que tout l'argon de cette roche provient de la désintégration radioactive du potassium avec une demi-vie $T_{1/2} = 1,25 \times 10^9$ an, quel est l'âge de cette roche lunaire ? (et donc l'âge de la Terre).

Exactement la même technique de datation radioactive a été utilisée pour dater les eaux océaniques. En effet dans les années 1960, les tests de bombes thermonucléaires étaient effectués à l'air libre dans le Pacifique. Le tritium produit dans l'atmosphère est ensuite entré dans les océans aux hautes latitudes lors de la convection hivernale puis transporté vers les plus basses latitudes par les mouvements océaniques tout en se désintégrant en hélium 3 avec une demi-vie de 12,3 ans. La mesure du couple tritium-hélium 3 a permis de trouver l'âge de la particule d'eau depuis le moment où elle a quitté la surface de l'océan.

85. * C L'identification de la taille du noyau atomique par Rutherford, 1911

Une particule α de masse m_2 et de charge positive q_2 (appelée 2) approche un atome d'or de charge q_1 (appelé 1). La particule 2 a une vitesse V selon une droite qui est à une distance d de 1. La cible 1 est beaucoup plus massive et reste donc immobile ($m_1 \gg m_2$) et on ignorera l'attraction des électrons avec la particule 2.



La force électrostatique entre 1 et 2 est centrale et s'exprime par :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \text{ avec } \epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ SI}$$

de sorte que toute l'analyse de la gravitation universelle avec une force en k/r^2 et $k = Gm_1 m_2$ reste valable avec $k = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$. La particule 2 décrit une branche d'hyperbole de foyer F à la position de 1 qui est donc l'origine des coordonnées polaires de la trajectoire. On se référera au § 7.4.3.2 du chapitre Gravitation.

Connaissant direction et vitesse de la particule, soit d et V, l'objet de l'exercice est de trouver l'angle θ de la déviation. L'hyperbole est définie si on connaît les demi-grand axe et demi-petit axe a et b de l'hyperbole.

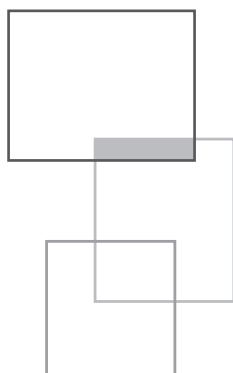
(i) Utilisez l'équation en coordonnées cartésiennes pour montrer que le demi-angle α entre les deux asymptotes de l'hyperbole est :

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}$$

(ii) Montrez que pour une hyperbole, l'énergie totale $E = k/2a$ et le moment cinétique J est $J^2 = m_2 k \frac{b^2}{a}$.

(iii) Déterminez E et J à partir des conditions initiales et en déduire les paramètres a et b de l'hyperbole.

(iv) Obtenir θ en fonction de d. Étudiez cette fonction, car la source de particules α émet un faisceau de particules avec toute une distribution de valeurs de d. Discutez.



Chapitre 11

Tension superficielle et phénomènes capillaires

11.1 Introduction

Lorsque deux lames de verre légèrement humides sont mises en contact, elles semblent collées l'une à l'autre et il est quasiment impossible de les détacher à la main. Pourquoi ne voit-on jamais de gouttes d'eau cubiques ou polygonales ? Comment se fait-il qu'une goutte d'huile dans l'eau et une bulle de savon forment toujours une sphère ? Des phénomènes curieux sont présents dans la vie de tous les jours dont la question du pourquoi et du comment reste évasive. Par exemple : l'élimination des taches par la lessive, l'humidité dans les murs, le pompage d'un buvard, l'éponge, la bulle de savon, la lampe à huile, les serviettes en papier, le stylo, l'ascension d'un liquide dans un tube capillaire avec formation d'un ménisque de surface, la flottaison d'une aiguille en acier à la surface de l'eau, les ondes qui apparaissent quand on pousse une petite cuiller dans l'eau... Quelle est la force de rappel derrière l'existence de ces ondes capillaires ? Pourquoi certains insectes patinent-ils sur l'eau avec grâce et facilité ? La vie des insectes, la formation des gouttes, des stalactites et le léger frémissement ondulatoire de la surface de l'eau lorsque l'on souffle dessus ainsi que de nombreux autres phénomènes rencontrés au quotidien conduisent à introduire la notion de **tension superficielle**.

Lorsqu'on observe le matin une goutte de rosée sur une feuille, elle semble avoir un emballage invisible qui maintient sa forme sphérique, qui lisse sa surface et qui

présente une résistance à la moindre déformation. Ce sentiment que l'eau est emballée dans une membrane élastique est encore plus accentué quand on voit la forme prise par la surface de l'eau quand un verre est rempli à ras bord. En plaçant son œil sur le bord supérieur du verre, la surface de l'eau est gonflée en forme de « dôme » au-delà du bord du verre. Elle ne déborde pourtant pas, ce qui indique que la surface de l'eau est dans un état de tension. Tous les phénomènes cités précédemment démontrent qu'une tension superficielle existe à la surface d'un liquide délimitée par l'air ou par sa propre vapeur.

Le fait que l'huile calme la mer est connue des marins depuis l'Antiquité. Une première expérience contrôlée fut réalisée par B. Franklin en 1772. Il prit une cuiller d'huile qu'il versa à la surface d'un étang de Clapham Junction (au sud-ouest de Londres). L'huile s'étala sur une grande surface qu'il détermina en observant les petites vagues générées par la brise dont on a parlé plus haut. Ces ondes capillaires disparaissent en effet en présence d'huile. Il obtint une surface de 100 m^2 ! En divisant le volume de l'huile versé par la surface, il trouva que l'épaisseur de l'huile est de l'ordre du nanomètre, ce que Rayleigh associa cent ans plus tard à la taille d'une molécule d'huile. L'huile s'étale comme un film mono-moléculaire.

Ces propriétés des surfaces ont des applications dans des domaines aussi variés que la biologie cellulaire, les procédés de lubrification ou de nettoyage (la lessive). Cette physique a pour origine les travaux de Young et Laplace en 1806 et 1807 respectivement et on sait aujourd'hui qu'elle est dictée par le comportement des molécules près de la surface. L'unité de longueur qui va revenir souvent dans ce chapitre est effectivement la taille des molécules, le nanomètre ou $\text{nm} = 10^{-9} \text{ m}$ ou 10 \AA (angström).

11.2 Expériences simples

Considérons une lame d'eau savonneuse adhérent à un cadre formé de fils rigides. Les trois côtés du cadre rectangle sont immobiles et le quatrième est mobile, avec la possibilité de glisser sur les deux côtés du rectangle restant parallèle au troisième côté comme l'illustre la figure ci-dessous.

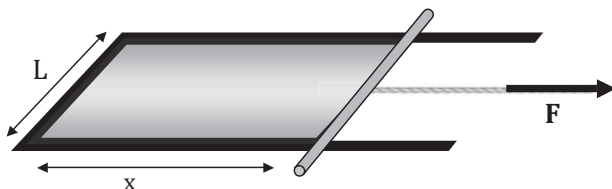


Figure 11.1

Lame mince d'eau savonneuse de longueur x et de largeur L . L'aire superficielle de contact entre le savon et l'air est $2(Lx)$.

Cette lame de savon étendue sur les 4 côtés du cadre peut être comparée à une membrane tendue. Lorsqu'un élastique tendu est relâché, sa surface a tendance à redevenir aussi petite que possible. C'est le même comportement caractéristique pour la lame de savon. Afin d'immobiliser le cadre mobile, il faut appliquer une force extérieure \mathbf{F} qui annule celle fournie par la tension superficielle. L'expérience montre que cette force est proportionnelle à la longueur de la ligne de contact du cadre mobile avec la surface de l'eau savonneuse. Cette observation permet de définir le coefficient de tension superficielle γ comme la force exercée par unité de longueur de la ligne de contact entre l'eau savonneuse et le cadre mobile :

$$\gamma = \frac{F}{2L}$$

F est le module de la force et L la longueur de la ligne de contact. Le facteur 2 au dénominateur tient compte du fait que le film a une épaisseur et donc deux faces, de sorte que la ligne de contact est 2 fois plus longue. On peut aussi définir le coefficient d'un film avec ses deux faces comme $\gamma_F = 2\gamma$ et la formule précédente s'écrit :

$$\gamma_F = \frac{F}{L}$$

L'unité de mesure de la tension superficielle dans le système international d'unités est donc le N m^{-1} . La valeur du coefficient de tension superficielle ne dépend pas seulement du fluide savonneux mais aussi du milieu en contact (l'air dans l'expérience ci-dessus). Il varie aussi avec la température.

Le coefficient de tension superficielle peut être mesuré par un dynamomètre et historiquement, l'une des premières méthodes de mesure est le tensiomètre en anneau de platine, proposée par P. Lecomte du Noüy (schématisé dans la figure ci-après). Il permet de mesurer la force exercée par un fil de traction juste avant l'arrachement d'un anneau immergé dans le liquide dont on cherche la tension superficielle.

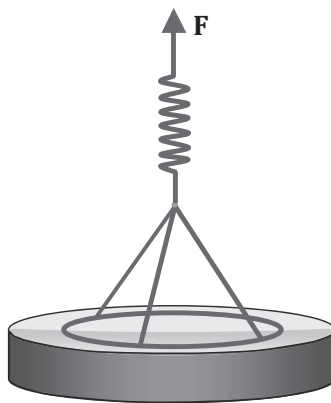


Figure 11.2

La mesure du coefficient de tension de surface par P. Lecomte du Noüy.

Généralement on remonte très doucement l'anneau en platine du liquide à étudier pour étirer un film au-dessous de l'anneau. Alors en mesurant la force d'arrachement F à l'aide d'un dynamomètre, le coefficient de la tension superficielle γ est déterminé par

$$\gamma = \frac{F}{2\pi(r_1 + r_2)}$$

où r_1 et r_2 sont respectivement les rayons intérieur et extérieur. On suppose que les forces capillaires sont verticales lors de l'arrachement. La valeur typique du coefficient de tension superficielle de l'eau à 20 °C est d'environ 0,073 N m⁻¹. Celui du mercure à la même température est 0,487 N m⁻¹, environ 7 fois plus important que l'eau. Le savon abaisse de façon significative la tension superficielle de l'eau, γ n'est plus que de 0,025 N m⁻¹, pour l'eau savonneuse, trois fois plus petit.

11.3 Origine moléculaire, tension superficielle et énergie de surface

11.3.1 Les molécules en surface

Le phénomène illustré sur la figure 11.1 ne peut s'expliquer par les forces de pression et les lois de l'hydrostatique. Il a pour origine le comportement différent des molécules en surface et des molécules présentes dans l'intérieur du fluide, un comportement qui donne à la surface sa nature élastique. Les forces entre molécules d'un solide ont été discutées au chapitre 3 : elles sont attractives jusqu'à une distance de l'ordre du nm pour devenir répulsives si elles se rapprochent davantage (figure 3.7). C'est la même chose dans un liquide, les molécules sont maintenues très proches les unes des autres, grâce aux forces électrostatiques entre les particules chargées qu'il contient. Si ces forces deviennent trop faibles, le matériau ne peut pas exister sous la forme d'un solide ou d'un liquide et se transformera en un gaz de molécules individuelles désordonnées. Il y a plusieurs cas possibles. Les charges négatives d'une molécule H₂O sont plus proches de l'atome d'oxygène de sorte que la position moyenne des charges positives et négatives ne coïncident pas. Une telle molécule est appelée *polaire* et la charge électrique \times la séparation des positions définit son moment dipolaire. Les forces entre ces molécules sont de type dipôle-dipôle. À l'inverse, une molécule *non polaire* est celle pour laquelle les centroïdes des positions des charges positives et négatives coïncident, la molécule d'oxygène O₂ par exemple. La figure suivante montre le comportement des molécules au voisinage d'un interface liquide-gaz.

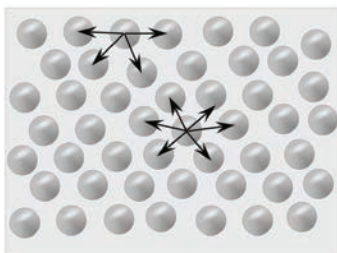


Figure 11.3

La figure montre les forces d'attraction d'une molécule par ses voisines dans l'intérieur et en surface.

Une molécule au milieu du liquide subit les forces d'attraction avec toutes ses voisines situées dans un voisinage proche de quelques nm autour d'elle. En revanche les molécules de la surface n'ont pas de voisins en interaction au-dessus d'elles et sont davantage attirées par les molécules du fluide situées en dessous. Bien sûr il y a aussi des forces d'attraction des molécules de gaz au-dessus, mais la densité moléculaire est beaucoup plus faible et les forces d'interaction également. En conséquence, les forces agissant sur les molécules de surface pointent vers l'intérieur de la surface et ne sont pas équilibrées. La résultante des forces de surface aura pour effet de vouloir réduire la surface si cette surface est libre de changer pour éventuellement en faire une goutte d'eau sphérique. En effet, à volume constant, l'aire minimale est celle de la sphère. L'effet net des forces sur les molécules en surface est de mettre la surface en tension sur une épaisseur de quelques nm.

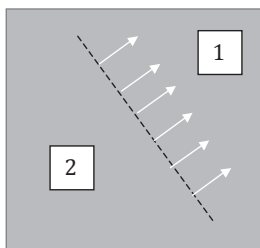


Figure 11.4

Le fluide du côté 1 de la ligne pointillée tire sur le fluide 2 de l'autre côté.

On trace une ligne quelconque à la surface du fluide (la ligne pointillée) sur la figure 11.4. Le fluide du côté 1 tire sur la surface avec une force perpendiculaire à la droite pointillée. Inversement le fluide du côté 2 tire avec une force égale et opposée le fluide situé du côté 1. Cette surface mince est une membrane élastique sous tension. La force est proportionnelle à la longueur de la ligne et on est amené à définir la tension de surface comme :

$$F = \gamma L$$

11-1

où l'on retrouve le coefficient de tension de surface γ en $[\text{N m}^{-1}]$, une caractéristique de l'interface et L la longueur de la ligne. La surface sera en tension uniforme si (i) la force est toujours perpendiculaire à n'importe quelle ligne tracée sur la surface et si (ii) le coefficient γ est constant.

Note :

Cette tension de surface existe aussi à un interface fluide-solide ou entre deux fluides différents s'ils restent non miscibles.

Considérons une interface liquide-gaz (air et eau) et introduisons une toute petite quantité de surfactant, la substance active des détergents et des lessives. Ces molécules (de 1 à 2 nm de long) possèdent deux propriétés surprenantes. La tête dite polaire, un groupe carboxyl COOH , une fonction acide, est hydrophile. À l'inverse, la queue, une chaîne aliphatique (composée de 12 à 20 groupes CH_2), déteste l'eau et est hydrophobe. La partie hydrophobe est non polaire. L'insertion d'une molécule non polaire dans l'eau exige une dépense d'énergie et par conséquent elle interagit difficilement avec l'eau. Une telle molécule plongée dans l'eau est très malheureuse, mais l'agitation thermique la fait éventuellement arriver en surface pour trouver une situation plus favorable, la tête restant dans l'eau et la queue hors de l'eau comme sur la figure 11.5.

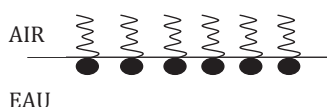


Figure 11.5

Un film de surfactant à l'interface air-eau.

Une tache de graisse sur un vêtement ne part pas avec de l'eau. Les molécules de lessive en revanche attachent leurs queues hydrophobes à la tache de graisse tandis que leurs têtes ne souhaitent que nager dans l'eau, arrachant la tache au tissu.

Les molécules de surfactant aiment une deuxième chose, créer des bicouches d'épaisseur ≈ 5 nm et pour ce faire se rangent ainsi :

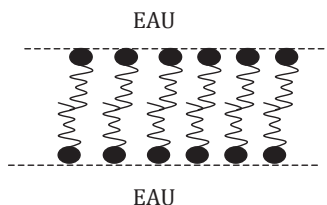


Figure 11.6

Un bicouche est constitué de deux films de surfactants.

Sur la figure 11.6, les têtes polaires baignent dans l'eau tandis que les queues aliphatiques se côtoient dans l'intérieur du bicouche. Lorsqu'on empile un bicouche, de l'eau, un bicouche, de l'eau, etc. on obtient un savon... Pour des raisons que l'on va

voir un peu plus loin, ce bicouche peut aussi s'organiser sur une sphère et la bulle de savon apparaît. Chaque cellule vivante, un milieu aqueux, est protégée par une paroi faite de tels bicouches. En 1925, des médecins hollandais, Gorter et Grindel, ont montré qu'un globule rouge est essentiellement un bicouche déformable, de 20 microns environ, suffisamment petit pour apporter l'oxygène dans les artérioles les plus fines.

Les propriétés à l'échelle moléculaire du savon ou de l'huile sont décrites par de Gennes et Badoz dans leur livre, *Les Objets fragiles*.

11.3.2 L'énergie de surface

Revenons maintenant à l'expérience du cadre mobile de la figure 11.1. Si on ne retient plus le cadre mobile, il va glisser vers le côté en face jusqu'à disparition complète de la membrane savonneuse. Pour évaluer le travail, on va maintenant déplacer le cadre mobile d'une petite quantité Δx de la position x à $x + \Delta x$ sur la figure 11.7.

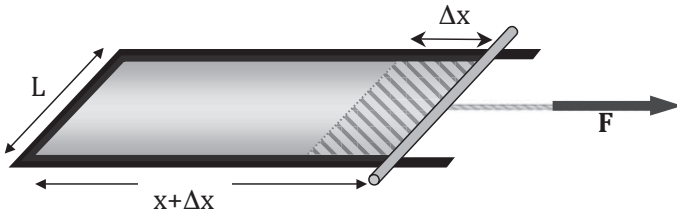


Figure 11.7

Le travail de la tension de surface quand on augmente la surface du film de x à $x + \Delta x$.

Le travail de la tension de surface (dans la direction opposée à la force F) quand on tire sur le film de la position x à $x + \Delta x$ est :

$$W = -\gamma_F L \Delta x = -\gamma_F \Delta A$$

avec la variation d'aire $\Delta A = L\Delta x$. Exactement comme pour l'énergie potentielle du ressort, on peut alors définir une énergie de surface E avec $W = -\Delta E$, ce qui donne :

$$\Delta E = \gamma_F \Delta A \quad 11-2$$

L'énergie nécessaire pour augmenter la surface de 0 à A est donc :

$$E = \int_0^A \gamma_F dA$$

ou pour un seul interface :

$$E = \int_0^A \gamma dA$$

et si γ_F et γ sont constants, cela devient :

$$E = \gamma_F A \text{ ou } E = \gamma A \quad 11-3$$

Le coefficient de tension de surface est donc aussi une énergie par unité de surface en $[J \cdot m^{-2}]$. Lorsque l'opération ci-dessus est faite à température constante et volume constant, l'énergie de surface E est l'énergie libre de Helmholtz, la part de l'énergie capable de fournir du travail mécanique, voir § 10.5.3. Pour créer une surface, il faut enlever des molécules au-dessus d'elles comme sur la figure 11.3 et cela demande une énergie proportionnelle à la surface qu'on veut créer. On a déjà vu qu'un minimum d'énergie potentielle est l'état final pour un système mécanique lorsqu'il y a amortissement dû au frottement. Ici aussi, laissé libre, le système va se placer dans un état d'énergie libre minimum et donc d'aire minimale compatible avec les conditions aux limites.

11.3.3 Applications

Le résultat précédent apprend que la surface d'un liquide tend à devenir la plus petite possible afin de minimiser l'énergie libre de la surface du liquide, ce qui a des conséquences pratiques dans de nombreux domaines.

(i) Pourquoi le savon intervient-il dans les bulles ou dans les films ? Il intervient en modifiant l'énergie de surface. Le savon est une molécule de la famille des surfactants dont les molécules se placent en surface, tête dans l'eau et queue dans l'air en une monocouche, de sorte que d'infimes quantités comme 2 mg suffisent pour couvrir 1 m^2 . L'énergie de surface est abaissée d'un facteur 10 permettant de faire des films de grande surface.

(ii) Il existe une branche des mathématiques initiée par Euler, l'inventeur du calcul des Variations, qui s'intéresse aux volumes qui sous certaines contraintes ont des surfaces minimales. Plateau publia en 1873 les résultats de nombreuses expériences sur des films de savon sous conditions aux limites variées. Aujourd'hui un problème de Plateau désigne la détermination d'une surface minimale entourée par une frontière.

(iii) Ce principe intéresse beaucoup les architectes, puisqu'une surface minimale permet d'économiser la quantité de matériaux utilisés. Il est même possible de réduire les contraintes physiques en reproduisant des formes sur une armature qui ressemble à un film de savon. De telles structures ont été construites par exemple en Allemagne pour le stade olympique de Munich, l'Institut des structures légères de l'Université de Stuttgart, le Centre national de natation à Pékin, appelé également Water Cube et son stade national, également connu sous le surnom de Nid d'Oiseau. On peut citer également le Stade olympique 1976 de Montréal conçu par l'architecte Roger Taillibert, et le Toyo Ito, l'Opéra de Taichung à Taïwan. À Tokyo, se trouve un remarquable palais des sports dans le parc de Yoyogi qui se distingue par la forme de surface minimale de son toit en suspension, ainsi qu'un magnifique pavillon au centre de la ville.

(iv) Il faut aussi mentionner l'impact très enrichissant du principe de surface minimale sur l'art. Des artistes tels que Ketí Tenenblat, Bathsheba Grossman, Michael Foster, John M. Sullivan, Tobias Walliser, Costa-Hoffman-Meeks, Frei Otto, Alan Mackay, Nat Friedman, Maren Klasing et Martin Krcha, etc. ont été très inspirés par les surfaces minimales.

(v) Si la surface d'un liquide tend à devenir la plus petite possible afin de minimiser l'énergie de surface, on peut en déduire qu'en apesanteur la forme d'une goutte est sphérique, parce que la sphère a une surface minimale parmi toutes les autres formes de même volume. Les cosmonautes confirmeront ces observations comme en témoignent les références vidéos. On y observe notamment des gouttes dans l'espace en état d'apesanteur et on se rend compte de l'importance de la tension superficielle dans la vie des cosmonautes.

11.4 Relation de Laplace-Young et applications

11.4.1 La relation de Laplace-Young

On a présenté la tension superficielle comme la conséquence directe de la dissymétrie des forces de cohésion sur les molécules de liquide près de la surface. Les forces mises en jeu à la surface d'un liquide dans les configurations de surface minimale ont tendance à faire contracter la surface, et par conséquent créent une pression supplémentaire. Ainsi la dissymétrie des forces de part et d'autre de la surface se manifeste par une discontinuité de la pression. Dans le chapitre précédent on a toujours supposé que la pression était continue. Ainsi la pression juste sous la surface de l'eau était prise égale à la pression atmosphérique dans l'air juste au-dessus. On découvre ici que ceci n'est vrai que si l'interface air-eau est plat et n'est plus vrai si la surface est déformée sur des petites échelles. L'objectif est donc ici de déterminer cette surpression, la relation de Laplace-Young.

Pour calculer la surpression Δp qui existe entre l'intérieur d'une bulle de savon et l'air environnant, on procède en considérant une demi-sphère :

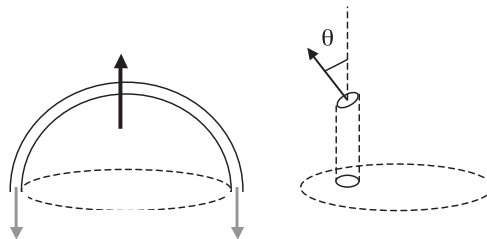


Figure 11.8

Une demi-sphère est utilisée pour calculer la résultante de la force de pression (en noir) nécessaire pour équilibrer les forces de tension de surface (en gris) causée par la sphère inférieure.

Cette demi-sphère est soumise aux forces de tension de surface et à la résultante de la force de pression, le poids de la bulle étant négligé. La force de surface est simplement γ_F fois le périmètre du cercle pointillé. En un point quelconque de la calotte, la force de pression sur un élément d'aire ΔA est $\Delta p \Delta A \mathbf{n}$ avec \mathbf{n} le vecteur normal à la surface. Mais il faut encore projeter cette force sur la direction verticale pour trouver la participation à la résultante verticale $\Delta p \Delta A \cos \theta$, avec θ l'angle entre \mathbf{n} et la verticale. Le dessin à droite de la figure 11.8 montre que $\Delta A \cos \theta$ n'est autre que la projection de l'aire sur la base ΔA_p . La résultante s'obtient en sommant tous les ΔA_p sur la surface de la base qui n'est autre que πr^2 . Au final l'équilibre statique de la bulle demande :

$$\Delta p \pi r^2 = 2\pi r \gamma_F \quad \text{ou} \quad \Delta p = \frac{2\gamma_F}{r} \quad 11-4$$

Comme on va le voir, la relation 11-4 est un cas particulier de la relation de Laplace-Young. On peut la retrouver par une approche énergétique en calculant l'énergie qui est nécessaire pour gonfler une bulle de rayon r à un rayon $r + \Delta r$, où Δr est un accroissement infinitésimal du rayon. Le travail requis est :

$$\Delta W = (p_1 - p_2) \Delta V = (p_1 - p_2) 4\pi r^2 \Delta r$$

où $\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r$ est l'augmentation du volume de la sphère et $p_1 - p_2$ la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la sphère. L'évaluation de l'augmentation de l'aire de la surface est directe : $\Delta A = 8\pi r \Delta r$ et par conséquent on peut évaluer l'énergie nécessaire pour cette expansion de la bulle par :

$$\Delta E = \gamma_F \Delta A = 8\gamma_F \pi r \Delta r$$

En écrivant que $\Delta W = |\Delta E|$, on retrouve la relation 11-4.

Lorsque r augmente, la différence de pression $p_1 - p_2$ diminue, et par conséquent la surpression est plus grande dans une petite bulle que dans une grande. Ainsi quand on met deux bulles en contact, la plus petite va se dégonfler dans la plus grande.

Considérons maintenant une goutte pleine d'eau de forme sphérique de rayon r .

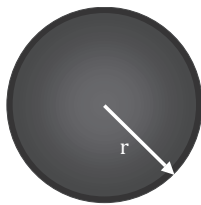


Figure 11.9

Une goutte pleine d'eau de forme sphérique.

La différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur d'une sphère pleine en raison de la tension superficielle est donnée par la relation de Laplace-Young :

$$p_1 - p_2 = \frac{2\gamma}{r} \quad 11-5$$

p_1 et p_2 sont respectivement les pressions à l'intérieur et à l'extérieur de la goutte. Lorsque la surface n'est pas sphérique, le calcul de la différence de pression, la relation 11-5, est un peu plus compliqué. Young et Laplace ont introduit indépendamment la notion de courbure moyenne d'une surface.

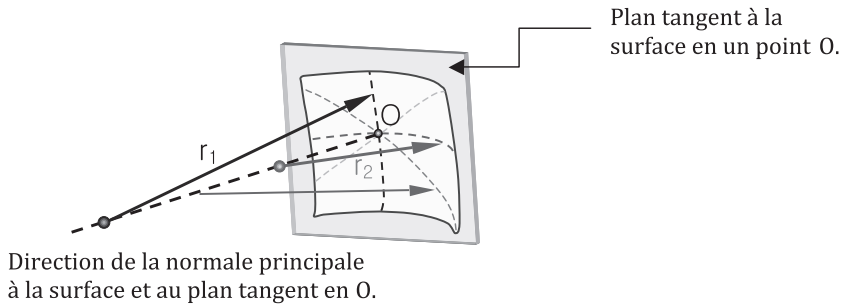


Figure 11.10

Le plan est tangent à la surface en O. Les rayons de courbure r_1 et r_2 sont définis sur deux courbes orthogonales de la surface.

La figure 11.10 montre une surface quelconque dans l'espace. En un point donné O, il y a un plan tangent qui a un seul point commun O avec la surface. L'intersection d'un quelconque autre plan avec la surface est soit une courbe, soit vide. On définit le vecteur normal à la surface, la direction normale au plan tangent en O qui sera considérée comme la direction normale principale. Il y a un nombre infini de plan normal au plan tangent et contenant la normale principale. Ces plans coupent la surface considérée selon différentes courbes, et pour chaque courbe on peut définir un rayon de courbure comme on le fait pour une courbe plane. Parmi ces rayons de courbure, on choisit les rayons de courbure minimum et maximum. À chaque point de la surface, on peut donc attribuer deux rayons principaux de courbure r_1 et r_2 , respectivement rayon maximal et minimal, l'inverse des rayons définissant les deux courbures maximale et minimale appelées courbures principales. Ces deux rayons de courbures principales existent pour la plupart des surfaces. La différence de pression entre les deux côtés séparés par cette surface sera $\Delta p = p_1 - p_2$ donnée par la relation générale de Laplace-Young :

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad 11-6$$

Dans le cas d'une sphère $r_1 = r_2 = r$, de sorte que 11-5 est un cas particulier de la relation générale de Laplace-Young. Il en est de même de 11-4 puisque $\gamma_F = 2\gamma$ (il y a deux surfaces).

11.4.2 *Montée dans un tube capillaire*

Un tube capillaire est un tuyau cylindrique de très faible diamètre intérieur $< 1 \text{ mm}$. Lorsqu'on plonge un tel capillaire en verre partiellement et verticalement dans un bac d'eau, le niveau de l'eau s'élève dans le tube plus haut que celui du bac.

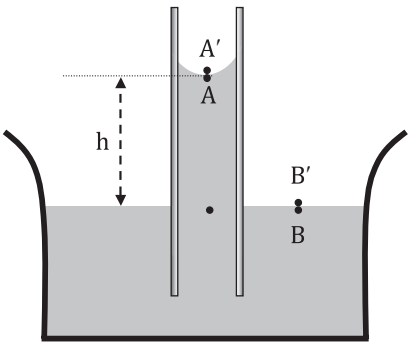


Figure 11.11

Sous l'effet de la tension de surface, le liquide monte dans un tube capillaire suffisamment fin.

La détermination de h découle de l'équilibre résultant de la compétition entre la gravité et la tension superficielle. La dépression créée par le ménisque provoque une montée d'eau et lorsque cette dépression est égale à la pression hydrostatique créée par la colonne d'eau, l'équilibre est atteint. On observe expérimentalement que la montée capillaire h est d'autant plus grande que r est petit. Dans toute cette section, on considèrera que le rayon intérieur du capillaire $r \ll h$. Considérons les points A et A' infinimentimalement proches mais situés de part et d'autre de la surface du ménisque dans le capillaire, A' dans l'air, A dans le liquide. De même, les points B et B' infinimentimalement proches, mais de part et d'autre de la surface du liquide dans la cuve, B dans le liquide et B' dans l'air.

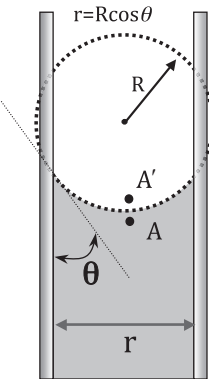


Figure 11.12

La géométrie du ménisque dans le tube.

La surface de l'eau dans le tube a la forme d'un ménisque sphérique concave. Si R est le rayon de courbure de la surface libre, les pressions aux points A et A' sont reliées par la relation de Laplace-Young :

$$p_{A'} - p_A = \frac{2\gamma}{R}$$

La différence de pression entre les points A et B est égale à la pression hydrostatique créée par la colonne d'eau de hauteur h :

$$p_A - p_B = -\rho gh$$

avec ρ la masse volumique du liquide. Il n'y a pas de différence de pression entre B et B' puisque la surface entre eux est considérée plane et qu'ils sont infinitésimalement proches :

$$p_B - p_{B'} = 0$$

Finalement les pressions aux points A' et B' sont identiques et égales à la pression atmosphérique :

$$p_{A'} - p_{B'} = 0.$$

En additionnant toutes ces équations, on obtient : $0 = \frac{2\gamma}{R} - \rho gh$. Mais le rayon de courbure R et le rayon du tube cylindrique r sont reliés par : $r = R \cos \theta$ avec θ l'angle de contact du ménisque avec le tube capillaire (voir figure 11.12), ainsi :

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r} \quad 11-7$$

aussi appelée loi de Jurin. Elle permet une détermination expérimentale de γ . Il est intéressant de retrouver 11-7 par l'observation suivante. Si on considère le volume cylindrique du tube entre les points A' et B, ce volume est en équi-pression $p_{A'} = p_B$, de sorte que les seules forces qui agissent sur lui sont le poids du volume considéré et la tension de surface au contact de la paroi du tube. La relation 11-1 indique que la force verticale nette est simplement $\gamma \cos \theta$ fois le périmètre du ménisque, l'interface fluide-solide. On peut négliger le poids de la partie du ménisque de sorte que l'équilibre se réduit à :

$$\pi r^2 h \rho g = 2\pi r \gamma \cos \theta$$

ce qui redonne 11-7.

Notes :

(i) Cette loi indique que dans un capillaire d'un millimètre, l'eau montera d'environ 1,5 cm. Et dans un capillaire 4 fois plus fin, la montée sera de 6 cm. Les cellules de xylème (le nom des cellules des plantes), de 15 μm à 25 μm de diamètre, favorisent la montée de l'eau à peu près de 0,5 à 1 m. Les plantes et les insectes utilisent l'ascension capillaire pour se nourrir.

(ii) La montée de la sève (le sirop d'érable au Québec) résulte d'un autre phénomène physique, la pression osmotique.

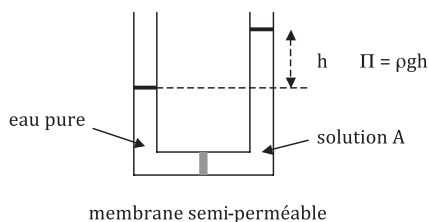


Figure 11.13

La membrane semi-perméable laisse passer l'eau mais fait obstacle aux molécules de l'espèce chimique A. À l'équilibre, une surpression apparaît du côté de la solution à droite.

Dissolvons une espèce chimique A dans l'eau (le solvant) et mettons cette solution dans l'eau en la contenant dans un réservoir fait d'une membrane semi-perméable laissant passer l'eau et faisant obstacle à l'espèce chimique A dissoute (le soluté). Lorsque le flux net d'eau pure à travers la membrane stoppe, on observe qu'une pression plus forte existe du côté soluté. C'est la pression osmotique causée par les collisions additionnelles des molécules de A sur la membrane. Sur la figure 11.13, cette surpression se calcule hydrostatiquement par la hauteur h du fluide, à savoir, $\Pi = \rho gh$. Elle existe entre l'eau dans le sol et la sève de l'arbre (le soluté), ce qui permet à la sève d'atteindre de très grandes hauteurs.

(iii) A est en sous-pression par rapport à A', car le ménisque de la figure 10.10 est concave (bombé vers le bas). Si le ménisque était convexe (bombé vers le haut), A serait en surpression. L'équilibre hydrostatique demande alors que le fluide descende dans le tube. La formule 11-7 reste correcte et prédit $h < 0$ quand l'angle θ est supérieur à 90° .

11.5 Phénomènes de mouillage

Si on pose une goutte d'eau sur une surface solide, deux situations très différentes apparaissent :



Figure 11.14

À gauche, la surface solide n'aime pas l'eau – elle est hydrophobe –, les plumes de canard en fournissent un exemple, et la goutte reste une goutte avec des angles de contact bien déterminés entre l'eau et la surface solide. On dit que le mouillage est partiel. À l'inverse à droite, la surface solide, hydrophile, aime l'eau et la goutte s'étale sur toute la surface disponible. Le mouillage est total, ce qui arrive sur une

plaque de verre très propre. Dans les conditions idéales, l'épaisseur du fluide sur la plaque devient extrêmement faible, de l'ordre de la taille des molécules. Ce sont les énergies associées aux interactions des molécules solide, fluide et gaz près de l'interface qui permettent cette variété de situations. Lors de l'étude de la montée capillaire, on a mentionné que le ménisque concave formait un angle θ avec le capillaire en verre, mais les facteurs physiques qui influent sur la valeur de cet angle n'avaient pas été précisés. L'origine des forces de tension superficielle vient du déséquilibre des forces intermoléculaires d'une surface. Intuitivement, on peut penser que ce déséquilibre va dépendre du matériau qui se trouve au-dessus de la surface. Dans le cas du capillaire, l'eau adhère à une surface de verre. Les molécules d'eau au contact du verre sont attirées plus fortement par les molécules de verre que par les autres molécules d'eau. Ainsi, cet angle de contact pourrait être défini seulement en référence aux matériaux environnants, notamment pour la surface évoquée eau-verre. Lorsque l'angle de contact $\theta < 90^\circ$, on dit que le liquide mouille la surface. Dans le cas du capillaire, l'eau mouille la surface de verre et le ménisque formé est concave. Pour le mercure, c'est le contraire. Quand on recommence l'expérience de la figure 11.11 avec le mercure, on constate une dépression entre le niveau de la cuve et le sommet du ménisque convexe qui se forme dans le tube. L'angle de contact dans le cas du mercure est $\theta > 90^\circ$. On dit qu'il ne mouille pas le verre. Le fait que le liquide mouille ou ne mouille pas la surface joue un rôle capital dans les phénomènes superficiels. Les phénomènes de mouillage sont liés aux propriétés mécaniques et physico-chimiques des surfaces et des interfaces. Leurs propriétés interviennent dans de nombreux procédés aux applications très variées. Par exemple, les insecticides sont conçus de telle sorte que leurs dépôts sur les végétaux ne forment pas de gouttes mais adhèrent aux feuilles afin que l'agent actif pénètre mieux dans la plante. Par contre, les pare-brises, les verres des lunettes, les tentes de camping et les blousons sont enduits d'une surface protectrice pour que l'eau ne s'y étale pas et qu'elle puisse s'écouler en laissant la surface sèche derrière elle.

Une goutte d'eau déposée sur une surface plane en verre tend à s'étaler. Si on dépose sur ce même support une goutte de mercure, celle-ci conserve une forme pratiquement sphérique.

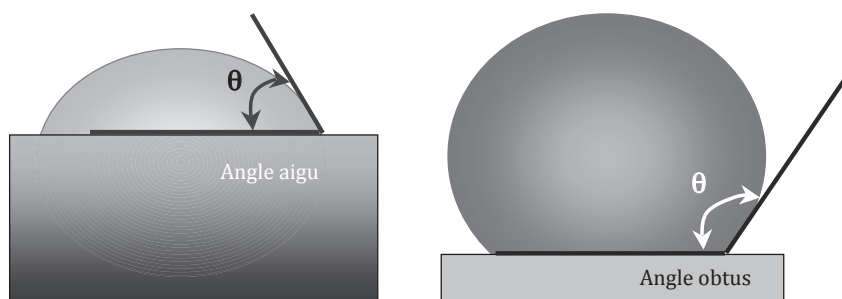


Figure 11.15

Deux situations, mouillage à gauche, non-mouillage à droite.

En référence à la figure 11.15, on distingue deux situations :

- si $\theta < 90^\circ$, on dit que le liquide mouille la surface ;
- si $\theta > 90^\circ$, on dit que le liquide ne mouille pas la surface.

L'angle de contact est un indicateur de « mouillabilité », plus il est faible, plus la surface est « mouillée ». L'angle de contact définit aussi si un matériau est hydrophile (il aime le liquide) ou hydrophobe (il déteste le liquide). Cet angle de contact peut être obtenu à partir de la condition d'équilibre en référence aux matériaux environnants. À la ligne de contact sur la figure 11.15, trois forces superficielles apparaissent sur les trois interfaces : solide-liquide (SL), solide-gaz (SG) et liquide-gaz (LG). La situation est la suivante :

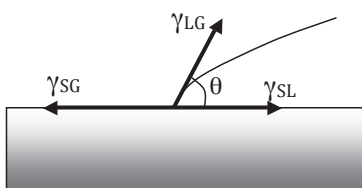


Figure 11.16

Trois forces de surface sont présentes sur la ligne de contact, une force solide-gaz, une force solide-liquide et une force liquide-gaz. Chacune des trois forces tire sur la ligne de contact.

L'équilibre statique des forces suivant l'axe horizontal requiert :

$$\gamma_{SG} = \gamma_{SL} + \gamma_{LG} \cos \theta \text{ ou } \cos \theta = \frac{\gamma_{SG} - \gamma_{SL}}{\gamma_{LG}}$$

Pour que cette relation soit possible, il faut que :

$$-1 < \cos \theta < 1.$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, l'angle de contact n'est pas défini et on ne peut pas observer l'apparition d'une goutte sur une surface et le liquide couvre entièrement la surface du solide. Comme cela a été mentionné, cet angle dépend de l'état de surface du solide ainsi que de la nature des matériaux environnants. Dans l'expérience de la montée capillaire, le comportement du ménisque de l'eau est différent lorsque l'air est remplacé par de l'huile. L'eau ne mouille pas le verre en présence d'huile. Ainsi chacun des trois milieux environnants a son influence sur la valeur de l'angle de contact.

Un canard enduit ses plumes d'une substance grasse, pour les rendre hydrophobes et « non mouillables » par l'eau. La plume est souvent constituée d'un axe rigide avec un très grand nombre de barbeles entassés les uns sur les autres qui augmentent également l'hydrophobie.

Le savon et le détergent diminuent la tension superficielle de l'eau, ce qui permet à l'eau de pénétrer plus facilement dans les tissus.

La compréhension des phénomènes de mouillage permet d'obtenir des solutions perspicaces à certains défis technologiques dans bon nombre de procédés industriels : le mouillage a un rôle majeur dans les processus d'étalement des colles, des peintures, des aérosols insecticides sur les feuilles de plantes, etc. Dans la construction des bâtiments, il est utilisé pour imperméabiliser les fissures sur un mur en béton et empêcher l'entrée de l'humidité. Le mouillage joue aussi un rôle important dans la technologie de croissance des films minces. La condition de croissance en mode « couche atomique par couche atomique » est possible si l'angle de contact pour une goutte sur la surface du support n'est pas défini, c'est-à-dire si $\cos\theta > 1 \Rightarrow \gamma_{SG} > \gamma_{SL} + \gamma_{LG}$. C'est le mode de croissance couche par couche de Frank-van der Merve. Lorsqu'il est possible de déposer des îlots (gouttes) sur

un substrat, un angle de contact est alors bien défini et $\cos\theta = \frac{\gamma_{SG} - \gamma_{SL}}{\gamma_{LG}} < 1 \rightarrow$

$\gamma_{SG} < \gamma_{SL} + \gamma_{LG}$, c'est le mode de croissance de Vollmer-Weber. Il existe aussi un mode de croissance Stranski-Krastanov qui permet d'obtenir des îlots sur un film mince déposé auparavant.

Coefficient de la tension superficielle de l'interface de quelques éléments avec l'air.

Tableau 11.1

Fluide	Température (°C)	γ (J m ⁻² × 10 ⁻³)
Eau	20	72,8
Eau	37	70
Sang	37	73
Mercure	20	425,41
Méthanol	20	22,6
Éthanol	20	22,10
Benzène	20	28,88

Interface	Angle de contact (degrés)
Eau-paraffine	110
Eau-verre	0
Mercure-verre	128-148
Kérosène verre	26

Valeurs tirées de Adamson *et al.*, 1997, Law *et al.*, 2016 et Wohlfarth *et al.* 1997.

11.6 Insectes et capillarité

Ce chapitre se termine par une exploration de la manière qu'ont les insectes d'utiliser la capillarité pour se déplacer. Considérons tout d'abord l'effet de la tension de surface sur une lame de verre dans l'eau. Lorsqu'une lame (longue de quelques centimètres) de verre est immergée partiellement dans l'eau, il y a une élévation de l'eau sur le bord avec la lame. Notons θ l'angle aigu formé par la tangente au ménisque au point de contact sur la surface avec le verre.

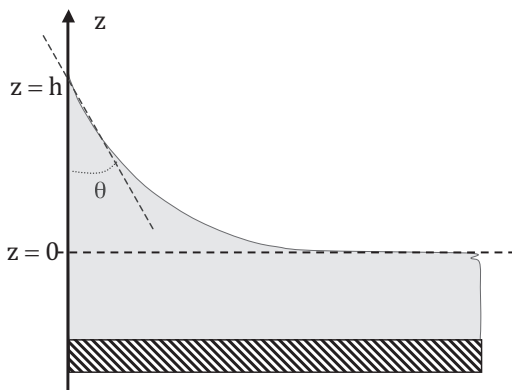


Figure 11.17

L'eau monte d'une hauteur h sur une lame de verre disposée verticalement.

L'élévation maximale h peut être calculée (voir exercice 7) :

$$h = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho_L g}} (1 - \sin \theta) = L_C \sqrt{2(1 - \sin \theta)}$$

où la grandeur $L_C = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_L g}}$ (avec une dimension de longueur) est la longueur capil-

laire qui permet de juger qui, de la gravité ou de la tension superficielle, domine. Pour l'eau $L_C = 2,7$ mm avec $\gamma_{\text{EAU}} = 0,0728$ N/m, $g = 9,82$ m/s² et $\rho_{\text{EAU}} = 998,16$ kg/m³.

L_C est l'échelle spatiale en dessous de laquelle les phénomènes capillaires doivent être pris en compte. Ainsi quand la longueur d'onde des ondes de gravité devient proche de L_C , la capillarité ne peut plus être négligée et il faut prendre en compte le saut de pression qui existe entre l'air et l'eau quand la surface libre est courbée. La plupart des insectes ont des tailles de l'ordre de grandeur de L_C et par conséquent la tension superficielle prend une importance vitale pour leur existence. Les gerris, des insectes à 6 pattes, vivent à la surface de l'eau et peuvent se déplacer à des vitesses atteignant 1,5 m/s. Leurs pattes couvertes de poils hydrophobes et graissées par une glande située près de l'orifice buccal, sont imperméables à l'eau. Cette imperméabilité est aussi le résultat de la structure fine de leurs pattes qui sont couvertes par

un grand nombre de minuscules poils orientés (*microsetae*) avec de fins nanosillons. L'hydrophobie des pattes incurve la surface de l'eau près d'elles en une forme de ménisque concave, qui permet aux forces capillaires de supporter le poids du gerris. Le poids, la taille et la forme des pattes ainsi que d'autres bio-caractéristiques se sont adaptés à la valeur de la tension superficielle de l'eau. La pollution de l'eau par des éléments tensioactifs peut donc mettre en danger la survie de cette espèce.

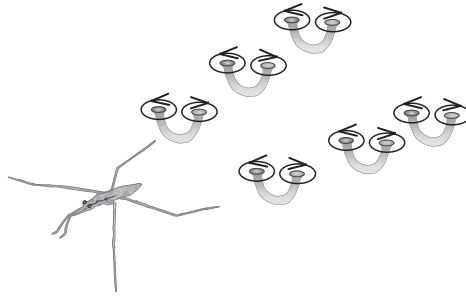


Figure 11.18

Les vortex *horseshoe* générés vers l'arrière par le gerris.

La locomotion du gerris avec de brusques avancées saccadées est plus complexe et est restée pendant longtemps un objet d'études scientifiques intenses. Son mouvement peut être compris sur la base de la loi de conservation de la quantité de mouvement. Pour se propulser vers l'avant, l'insecte doit envoyer une égale quantité de mouvement vers l'arrière. Assez récemment on a montré que ces marcheurs aquatiques transfèrent une certaine quantité de mouvement aux tourbillons en « U », qui ont deux extrémités libres attachées à la surface de l'eau et se déplacent vers l'arrière (le sens de rotation des tourbillons de la figure 11.18 est en accord avec ce déplacement). Ces tourbillons en « U » sont à la fois générés par les pattes rameuses et leur sert d'appui pour se propulser vers l'avant. On peut générer dans une piscine de tels semi-vortex en « U » en donnant à une plaque circulaire (une assiette par exemple) semi-immersée un mouvement linéaire vers l'avant pour la retirer ensuite rapidement hors de l'eau.

D'autres insectes détournent à leur profit le gradient du coefficient de tension superficielle. De taille millimétrique, les *Microvelia*, *Stenus*, et autres *Velia*, peuvent se déplacer sur l'eau grâce à leurs pattes chevelues hydrophobes. Pour échapper à leurs prédateurs, la nature leur a donné la capacité d'un sursaut de vitesse d'une manière quasi instantanée, pour atteindre des vitesses d'ordre de 200 millimètres par seconde. En cas de danger, ils injectent dans l'eau un liquide surfactant (la *stenusine*) sécrété par leurs glandes abdominales. L'accélération instantanée par un gradient de tension superficielle de la surface d'eau provoquée soit par la température, soit par une dilution locale d'un élément chimique, est connue sous le nom de propulsion Marangoni. Et selon l'effet Marangoni, si la surface d'un liquide présente des différences de tension superficielle, des écoulements y

apparaissent d'une manière quasi instantanée, dirigée depuis la zone de faible tension de surface, vers celle de tension de surface élevée. L'effet Marangoni est aussi utilisé d'une manière ingénieuse dans un art japonais, le *suminagashi*, qui consiste à déposer à la surface de l'eau des encres de couleurs différentes qui s'étendent en forme d'anneaux en donnant des motifs très spécifiques grâce à la juxtaposition de l'expansion colorée des taches et une structure vorticale induite par un simple souffle sur la surface de l'eau.

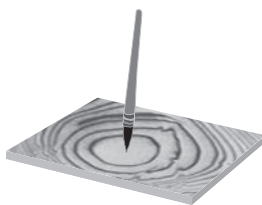


Figure 11.19

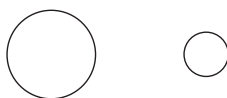
11.7 Applications

11.7.1 Questions de réflexion et concepts

R1. Pourquoi y a-t-il une différence de pression à la surface d'un liquide si sa surface possède une courbure ?

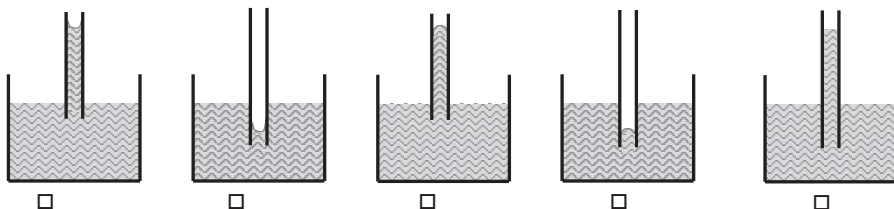
R2. Pourquoi une bulle de savon est-elle sphérique ?

R3. Ces deux gouttes d'eau sont dans une même salle. Dans quelle goutte la pression est-elle la plus forte ?



R4. Si on plonge un tube capillaire en verre dans un liquide (mouillant ou non), on observe soit une ascension soit une descente du liquide dans le tube. On constate, en outre, que la surface du liquide dans le tube présente soit un ménisque concave soit un ménisque convexe.

Certaines des figures de tubes capillaires ne correspondent pas à la réalité. Lesquelles ?



R5. Deux bulles de savon de rayon différent, constituées du même liquide se trouvent au même niveau dans l'air. Lequel des énoncés est correct ?

- ☐ Les pressions dans les 2 bulles sont égales, car la pression dans la bulle ne dépend que de la pression atmosphérique.
- ☐ La pression dans la petite bulle est plus grande, car le coefficient de la tension superficielle dépend de la taille de la bulle.
- ☐ La pression dans la petite bulle est plus grande puisque son rayon est plus faible.
- ☐ La pression dans la grande bulle est plus grande puisque son rayon est plus grand.
- ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

R6. La différence de pression p entre l'intérieur d'une sphère pleine (de rayon R et de masse volumique ρ) et l'extérieur de la sphère due à la tension superficielle (le coefficient de la tension superficielle est noté par γ) est donnée par la formule de Laplace (g est l'accélération de pesanteur) :

$$P = \frac{2\gamma}{R^3} \quad \square \quad P = \frac{\gamma}{R} \quad \square \quad P = \frac{\rho}{R} \quad \square \quad P = \rho g R \quad \square \quad P = \frac{\gamma}{R^2} \quad \square \quad P = g \gamma \rho \quad \square$$

$$P = \frac{2\gamma}{R} \quad \square \quad P = \frac{3\gamma}{R} \quad \square \quad P = \frac{2\gamma}{R^2} \quad \square \quad P = \frac{\gamma}{gR} \quad \square \quad P = g \frac{\gamma^2}{2R} \quad \square \quad P = \gamma g R \quad \square$$

R7. La montée h de l'eau dans un capillaire de rayon R est décrite par la loi de Jurin. En notant le coefficient de la tension superficielle par γ , la masse volumique de l'eau par ρ , l'angle de contact par θ et l'accélération de pesanteur par g , cocher l'expression correcte de cette loi :

$$h = \frac{2\gamma g}{\rho R^3} \sin \theta \quad \square \quad h = \frac{\rho \gamma \cos \theta}{2gR^2} \quad \square \quad h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g R} \quad \square \quad h = \frac{\rho g^2 R^2}{2\gamma} \cos^2 \theta \quad \square$$

$$h = \rho \gamma g \sin \theta \sqrt{R} \quad \square \quad h = \frac{2g\gamma \cos \theta}{2\rho R^2} \quad \square \quad h = \frac{g\gamma \sin \theta}{3\rho R^2} \quad \square \quad h = \frac{2\rho \cos \theta}{\gamma g R} \quad \square$$

R8. Dans quelles unités du Système international se mesure le coefficient de la tension superficielle :

☐ $\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$ ☐ $\text{m}^{-2} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^2$ ☐ $\text{m}^{-2} \cdot \text{kg}$ ☐ $\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$

R9. Pour un coefficient de tension superficielle donné, quand le rayon de la goutte double, la pression à l'intérieur d'une goutte d'eau :

- ☐ est multipliée par 2 ☐ est divisée par 3 ☐ est multipliée par 3
- ☐ est multipliée par 4 ☐ est divisée par 2 ☐ est divisée par 4

R10. Deux bulles de rayon différent sont reliées, quelle sera leur évolution ?

- ☐ Chacune des bulles existe uniquement parce que le liquide qui forme le film entourant les bulles a une très faible tension superficielle.
- ☐ La surpression dans la petite bulle fait qu'elle va se vider dans la grande bulle.

- ☐ Rien, car les pressions sont égales dans les deux bulles.
- ☐ Les bulles vont éclater.
- ☐ Les quatre propositions sont fausses.

R11. Le coefficient de tension superficielle est défini comme :

- ☐ une force.
- ☐ une force par unité de longueur.
- ☐ une énergie.
- ☐ une énergie par unité de volume.
- ☐ une énergie par unité de longueur.

R12. Lorsqu'on augmente le diamètre d'un capillaire 2 fois, la montée de l'eau :

- ☐ augmente 2 fois.
- ☐ augmente 4 fois.
- ☐ diminue 3 fois.
- ☐ diminue 2 fois.
- ☐ reste constante.

11.7.2 Exercices

Dans les exercices ci-dessous, on prendra les valeurs suivantes :

Tension superficielle de l'eau $\gamma_{\text{EAU}} = 73 \times 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$, $\rho_{\text{EAU}} = 1\,000 \text{ g m}^{-3}$ et accélération de pesanteur $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

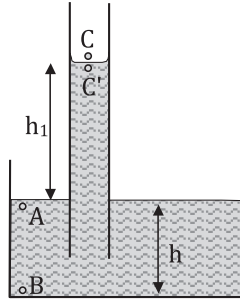
1. C Exprimer la différence de pression Δp entre la pression p_i d'une goutte sphérique pleine et celle du milieu extérieur p_0 : $\Delta p = p_i - p_0$ en fonction du rayon R de la goutte et du coefficient de tension superficielle γ . Donner l'unité du coefficient de tension superficielle dans le Système international.

2. C On souffle une bulle de savon de rayon $r = 3 \text{ cm}$ dans un liquide dont le coefficient de tension superficielle est $\gamma = 0,025 \text{ N/m}$. Calculez la pression à l'intérieur de cette bulle, p_i , sachant que la pression atmosphérique est $P_{\text{ATM}} = 1\,015 \text{ hPa}$.

3. C On considère des bulles d'air sous la surface de l'eau.

- a. Quelle est la pression à l'intérieur d'une bulle de rayon $0,01 \text{ mm}$, se trouvant à 1 mm sous la surface de l'eau ?
- b. Quelle est la pression à l'intérieur d'une bulle de même rayon, se trouvant à 10 m sous la surface ?

4. C Un tube capillaire est partiellement immergé dans un récipient rempli d'eau.



Le rayon du capillaire est $r = 0,5 \text{ mm}$. Les points A, C, C', sont très près de l'interface eau/air et le point B est au fond du récipient. La hauteur h du récipient vaut $h = 20 \text{ cm}$. On supposera que le liquide mouille parfaitement la surface du verre.

- Donner les différences de pression suivantes : $p_A - p_B$, $p_C - p_A$, $p_{C'} - p_A$, et $p_{C'} - p_C$
- En déduire l'expression de la hauteur h_1 dans le tube en fonction de ρ , γ , r , et g . Calculer h_1 numériquement.

5. C On se propose de mesurer le coefficient de tension superficielle du surfactant pulmonaire en utilisant les phénomènes de capillarité. Pour cela on plonge un capillaire dans de l'eau pure, qui monte à 10 cm. On plonge ensuite le même capillaire dans le surfactant, qui monte à 2 cm. En admettant que l'eau et le surfactant mouillent parfaitement le verre :

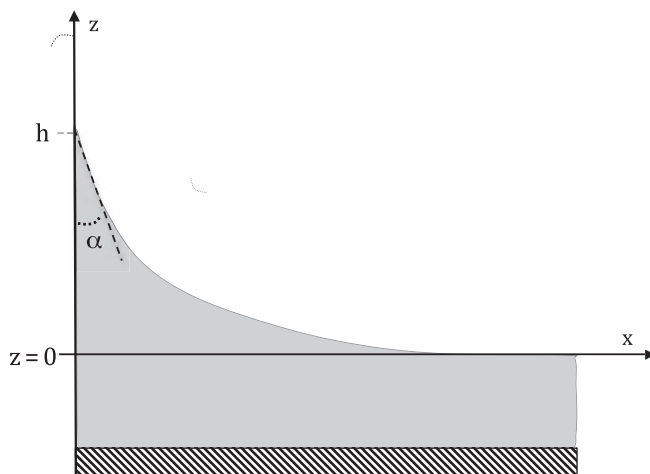
- Calculez le coefficient de tension superficielle du surfactant.
- Calculez le diamètre intérieur du capillaire.

A.N. : $\rho_{\text{surfactant}} = 800 \text{ kg m}^{-3}$.

6. C Calculer l'élévation des liquides suivants dans un tube capillaire en verre de diamètre $d = 1 \text{ mm}$ avec la loi de Jurin. Ces liquides mouillent parfaitement le verre.

Liquide	$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	$\gamma \text{ (mN/m)}$
Eau de mer	1 030	75
Diiodométhane	3 300	50,8
Glycérine	1 260	63
Éthanol	790	22

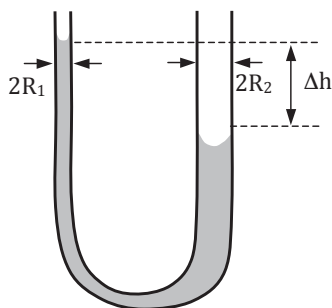
7. * C L'objectif est de calculer la forme prise par la surface libre de l'eau au contact d'une paroi verticale en verre. Le mouillage est partiel et l'angle de contact est égal à α .



Calculez la forme du ménisque près du bord d'un verre.

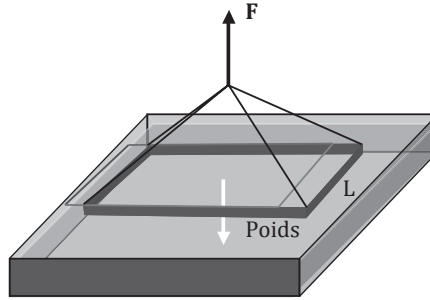
Aide : il faut d'abord trouver une équation différentielle reliant en un point quelconque de la surface la hauteur z et l'angle θ que fait la surface libre avec la verticale. Appliquer les conditions aux limites : $x \rightarrow \infty$, $z \rightarrow 0$ et $\theta \rightarrow \pi/2$.

8. C Soit un tube en U en verre contenant de l'eau. Les branches sont constituées de 2 tubes cylindriques de rayons $R_1 = 0,01$ cm et $R_2 = 0,02$ cm respectivement.



On suppose que l'eau mouille parfaitement la paroi intérieure. Calculez la dénivellation Δh d'eau entre les deux branches comme indiqué sur le schéma.

9. C La surface d'un liquide est une membrane tendue, caractérisée par une force capillaire qui s'oppose aux déformations. Un cadre carré rigide en aluminium d'épaisseur négligeable est plongé partiellement dans l'eau. Il est suspendu par un fil vertical relié à un dynamomètre mesurant une force F .



Déterminer le module F de la force lors de l'arrachement (rupture du ménisque) de ce cadre en tenant compte de son poids $P = 0,050 \text{ N}$. Le côté du cadre carré vaut $L = 0,25 \text{ cm}$.

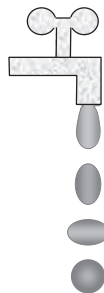
10. C Lorsqu'une petite goutte d'eau touche la surface, des ondes de plus ou moins grande amplitude apparaissent sur la surface de l'eau. La déformation de la surface de l'eau par ces ondes est très faible. À cause du faible volume d'eau déplacé, les forces de gravitation sont négligeables par rapport aux forces de tension superficielle. On parle alors d'ondes capillaires. La vitesse de propagation v des ondes capillaires dépend du coefficient de la tension superficielle γ , de la masse volumique de l'eau ρ , et de la longueur d'onde λ de la manière suivante :

$$v = D \gamma^A \rho^B \lambda^C$$

avec D une constante sans dimension.

Faire une analyse dimensionnelle et déterminer les exposants A , B , C .

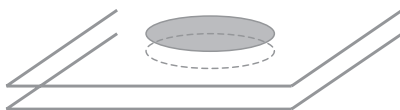
11. C Un robinet circulaire laisse échapper une goutte de liquide de masse volumique ρ . On considère que la goutte au début de sa chute est à peine soumise à la résistance de l'air et se trouve en apesanteur. La forme d'équilibre d'une goutte en apesanteur doit être sphérique (de rayon R) pour minimiser, à volume donné, la surface libre.



On observe des oscillations périodiques de la forme de la goutte autour de cette forme moyenne. On admettra que la période T de ces oscillations ne dépend pas de l'accélération de la pesanteur.

- (i) Écrire l'équation aux dimensions pour R , ρ et γ .
 (ii) En déduire la forme de l'expression de la période T .

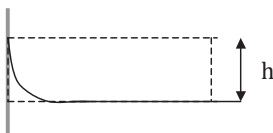
12. C L'eau mouille totalement le verre. De l'eau est prise en sandwich entre deux plaques de verre. La distance entre les plaques est d et le diamètre du disque d'eau est D . Quelle est la force entre les deux plaques ?



Vous avez peut-être remarqué que cela peut être très difficile de séparer deux plaques de verre ainsi mouillées et qu'il est plus facile de les faire glisser l'une sur l'autre.

A.N. : $d = 0,5 \text{ mm}$, $D = 50 \text{ cm}$.

13. C L'eau d'un aquarium mouille totalement le verre et forme un ménisque sur la paroi (l'angle de contact est égal à 0°). Calculez la différence de hauteur h entre le centre de l'aquarium et le bord du ménisque. La réponse est donnée dans l'exercice 7 mais on veut la retrouver ici d'une autre manière avec le bilan des forces sur le volume de contrôle en pointillé. La largeur du volume (dans la direction \perp à la page) est L .



Indice : écrire l'équilibre des forces horizontales s'exerçant sur le volume de contrôle en pointillé.

14. Pour une pression atmosphérique de 1 bar, la hauteur du liquide dans un baromètre à mercure est $h = 760 \text{ mm}$. Lorsque l'on ne néglige plus la tension de surface due à la présence du ménisque en surface, déterminez comment h varie en fonction du rayon du tube r . Indiquez la correction quand $r = 4 \text{ mm}$.

Données : $\rho_{\text{mercure}} = 13,4 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $\gamma = 47,2 \cdot 10^{-2} \text{ N m}^{-1}$, angle de contact verre – mercure 140° .

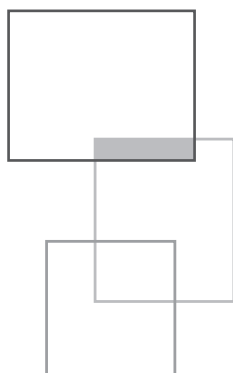
15. La vitesse de phase c dans le cas général des ondes gravité-capillaire dans un fluide de profondeur H est :

$$c^2 = \left[\left(g + \frac{\gamma k^2}{\rho} \right) / k \right] \tanh(kH)$$

Effectuez un développement limité de cette relation selon les puissances de k pour montrer que c^2 devient proche de gH (la limite onde longue) si $H_R = \left(\frac{3\gamma}{\rho g}\right)^{1/2}$. Pour

l'eau $H_R = 5$ mm et un bac rempli d'eau à cette profondeur devient un « *ripple tank* » qui permet d'observer le régime des ondes non dispersives (les ondes longues ou acoustiques) de façon assez simple pour des longueurs d'ondes supérieures à 2 cm.

16. Montrer que lors de la coalescence de deux gouttes sphériques en une, l'aire de cette dernière est plus petite que celle de la somme des deux gouttes initiales.



Chapitre 12

Systèmes dynamiques

12.1 Introduction

Un système dynamique traite de l'évolution d'un système, de son changement dans le temps, le système pouvant être issu de la mécanique, de la biologie des populations, de l'électricité, des réactions chimiques, de la médecine (les épidémies) ou encore de l'économie. La dynamique classique de Newton n'est donc qu'un exemple parmi d'autres de « systèmes dynamiques ». L'objectif ici est de replacer les onze premiers chapitres dans une perspective plus large où l'accent n'est pas tant mis sur la recherche d'une solution des équations pour une condition initiale particulière que sur la description globale de l'espace des solutions pour toutes les conditions initiales. Cet objectif beaucoup plus ambitieux va permettre de passer en revue les possibilités d'états du système, équilibre, oscillations périodiques et chaos. La nouveauté en effet est l'apparition de régimes apériodiques ou encore chaotiques qui ne sont possibles que dans les systèmes différentiels non linéaires avec au moins trois variables interactives. Ils apparaissent aussi encore plus simplement dans des systèmes discrets aux différences. Le fait que le chaos puisse apparaître dans ces systèmes déterministes très simples a été redécouvert dans les années 1970 et a fourni un éclairage nouveau permettant d'unifier de nombreux domaines. Cet éclairage de la Physique non linéaire est brièvement présenté ici.

Un système dynamique est décrit par n variables $x_i(t)$ fonction du temps, gouvernées par des équations différentielles du premier ordre liant ces variables :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \quad 12-1$$

où f_i est une fonction réelle de n variables réelles. Ainsi \mathbf{x} et \mathbf{f} peuvent être considérés comme des vecteurs de composantes (x_1, \dots, x_n) et (f_1, \dots, f_n) , un espace de vecteurs de dimension n . À ces équations il faut adjoindre les conditions initiales :

$$x_i(t=0) = x_i^0 \quad \text{pour } i = 1 \dots n \quad 12-2$$

Lorsque le temps t n'apparaît pas explicitement comme dans 12-1, le système est dit autonome. Si le système ne l'est pas, on peut toujours le rendre autonome en ajoutant la nouvelle variable x_{n+1} et l'équation $dx_{n+1}/dt = 1$. La solution du système 12-1 avec les conditions initiales 12-2 définit une trajectoire représentée par le point $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_i(t) \ \dots \ x_n(t)]$, un vecteur de l'espace des phases, l'espace de dimension n dont les coordonnées sont simplement les n variables x_i . L'espace des phases permet de décrire la géométrie de toutes les trajectoires, chaque point pouvant en effet servir de condition initiale pour une trajectoire. Lorsque la fonction \mathbf{f} ne comprend que des polynômes de degré un, le système est affine. La solution dépend alors linéairement des conditions initiales et peut être obtenue explicitement. En revanche lorsque \mathbf{f} contient des polynômes de degré deux ou plus ou des produits de variables différentes, le système est dit non linéaire, la conséquence étant qu'une combinaison linéaire de solutions n'est plus solution. En général le système ne peut plus être intégré analytiquement, mais on va voir que l'on peut dire beaucoup de choses sur l'aspect qualitatif des solutions, des solutions qui peuvent être calculées facilement numériquement aujourd'hui grâce au développement des ordinateurs et de langages simples comme *matlab*, *octave* ou *scilab*. L'apprentissage de la programmation que permet ces applications est aussi une des raisons pour inclure ce chapitre. Une annexe rappelle les éléments nécessaires d'analyse numérique et de programmation et fournit des exemples de codes pour trouver les solutions de 12-1 et 12-2.

L'approche moderne n'est donc pas tant de calculer une solution particulière de 12-1 et 12-2 que de cartographier dans l'espace des phases l'évolution globale du système pour toutes les conditions initiales, une approche qui remonte à Poincaré. Au lieu de chercher à calculer la trajectoire des planètes du système solaire, Poincaré s'est posé la question de la stabilité du système et si par exemple une planète pouvait partir à l'infini, et il a développé une approche géométrique puissante pour répondre à ce type de questions. L'intérêt pour cette approche s'est trouvé renforcé quand le météorologiste E. Lorenz montra dans les années 1960 qu'un système de la forme 12-1 avec seulement trois variables ($n = 3$) possédait des solutions apériodiques (chaotiques) munies de la propriété de sensibilité aux conditions initiales (SCI) grâce à laquelle une variation infime de la condition initiale conduisait à une divergence des trajectoires au cours du temps. L'analogie d'un tel système avec le régime des tempêtes des moyennes latitudes montrait que la non-linéarité de la fonction \mathbf{f} était au centre de l'évolution chaotique et qu'un espace des phases de grande dimension n'était absolument pas nécessaire pour générer une grande complexité temporelle. Au moins qualitativement, le système de Lorenz permettait de comprendre les séquences d'apparition de la turbulence dans certaines expériences de laboratoire sans recourir à des modèles de grande dimension.

Quelques exemples permettent de planter le décor.

Exemple 1

Un système linéaire à une dimension, $n = 1$:

$$\frac{dx}{dt} = -rx + b \quad 12-3$$

Le système est linéaire et l'espace est de dimension 1, l'axe des x . La solution est la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène (lorsque b est absent) :

$$x = Ce^{-rt} + \frac{b}{r}$$

On applique la condition initiale pour trouver C et :

$$x = x_0 e^{-rt} + \frac{b}{r}(1 - e^{-rt})$$

Ainsi quand r est positif, le système tend vers la solution stationnaire $x^* = b/r$ qui est le point fixe du système quelle que soit la condition initiale x_0 . L'ensemble des solutions peut être représenté de façon géométrique sur l'axe des x :

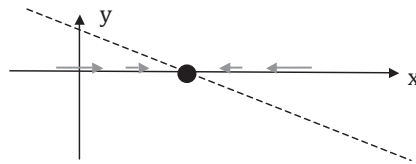


Figure 12.1

La droite en pointillé représente la fonction $y = f(x) = -rx + b$ et le point noir est le point fixe x^* . Quand $x < x^*$, $f(x)$ est positif et donc la vitesse de la solution $v = dx/dt$ représentée par la flèche grise est positive. Quand $x > x^*$, $f(x)$ est négatif et la vitesse v est négative.

Sans rien connaître de la solution exacte, la figure 12.1 permet de décrire géométriquement toutes les solutions de 12-3. On a représenté le point fixe x^* et l'évolution de la solution qui peut être décrite par la vitesse de la solution dx/dt sur l'axe des x . On voit que la vitesse converge vers le point fixe x^* quelle que soit la condition initiale. Ce point fixe est donc un équilibre stable. Le même système avec r négatif possède aussi un point fixe mais la droite d'équation $y = -rx + b$ a maintenant une pente positive, les vitesses divergent et le point fixe est instable.

Exemple 2

Un système non linéaire à une dimension, $n = 1$:

$$\frac{dx}{dt} = \sin x \quad 12-4$$

Plutôt que d'essayer d'intégrer ce système non linéaire, on peut essayer l'analyse précédente. La première étape est de trouver les points fixes pour lesquels $dx/dt = 0$.

Ce sont les points $x^* = k\pi$ avec k entier relatif. Pour trouver leur stabilité, il suffit juste de tracer les vitesses qui dépendent du signe de $f(x) = \sin x$.

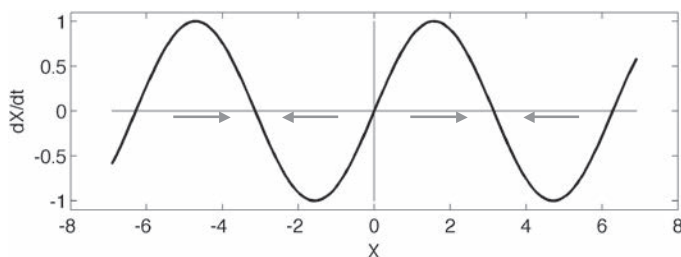


Figure 12.2

Les points fixes sont ceux où la courbe $\sin x$ coupe l'axe des x . Les flèches illustrent le signe de la vitesse dx/dt qui donne directement la stabilité des points fixes.

La figure 12.2 montre que les points fixes impairs $x^* = (2k + 1)\pi$ sont stables alors que les pairs $x^* = 2k\pi$ sont instables. Le domaine d'attraction d'un point fixe x^* est l'ensemble des conditions initiales dont les trajectoires convergent vers x^* et on voit directement sur la figure 12.2 que le domaine d'attraction d'un point fixe stable est l'intervalle ouvert $]x^* - \pi, x^* + \pi[$. Tout ceci est obtenu sans intégrer 12-4.

Exemple 3

Un système linéaire de dimension $n = 2$:

La masse accrochée à un ressort du chapitre 3 est l'exemple type de l'oscillateur harmonique. La 2^e loi de Newton est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad 12-5$$

Mais l'équation est du second ordre et pour mettre 12-5 sous la forme 12-1, il faut introduire la vitesse comme variable supplémentaire de sorte que 12-5 devient :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v & (a) \\ \frac{dv}{dt} &= -\omega^2 x & (b) \end{aligned} \quad 12-6$$

où l'on a posé $\omega^2 = k/m$. La position de la particule sur l'axe des x demande deux équations, pour la position et pour la vitesse. L'espace des phases est donc de dimension 2 avec les variables (x, v) . Les solutions oscillantes de 12-5, $\sin(\omega t)$ et $\cos(\omega t)$, ont déjà été obtenues, mais 12-6 permet de voir la dynamique sous un nouvel angle. L'origine est le seul point fixe, le ressort au repos. En chaque point (x, v) de l'espace

des phases on peut définir le vecteur $\mathbf{V} = (dx/dt, dv/dt)$ de composantes $(v, -\omega^2 x)$ qui est illustré sur la figure 12.3 :

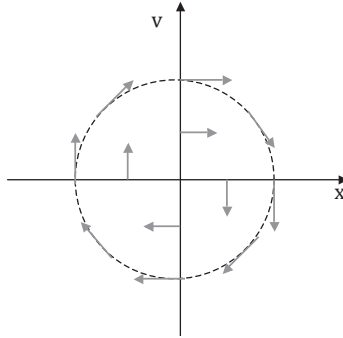


Figure 12.3

Le champ du vecteur \mathbf{V} dans l'espace des phases (x, v) pour $\omega = 1$.

On peut voir le vecteur \mathbf{V} comme la vitesse d'une particule imaginaire au point de coordonnées (x, v) . La figure 12.3 montre quelques-uns de ces vecteurs. La trajectoire de la particule tangente en chaque point à \mathbf{V} tourne autour de l'origine dans le sens des aiguilles d'une montre. On peut déterminer facilement la trajectoire en effectuant l'opération $x\omega^2 \times (12-6a) + v \times (12-6b)$:

$$\frac{d}{dt}(\omega^2 x^2 + v^2) = 0$$

ce qui implique la conservation :

$$\omega^2 x^2 + v^2 = \omega^2 x_0^2 + v_0^2$$

Comme on l'a vu, cette relation traduit la conservation de l'énergie et montre que les trajectoires sont des ellipses dans l'espace des phases. Les orbites sont fermées et tournent inlassablement autour de l'origine, la signature d'un phénomène périodique. Le portait de phase du système 12-6 qui rassemble les trajectoires possibles est donc le suivant :

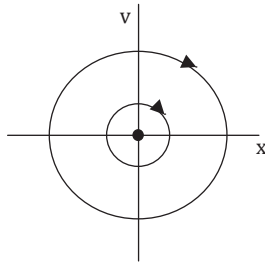


Figure 12.4

Le portait de phase du système dynamique 12-6 pour $\omega = 1$. Il y a un point fixe à l'origine et des orbites circulaires centrées en O. Le rayon du cercle est proportionnel à l'énergie du système.

Le portrait de phase de la figure 12.4 fournit la description géométrique du système dynamique 12-6 et encore une fois a été obtenu sans aucune intégration des équations différentielles.

Notes :

1) La trajectoire de l'oscillateur harmonique s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre quand le temps s'écoule. Quand on change t en $-t$ dans 12-6, les trajectoires sont les mêmes mais s'effectuent dans le sens opposé, montrant la réversibilité des équations de la Mécanique classique.

2) Mentionnons aussi que quand la fonction $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ est linéaire, les solutions des équations différentielles de type 12-6 peuvent être obtenues par les méthodes d'algèbre linéaire qui montrent que les solutions sont des combinaisons d'exponentielles réelles ou imaginaires (voir § 12.3.1).

3) Notez que dans l'espace ordinaire à trois dimensions, l'espace des phases de la dynamique du mouvement d'une particule est déjà de dimension $3 \times 2 = 6$ puisque $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

4) Le temps varie de façon continue dans le système 12-1 mais il existe aussi des systèmes à temps discrets. Le système à une variable est de la forme :

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad 12-7$$

Le système 12-7 relie la variable x au temps $n + 1$ à sa valeur à l'instant n par une équation aux différences. On parle aussi d'itérations de cartes (*iterated maps*). Les solutions de ce type d'équation sont très riches et peuvent décrire des solutions périodiques ou apériodiques même en dimension un. À la différence des systèmes 12-3 ou 12-4 où la solution est une fonction continue, la solution de 12-7 peut éviter un point fixe stable en sautant par-dessus.

On remarquera que la mécanique de Newton des premiers chapitres a permis de discuter des points fixes (la statique), des solutions périodiques (le ressort, le pendule ou les ondes dans les fluides) et de régimes apériodiques associés à la turbulence. Les solutions périodiques comme pour le pendule n'ont été obtenues qu'en faisant l'hypothèse de petits mouvements qui permettaient de linéariser les équations de la mécanique. La genèse de la turbulence n'a pas été abordée dans cette introduction ni le problème de trois corps en interaction gravitationnelle, car il n'est pas intégrable analytiquement. Mais faut-il limiter la physique à ce qui est calculable analytiquement ? La réponse est clairement non et l'objectif sera de donner des exemples de l'approche géométrique pour des systèmes non linéaires de dimension un, deux ou trois. En plus des points fixes et des orbites circulaires, on découvrira l'existence de nouveaux objets, les cycles limites et les attracteurs étranges (synonyme de chaos), que l'on rencontre dans beaucoup d'applications d'ingénierie ou de géophysique. Les applications montrent aussi que la physique d'un système peut changer de façon drastique quand on varie un paramètre. Lorsque la variation d'un paramètre change la nature de la solution, on parle de bifurcation, une notion importante en physique. L'approche babylonienne d'apprentissage par l'exemple sans généralisation est utilisée généreusement tout au long de ce chapitre.

12.2 Systèmes différentiels de dimension 1

12.2.1 Stabilité

Considérons donc l'équation différentielle autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

La notion de stabilité a été introduite graphiquement mais l'approche quantitative reste importante. Supposons un point fixe $x = x^*$. Pour étudier la stabilité linéaire, on introduit une petite perturbation $x = x^* + \eta$. On fait un développement de Taylor pour calculer $f(x^* + \eta)$:

$$f(x^* + \eta) = f(x^*) + \eta f'(x^*) + O(\eta^2)$$

pour un petit voisinage autour de x^* . En remarquant que $f(x^*) = 0$, l'équation satisfaite par η devient :

$$\frac{d\eta}{dt} = f'(x^*) \eta + O(\eta^2)$$

Si $f'(x^*) \neq 0$, les termes en η^2 sont négligeables et il reste :

$$\frac{d\eta}{dt} = f'(x^*) \eta$$

Ainsi η croît exponentiellement si $f'(x^*) > 0$ – le point fixe est instable – et décroît exponentiellement si $f'(x^*) < 0$ – le point fixe est stable. La solution donne aussi l'échelle de temps $\tau = 1/|f'(x^*)|$ sur laquelle évolue la perturbation. Notez que ce type de calcul ne fournit que la stabilité locale au voisinage du point fixe (quand $|\eta| \ll 1$). Si $f'(x^*) = 0$, l'étude de la stabilité demandera de garder les termes en η^2 . Le lecteur pourra vérifier que les conclusions graphiques des exemples 1 et 2 sont en accord avec cette approche. On dira que x^* est un point fixe de type attracteur si $f'(x^*) < 0$. Si x^* attire toutes les trajectoires quelles que soient les conditions initiales x_0 , on dira que le point fixe est globalement attracteur (le bassin d'attraction de x^* remplit tout l'espace). Notons que la stabilité linéaire ne permet pas de trouver le bassin d'attraction de l'exemple 2 ci-dessus à la différence de la méthode géométrique.

12.2.2 Existence et unicité

Pour qu'un système dynamique décrive une situation physique de façon déterministe, la solution doit exister et être unique. Deux exemples pathologiques expliquent ces notions.

Non unicité

S'il n'y a pas unicité en un point de l'espace des phases, les trajectoires se coupent et on ne peut pas décider quelle branche choisir. Le système suivant est de cette nature :

$$\frac{dx}{dt} = x^{1/3} \quad \text{avec } x_0(0) = 0$$

L'origine $x^* = 0$ est un point fixe. On peut intégrer le système en écrivant :

$$\int_0^x \frac{dx}{x^{1/3}} = \int_0^t dt$$

dont la solution est :

$$x = \left(\frac{2}{3}t\right)^{2/3}$$

Ainsi si le système démarre de $x_0 = 0$, il peut soit rester en $x_0 = 0$, soit partir en suivant la solution ci-dessus. L'examen de la courbe $y = x^{1/3}$ montre que le point fixe $x^* = 0$ est instable et que de plus la dérivée $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \infty$.

Un théorème classique demande que $f(x)$ et $f'(x)$ soient des fonctions définies et continues sur un intervalle pour garantir l'existence et l'unicité de la solution sur un certain intervalle de temps $[0, \tau]$: les fonctions $f(x)$ et $f'(x)$ doivent être suffisamment lisses pour éviter ce type de difficultés.

Non existence à temps fini

Considérons le système différentiel :

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2 \quad x = x_0 \text{ pour } t = 0$$

Sa solution analytique est :

$$\tan^{-1}(x) = t \quad \text{ou} \quad x = \tan(t)$$

Solution qui explose à temps fini (*blow-up*) pour $t = \pi/2$ et n'existe plus au-delà.

12.2.3 Exemples

1. Croissance de population

Le modèle le plus simple de croissance de population est :

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

avec N la population au temps t et r le taux de croissance. Ce modèle prédit une croissance exponentielle $N = N_0 e^{rt}$. Quand t est grand, le modèle devient intenable car la disponibilité des ressources ne supporte plus la surpopulation. Les démographes corrigent ce modèle en introduisant la notion que si N dépasse une certaine limite, r devient négatif, le taux de mortalité dépasse le taux de naissance. Une façon simple d'introduire cette idée est de remplacer le taux de croissance constant r ci-dessus par une fonction linéaire $f(N) = r(1 - N/K)$:

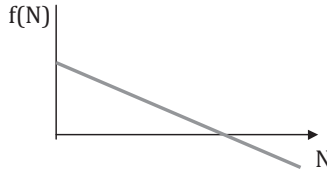


Figure 12.5

La fonction $f(N)$: le taux de croissance est maintenant variable, positif pour N petit et négatif pour N grand.

Ce système dynamique est appelé équation logistique :

$$\frac{dN}{dt} = r N \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad 12-8$$

Il est possible de trouver la solution analytique de cette équation différentielle ordinaire mais privilégions encore l'approche géométrique en traçant le diagramme dN/dt en fonction de N . Il y a deux points fixes $N^* = 0$ et $N^* = K$. Sur la figure 12.6, les points fixes stables (instables) sont représentés par un cercle plein (vide).

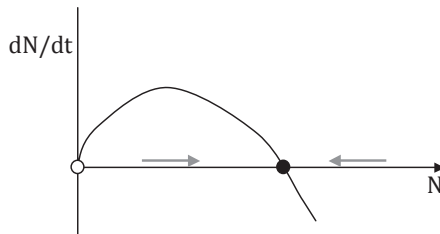


Figure 12.6

La vitesse de la solution montre la stabilité des deux points fixes de l'équation logistique. Les points fixes stables (instables) sont notés par des cercles pleins (vides).

On conclut immédiatement de la figure 12.6 que $N^* = 0$ est instable et que $N^* = K$ est stable. Si $N_0 < K$, N croît jusqu'à atteindre le point fixe $N^* = K$. Si $N_0 > K$, la population diminue et retourne vers K . Apparemment ce modèle serait correct pour des organismes suffisamment simples comme des bactéries. En revanche, il n'expliquerait pas le comportement plus complexe d'organismes plus évolués (insectes).

2. L'approche via les potentiels

L'importance des minima d'énergie potentielle pour les états d'équilibre d'un système mécanique a déjà été soulignée. Par analogie, définissons ici le potentiel $V(x)$ par :

$$f(x) = -\frac{dV}{dx}$$

Attention, car $f(x)$ n'est pas une force ; si x est un déplacement, $f(x)$ est une vitesse.

Calculons comment V évolue sur une trajectoire $x(t)$ du système dynamique. Pour cela il faut dériver $V(x(t))$:

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2$$

Le potentiel $V(t)$ décroît donc toujours et la trajectoire descend le potentiel. S'il y a un point fixe sur le chemin, alors $V' = 0$ le potentiel est constant et la particule rejoint ce puits de potentiel. Les minima de V sont donc des points fixes stables alors que les maxima sont des points fixes instables. Cette analogie mécanique montre l'intérêt de cartographier le potentiel lié à $f(x)$. On peut toujours faire cela à une dimension. En revanche, cette idée ne s'exporte en plusieurs dimensions que si $\mathbf{f} = -\nabla V$, la fonction \mathbf{f} dérive d'un potentiel.

Tous ces exemples montrent que les points fixes dominent la dynamique des systèmes de dimension 1. Les trajectoires approchent un point fixe ou bien s'en éloignent, mais elles ne changent pas de direction. Le flot d'un point de l'espace des phases sur l'axe des x est monotone. Il est impossible de rebrousser chemin et les oscillations sont donc impossibles. Évidemment on ne rencontre pas ces situations en mécanique puisque la deuxième loi de Newton fondée sur les accélérations requiert toujours position et vitesse même pour une particule se déplaçant sur une droite. Pour avoir des oscillations, il faut un espace des phases de dimension 2 au moins. L'intérêt des systèmes de dimension un reste la facilité avec laquelle les concepts importants comme la notion de bifurcation peuvent être mis en place.

12.2.4 Bifurcations

Le grand intérêt des systèmes de dimension un est de pouvoir étudier facilement la structure de la solution quand un paramètre de contrôle du modèle varie. À une valeur critique du paramètre, un point fixe peut apparaître, un autre peut changer sa stabilité. Cette valeur critique est appelée une bifurcation. Ces bifurcations qui sont en nombre restreint ont un caractère universel que l'on rencontre dans des applications très différentes. Elles jouent un grand rôle pour élucider les transitions en physique et ailleurs.

1. La bifurcation *nœud-col* (saddle node)

C'est l'une des plus importantes. En variant un paramètre, deux points fixes se rapprochent, entrent en collision et disparaissent. Son système dynamique est le suivant :

$$\frac{dx}{dt} = r + x^2 \quad 12-9$$

où r est le paramètre de contrôle qui peut prendre une valeur quelconque. L'objectif est d'étudier les solutions de 12-9 pour toutes les valeurs de r . Le terme de droite est l'équation d'une parabole et les trois cas suivants sont donc possibles :

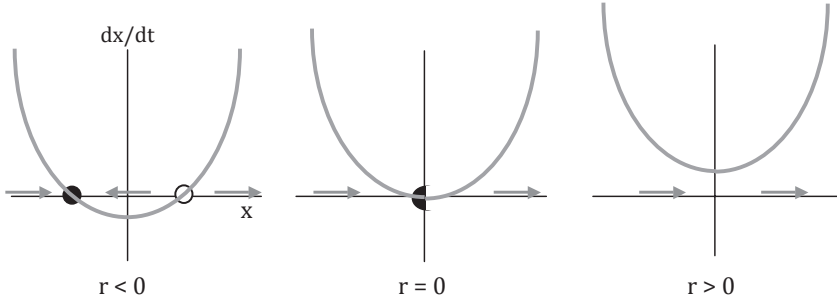


Figure 12.7

Les trois cas possibles du système dynamique 12-9.

Quand $r < 0$, on trouve deux points fixes $x^* = \pm\sqrt{-r}$, dont l'un est stable, l'autre instable. Pour le cas limite $r = 0$, il n'y a plus qu'un point fixe $x^* = 0$ qui est semi-stable, stable si $x_0 < 0$, instable autrement. Lorsque $r > 0$, il y a plus de points fixes et la solution diverge vers $l'\infty$. Le schéma qualitatif qui décrit 12-9 est un diagramme de bifurcation quand toute l'information est rassemblée dans le plan (x, r) :

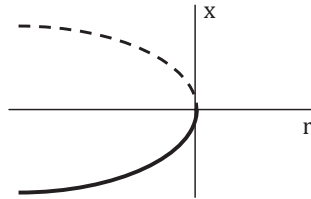


Figure 12.8

Le diagramme de bifurcation du système 12-9. La courbe du point fixe instable $x^* = \sqrt{-r}$ est en pointillé et celle du point fixe stable $x^* = -\sqrt{-r}$ est en trait plein. Il y a bifurcation pour $r_C = 0$, car quand $r > 0$ ces points fixes ont disparu.

On voit quand r positif diminue qu'une bifurcation apparaît en $r_C = 0$, d'où le terme. Le système 12-9 est le prototype de cette bifurcation nœud-col (ou selle), car la dynamique d'un système complexe possédant cette bifurcation varie toujours de façon parabolique (comme $r + x^2$) dans un voisinage approprié. Le terme « forme normale » est utilisé dans la littérature spécialisée. On la rencontre pour expliquer la disparition d'une espèce sous l'effet d'une surpêche (voir exercice 3) ou l'instabilité

de la circulation océanique thermohaline. Cette dernière forcée par les flux de chaleur et les flux d'évaporation précipitation en surface peut en effet s'écrouler si les flux d'eau douce dans les régions polaires (dus aux précipitations ou aux fontes de glace continentale) deviennent trop importants.

2. La bifurcation transcritique

Dans cette bifurcation, les points fixes existent toujours de part et d'autre mais changent leur stabilité. Le système dynamique correspondant est :

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^2 \quad 12-10$$

Le système ressemble à l'équation logistique, mais on permet à r et x de prendre des signes quelconques. Il y a deux points fixes $x^* = 0$ et $x^* = r$. Le graphique de la fonction $f(x) = rx - x^2$ permet de trouver leur stabilité et le lecteur vérifiera que le diagramme de bifurcation est bien le suivant :

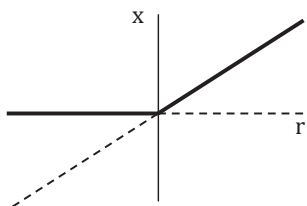


Figure 12.9

La bifurcation transcritique : quand $r < 0$, $x^* = 0$ est stable (trait épais), mais $x^* = r$ est instable (trait pointillé). Quand $r > 0$, c'est l'inverse.

On parle d'échange de stabilité des points fixes à la bifurcation en $r_C = 0$. À nouveau 12-10 est la forme normale de la bifurcation transcritique.

3. La bifurcation fourche supercritique (pitchfork)

Elle apparaît dans les problèmes physiques qui ont une symétrie. Son système dynamique est :

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^3 \quad 12-11$$

Le système possède une symétrie car si on change x en $-x$, l'équation ne change pas. Le graphique de la courbe cubique permet d'énoncer les conclusions. Quand $r < 0$, il y a un seul point fixe $x^* = 0$ et il est stable. Lorsque $r = 0$, $x^* = 0$ existe toujours et est stable. Mais la dérivée $f'(0)$ est nulle. La convergence vers le point fixe n'est plus exponentielle mais beaucoup plus lente – on parle de ralentissement critique.

Quand $r > 0$, l'origine est devenue instable et deux points fixes symétriques stables apparaissent, $x^* = \pm\sqrt{r}$. Le terme en $-x^3$ joue le rôle d'une force de rappel pour x grand qui garantit la stabilité. Le diagramme de bifurcation de la fourche supercritique est le suivant :

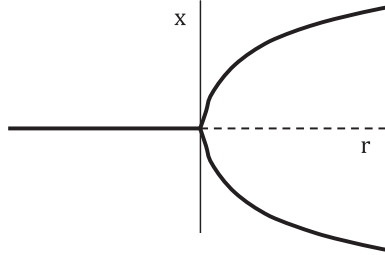


Figure 12.10

La bifurcation fourche supercritique : quand $r < 0$, $x^* = 0$ est stable et devient instable pour $r > 0$. Pour $r > 0$, deux nouveaux points fixes symétriques stables apparaissent $x^* = \pm\sqrt{r}$.

12.3 Systèmes différentiels de dimension 2

En dimension deux, les points fixes existent toujours mais les exemples du ressort et du pendule montrent que des oscillations périodiques apparaissent. Cependant ces oscillations appartiennent à deux familles : elles peuvent, soit remplir l'espace des phases, soit être isolées dans une partie de cet espace, une caractéristique des cycles limites qui n'apparaissent que pour les systèmes non linéaires. C'est évidemment cette dernière famille la plus novatrice.

12.3.1 *Système linéaire*

Ce système intervient notamment pour décrire les petites oscillations périodiques en mécanique. Sa forme générale est :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy\end{aligned}\tag{12-12}$$

On peut utiliser la matrice A et le vecteur \mathbf{x} pour l'écrire :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\tag{12-13}$$

Système linéaire veut dire que si \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 sont deux solutions, alors la combinaison linéaire $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$ est aussi solution. C'est le principe de superposition. On voit que $\mathbf{x}^* = 0$ est toujours un point fixe. Les solutions \mathbf{x} peuvent être vues comme des trajectoires dans le plan de phase (x, y) . En dimension 1, un point fixe peut être attractif ou répulsif. Dans un système de dimension deux, il est intéressant d'ajouter la stabilité au sens de Liapunov. On dira qu'un point fixe est stable au sens de Liapunov quand toutes les trajectoires qui démarrent assez près de \mathbf{x}^* restent près de \mathbf{x}^* pour tout temps. Si le point fixe n'est pas attracteur, on parle de stabilité neutre pour un tel point fixe. La figure 12.4 pour l'oscillation de la masse au bout d'un ressort est un exemple de stabilité neutre.

Le système 12-12 avec ses conditions initiales peut être intégré analytiquement avec les méthodes de l'algèbre linéaire. L'idée est de chercher des solutions de la forme $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$, avec l'espoir que la solution varie exponentiellement dans la direction donnée par le vecteur \mathbf{v} . En insérant cette forme dans 12-12, on obtient :

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

un système linéaire homogène que l'on peut réécrire :

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$$

avec I la matrice identité. Les λ et \mathbf{v} constituent les valeurs et vecteurs propres de la matrice A en 12-13. Pour que ce système homogène ait des solutions non triviales, il faut que le déterminant de la matrice $A - \lambda I$ soit nul :

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Cette équation est le polynôme caractéristique dont les racines sont les valeurs propres, ici le polynôme du second degré :

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

Quand les deux racines λ_1 et λ_2 sont distinctes, les deux vecteurs propres associés \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont linéairement indépendants et on peut écrire la condition initiale sous la forme d'une combinaison linéaire de ces deux vecteurs propres :

$$\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$$

Et la solution générale n'est alors pas autre chose que :

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$$

Il apparaît donc très important de trouver les valeurs propres et vecteurs propres, car ils structurent complètement le portrait de phases. Il y a plusieurs cas possibles avec chacun leur typologie.

1. Valeurs propres réelles

Si $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, la droite passant par l'origine et parallèle à \mathbf{v}_1 est appelée variété (*manifold*) instable. La droite passant par l'origine et parallèle à \mathbf{v}_2 est la variété

stable. Un exemple typique est le système $dx/dt = x$, $dy/dt = -y$, auquel cas \mathbf{v}_1 est selon l'axe des x et \mathbf{v}_2 selon l'axe des y . L'origine $\mathbf{x}^* = 0$ est appelée nœud-col car il y a attraction selon y et répulsion selon x . Le portrait de phase est le suivant :

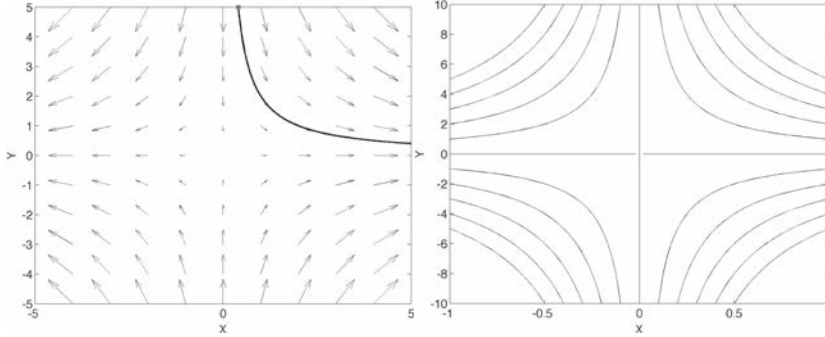


Figure 12.11

À gauche, le champ de vitesse dans l'espace x, y . Une trajectoire (en noir) est intégrée depuis le point $(0.4, 5)$. À droite, l'ensemble des trajectoires qui constitue le portrait de phase.

Les particules sont attirées vers l'axe des x et au contraire repoussées de l'axe des y . La figure montre une trajectoire tangente en chaque point au vecteur vitesse. Le diagramme confirme la forme de l'instabilité du point fixe origine que fournit l'analyse via les valeurs propres et vecteurs propres de A . Notez que si les deux valeurs propres sont négatives, les trajectoires sont attirées vers l'origine dans toutes les directions qui est un point fixe stable ou encore nœud stable et inversement nœud instable si les deux valeurs propres sont positives.

2. Valeurs propres complexes

Si la partie réelle est nulle, on est dans le régime des oscillations périodiques, le portrait de phase est du type « centre », celui du système 12-6 et de la figure 12.4.

Si la partie réelle est négative, la solution décrit une spirale vers l'origine, une oscillation amortie en présence de frottement (voir exercice 11).

12.3.2 Système non linéaire

Évidemment la nouveauté est celle des systèmes non linéaires :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{12-14}$$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ représente un point du plan de phase et $d\mathbf{x}/dt$ est la vitesse de la particule en ce point. Le point $\mathbf{x}(t)$ dessine la trajectoire de la solution dans le plan x_1, x_2 . Tout le plan est rempli de trajectoires puisque chaque point peut servir de conditions initiales. On peut calculer numériquement $\mathbf{x}(t)$ avec les méthodes numériques de l'Annexe mais l'objectif ici est de déterminer l'allure qualitative des solutions dans le plan de phase directement à partir de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

12.3.2.1 Portrait de phase

Le portrait de phase du système 12-14 consiste en l'ensemble des trajectoires solutions dans le plan x_1, x_2 . Il est structuré par les éléments suivants :

1. Les points fixes qui obéissent toujours à $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$.
2. Les orbites fermées : ce sont des solutions périodiques locales dans le plan de phase obéissant à $\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t)$ pour tout t avec T la période. Elles sont appelées cycles limites.
3. La disposition des trajectoires au voisinage des points fixes et des orbites fermées.
4. L'étude de la stabilité des points fixes et des orbites fermées.

On peut avoir une bonne idée du portrait de phase en traçant le champ de vitesse $(dx_1/dt, dx_2/dt)$ en chaque point (x_1, x_2) du plan de phase comme sur la figure 12.11. Les changements d'orientation du vecteur vitesse seront repérés plus facilement en traçant les *nullclines*, ces courbes sur lesquelles $dx_1/dt = 0$ soit $f_1(x_1, x_2) = 0$ et $dx_2/dt = 0$ soit $f_2(x_1, x_2) = 0$. L'axe des y est la nullcline $dx/dt = 0$ et l'axe des x est la nullcline $dy/dt = 0$ sur la figure 12.11.

Le théorème d'existence et d'unicité des solutions est ici satisfait si \mathbf{f} et toutes ses dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ pour $i, j = 1, 2$ sont définies continues. L'unicité garantit alors que les trajectoires ne se coupent pas. Ceci a des conséquences très importantes en deux dimensions. Imaginons une région R isolée dans le plan de phase telle qu'aucune trajectoire ne puisse en sortir.

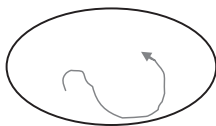


Figure 12.12

Que peut donc bien devenir une trajectoire à l'intérieur d'une telle frontière sur la figure 12.12 ? S'il y a un point fixe présent, elle convergera vers celui-ci. Mais s'il n'y en a aucun, alors la trajectoire doit approcher une orbite fermée (une solution périodique) puisqu'elle ne peut pas s'échapper et ne peut pas se recouper. Le théorème de Poincaré-Bendixon démontre cette intuition et rationalise l'existence des cycles limites pour les systèmes de dimension deux dans ce type de situation.

12.3.2.2 Stabilité

L'étude de la stabilité d'un point fixe de 12-14 procède, soit graphiquement en observant le champ de vitesse (ou les trajectoires si on les a calculées numériquement), soit en reprenant la même procédure des petites perturbations utilisées au § 12-2-3. On écrit : $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}$ que l'on injecte dans 12-14 et on garde les termes d'ordre un du développement de Taylor autour de \mathbf{x}^* pour obtenir :

$$\frac{d\delta\mathbf{x}}{dt} = J\delta\mathbf{x} \dots + O(\delta x_i^2, \delta x_i \delta x_j) \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad 12-15$$

où J est la matrice jacobienne des dérivées premières des f_i qui est évaluée au point fixe \mathbf{x}^* . Le système 12-15 pour les petites perturbations est identique au système linéaire 12-12 et donc les méthodes d'algèbre linéaire déjà présentées sont utilisables ici : on détermine les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice jacobienne pour trouver ce qui se passe au voisinage de \mathbf{x}^* .

12.3.2.3 Système conservatif

Si le système provient de la mécanique et que le frottement est négligeable, alors la force sur une particule qui se déplace sur une droite dérive d'une énergie potentielle U et le système dynamique est :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ m \frac{dv}{dt} &= -\frac{dU}{dx} \end{aligned}$$

Si on multiplie la deuxième équation par v , on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + U \right) = 0 \quad \text{et donc} \quad E = \frac{1}{2} m v^2 + U = \text{const.}$$

où l'on a utilisé le fait que : $\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt}$. On reconnaît la conservation de l'énergie mécanique du chapitre 4. Ainsi E est conservée sur chaque trajectoire de l'espace des phases. On va exiger que E ne soit pas constant dans tout l'espace des phases. Ceci a pour conséquence qu'un système conservatif ne peut pas avoir de point fixe attractif. Un tel système est dit conservatif. Un système conservatif présente donc, soit des nœuds-cols, soit des centres (les solutions périodiques neutres). Le pendule est le prototype du système conservatif à deux dimensions. Aux petites amplitudes, le mouvement du pendule se ramène à celui du système linéaire du ressort mais qu'en est-il quand les amplitudes sont grandes ? Au § 4.3 on a trouvé que le système dynamique s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} + \frac{g}{l} \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad 12-16$$

avec θ l'angle entre le pendule et la verticale, ω la vitesse angulaire et donc $d\omega/dt$ l'accélération angulaire. Pour enlever le g/l , il faut adimensionnaliser 12-16. On choisit une nouvelle échelle de temps $\tau = (l/g)^{1/2}$ pour remplacer t par $t = \tau t'$ et ω par ω'/τ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt'} &= \omega' \\ \frac{d\omega'}{dt'} &= -\sin \theta \end{aligned} \quad 12-17$$

Les primes ' ont joué leur rôle et on les laisse tomber par la suite. À cause du $\sin \theta$, 12-17 est bien un système non linéaire. Les points fixes sont $(\theta^*, \omega^*) = (k\pi, 0)$. Compte tenu de la périodicité, on peut juste considérer ces deux-là, $(0, 0)$ et $(\pi, 0)$.

La matrice jacobienne au premier point est $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont

$\lambda = \pm i$. Les solutions sont donc périodiques, le point fixe est un centre comme pour 11-6 et on retrouve l'analyse élémentaire faite pour les petites amplitudes

du § 3.5.2. La matrice jacobienne pour l'autre point $(\pi, 0)$ est $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et l'équa-

tion des valeurs propres $\lambda^2 - 1 = 0$ fournit $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = +1$. L'équation des vecteurs propres $(J - \lambda I)\mathbf{v} = 0$ donne les deux vecteurs propres associés $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$ et $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$. Ce point fixe est donc un nœud-col. Finalement chaque trajectoire conserve son énergie E :

$$E = \frac{1}{2} \omega^2 - \cos \theta \quad 12-18$$

Dans l'espace des phases ω, θ , l'équation 12-18 pour chaque valeur de E donne directement la trajectoire correspondante.

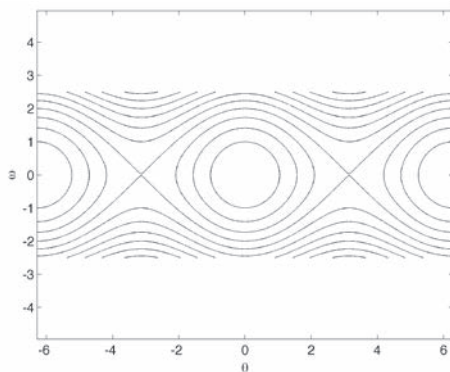


Figure 12.13

Le portrait de phase du pendule sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. Les contours de l'énergie $E = \text{constante}$ dans le plan θ, ω sont les trajectoires. Des solutions périodiques non isolées existent dans une région finie autour du point fixe à l'origine.

On retrouve sur la figure 12.13 les orbites fermées pour les petites énergies, puis pour $E = 1$ les nœuds-cols en $\theta = \pm \pi$ qui sont les points fixes quand le pendule est inversé, un état instable dans la direction du vecteur propre \mathbf{v}_2 associée à $\lambda_2 = +1$.

Et pour les énergies encore plus grandes, les oscillations disparaissent pour faire place aux rotations complètes autour du pivot. La vitesse angulaire de ces rotations est modulée, faible aux positions $\pm\pi$, forte aux positions $0, \pm 2\pi$.

12.3.2.4 Cycle limite

Un cycle limite est une orbite fermée et isolée dans le plan de phase. Si toutes les trajectoires approchent ce cycle limite de l'intérieur ou de l'extérieur, il est stable et instable dans le cas contraire. Les cycles limites stables sont importants car ils représentent des oscillations auto-entretenues qui existent même en l'absence de forçages externes périodiques. Citons les battements du cœur, les vibrations des ponts ou des ailes d'avion ainsi que les oscillations de réactions chimiques. Les cycles limites n'existent que dans les systèmes non linéaires. Un système linéaire a certes des orbites fermées mais elles ne sont pas isolées. En effet, si $\mathbf{x}(t)$ est une solution périodique, $c\mathbf{x}(t)$ en est une autre et on peut remplir tout le plan avec ces solutions. Ce n'est pas le cas des cycles limites : leur amplitude provient de la structure même du système. On se borne ici à donner quelques exemples. Pour éviter de considérer des systèmes compliqués en coordonnées cartésiennes, les coordonnées polaires r, θ sont préférées.

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= r(1 - r^2) \\ \frac{d\theta}{dt} &= 1\end{aligned}\tag{12-19}$$

Les deux équations sont découplées et la deuxième est très simple, une simple rotation uniforme. En revanche, la première est non linéaire et possède deux points fixes $r^* = 0$ et $r^* = 1$. L'observation de la forme de $f(r)$ montre immédiatement que $r^* = 0$ est instable et que $r^* = 1$ est stable. Ceci veut dire que dans le plan cartésien (x, y) associé, toutes les trajectoires approchent le cercle de rayon $r^* = 1$. Et comme le mouvement est simplement une rotation à vitesse angulaire constante, toutes les trajectoires convergent en spirales pour former une solution périodique isolée, un cycle limite à $r^* = 1$.

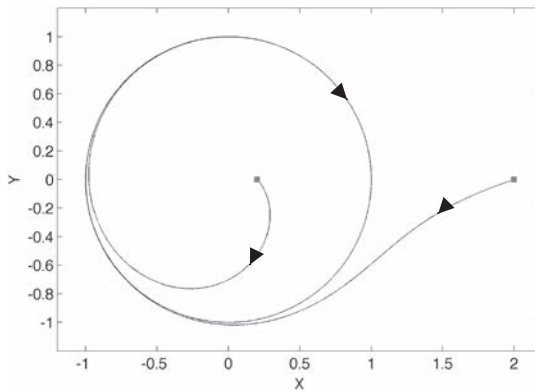


Figure 12.14

Deux trajectoires sont représentées dans l'espace des phases cartésien x, y . L'une démarre pour $r = 0,2$, l'autre pour $r = 2$. Les deux se terminent en s'enroulant *ad infinitum* sur le cercle de rayon 1, le cycle limite du système 12-19.

Une équation qui a joué un grand rôle dans le développement de la dynamique non linéaire est l'équation de Van der Pol qui provient du domaine électrique (les circuits oscillants RLC) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad 12-20$$

où μ est un paramètre de contrôle. Le comportement nouveau vient du terme en dx/dt . Si $\mu = 0$, l'équation est celle de l'oscillateur harmonique. Si le coefficient de dx/dt est positif, le frottement amortit l'oscillation, tandis que s'il est négatif, il l'amplifie. Qualitativement l'oscillation périodique va donc être d'abord amplifiée quand x est petit, puis amortie quand x aura atteint une amplitude assez grande. On peut prouver que l'équation de Van der Pol a un cycle limite stable pour tout $\mu > 0$. Pour intégrer l'équation 12-20, on la remet sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -\mu(x^2 - 1)y - x \end{aligned}$$

Les figures suivantes illustrent les solutions numériques obtenues pour $\mu = 1,5$.

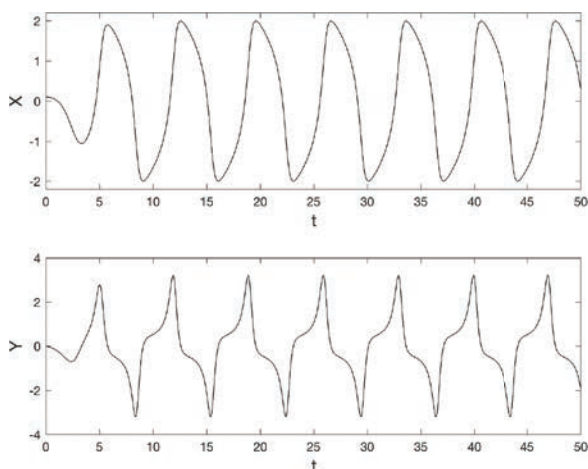


Figure 12.15

La solution de 12-20 pour $x|_0 = 0,1$ et $dx/dt|_0 = 0$ pour $\mu = 1,5$.

La série temporelle de la figure 12.15 montre que x et y deviennent rapidement périodiques mais ce ne sont pas des solutions de type sin ou cos, la forme de y en particulier montre des plateaux suivis de fortes variations. Ceci devient encore plus manifeste quand on augmente μ où l'on peut observer des oscillations quasi rectangulaires encore appelées oscillations de relaxation. La structure de l'espace des phases est illustrée sur la figure 12.16.

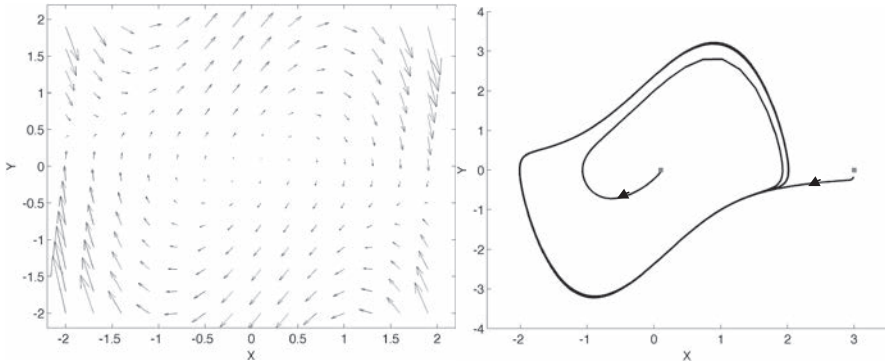


Figure 12.16

À gauche, le champ de vitesse de l'oscillateur de Van der Pol dans l'espace xy . À droite, deux trajectoires dans l'espace des phases partant du point $(0.1, 0)$ et $(3, 0)$ respectivement $[\mu = 1,5]$.

La figure 12.16 montre la complexité du champ de vitesse près de l'origine. Pour les grandes valeurs de x , on voit un flot convergent puissant selon y qui ramène les particules le long de l'axe des x . Les deux trajectoires dans l'espace des phases montre la forme très particulière du cycle limite.

12.3.2.5 La bifurcation de Hopf

Les bifurcations des points fixes vues au § 12.2.5 ont leurs analogues en deux dimensions. La vraie nouveauté concerne les bifurcations qui font apparaître ou disparaître des oscillations, les bifurcations dites de Hopf. Supposons qu'un système ait un point fixe x^* . Quelles sont les possibilités pour qu'il perde sa stabilité quand un paramètre μ varie ? L'information est contenue dans la matrice jacobienne J de 12-15. L'équation pour les valeurs propres est un polynôme du second degré à coefficients réels. Donc il n'y a que deux possibilités, soit les valeurs propres sont réelles, soit complexes conjuguées.



Figure 12.17

En (a) les valeurs propres sont réelles et négatives. En (b) les valeurs propres sont complexes conjuguées.

Lorsque sous l'effet de la variation d'un paramètre μ , les valeurs propres deviennent positives dans le cas (a), on retrouve les bifurcations nœuds-cols, transcritique et fourche du § 12.2.5. Dans le cas (b), une oscillation instable est possible si la partie réelle des deux valeurs propres devient positive quand μ passe une valeur critique. Les oscillations amorties pour $\mu < \mu_C$ deviennent amplifiées pour $\mu > \mu_C$. On dit alors que le système a franchi une bifurcation de Hopf supercritique. Une petite modification du système 12-19 en coordonnées polaires montre cette bifurcation :

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \mu r - r^3 \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega + br^2\end{aligned}\tag{12-21}$$

Il y a dans ce système trois paramètres, μ qui contrôle la stabilité du point fixe à l'origine, ω qui donne la fréquence des petites oscillations et b introduit une dépendance de la fréquence à l'amplitude des oscillations pour r grand. On va juste se concentrer ici sur la variation de μ . Quand $\mu < 0$, l'origine est un point spiral stable (une oscillation amortie). Pour $\mu > 0$, l'origine devient un point spiral instable, l'amplitude augmente mais vient se placer sur un cycle limite stable pour $r = \sqrt{\mu}$. Le portrait de phase de ces deux situations est illustrée ci-dessous.

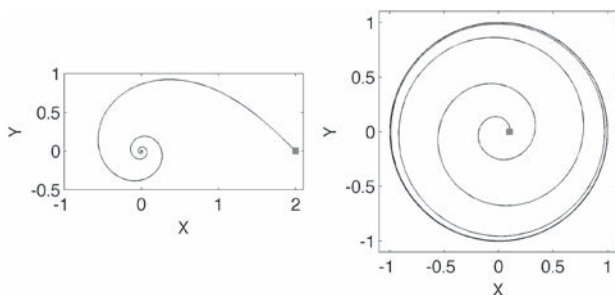


Figure 12.18

Le portrait de phase du système 12-21 dans le plan cartésien x, y pour $b = 0$ et $\omega = 5$. À gauche $\mu = -1$, à droite $\mu = 1$.

La figure 12.18 montre le portrait de phase de chaque côté de la bifurcation de Hopf à $\mu_C = 0$. Lorsque $\mu = -1$, on observe une oscillation amortie (une spirale stable) qui rejoint l'origine. Lorsque $\mu = 1$, la trajectoire vient se nicher sur le cycle limite de rayon 1. On peut montrer les propriétés générales d'une bifurcation de Hopf supercritique :

- 1) L'amplitude du cycle limite augmente comme $(\mu - \mu_C)^{1/2}$ au voisinage de la bifurcation.
- 2) La fréquence des oscillations reste proche de celle obtenue à la bifurcation $\omega = \text{Im}(\lambda)$.

Pour un système bidimensionnel contraint à évoluer dans le plan, les trajectoires n'ont finalement que deux possibilités, soit atteindre un point fixe, soit atteindre une orbite fermée, un cycle limite. En revanche en trois dimensions, le sujet du prochain paragraphe, les trajectoires peuvent se promener éternellement dans une région bornée sans jamais se couper ni finir sur un point fixe ou un cycle limite. Les trajectoires peuvent être attirées par une structure géométrique complexe appelée attracteur étrange. Sa structure est fractale et les solutions sont apériodiques et sensibles aux conditions initiales.

12.4 Systèmes différentiels de dimension 3

L'étude des systèmes dynamiques a vu un grand renouveau quand Lorenz (1963) montra dans un article devenu célèbre que des solutions apériodiques (ressemblant à la série temporelle d'une vitesse dans un écoulement turbulent) pouvaient émerger dans un système déterministe non linéaire de trois variables. Ces solutions erratiques furent associées avec le mot chaos et le modèle de Lorenz fournit une architecture pour observer la transition vers le chaos. Lorenz a remis en cause l'idée de Landau que la turbulence dans les fluides provenait de l'interaction d'un grand nombre de modes puisque d'après lui seuls trois suffisent.

12.4.1 *Le système de Lorenz*

Les équations du système sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz\end{aligned}\tag{12-22}$$

Les paramètres σ , b , r sont positifs et représentent des nombres sans dimension que l'on rencontre lorsqu'on étudie la convection thermique entre deux plaques horizontales portées à des températures différentes, T_1 en haut, T_2 en bas. Lorsque T_2 est juste supérieure à T_1 , la diffusion thermique moléculaire est suffisante pour transférer la chaleur de la plaque inférieure à la plaque supérieure et le fluide reste au repos (les molécules font le travail). Mais quand T_2 augmente encore, on voit apparaître des rouleaux de convection réguliers et périodiques puis pour des valeurs encore plus fortes, le mouvement devient turbulent. C'est cette transition que les équations 12-22 veulent capter avec des équations infiniment plus simples que les équations de Navier Stokes de la Mécanique des fluides. Le paramètre important dans 12-22 est r , le nombre de Rayleigh qui est proportionnel à $\Delta T = T_2 - T_1$ et qui contrôle l'intensité de la convection thermique.

Lorenz a découvert que pour un certain régime de paramètres, il n'y avait plus de points stables, plus de cycles limites stables, mais des mouvements apériodiques. Comme il avait aussi prouvé que les trajectoires étaient confinées dans un volume qui tendait vers 0 au cours du temps, il se demanda quel pouvait bien être l'objet sur lequel se déplaçaient des trajectoires qui, rappelons-le, ne peuvent jamais se croiser. Cet objet complexe de structure fractale fut nommé attracteur étrange. Tous les outils sont maintenant en place pour décrire cette transition vers le chaos. La première chose est de réaliser que la nouveauté vient des termes non linéaires xz et xy des deux dernières équations de 12-22. Les propriétés du système de Lorenz sont les suivantes.

1. Symétrie

Les équations sont invariantes si on change (x, y) en $(-x, -y)$. Si on connaît une solution $[x(t), y(t), z(t)]$, alors $[-x(t), -y(t), z(t)]$ est aussi solution.

2. Contraction du volume

On considère dans l'espace des phases l'évolution d'une surface $A(t)$ qui contient un volume $V(t)$. La surface $A(t)$ définit les conditions initiales des trajectoires du système et on se pose la question de l'évolution du volume enclos par la surface au cours du temps. Cela rappelle bien sûr la conservation de la masse en mécanique des fluides dont on adopte le vocabulaire correspondant. Soit \mathbf{n} la normale extérieure en un point de la surface A . La vitesse normale à la surface, celle qui peut changer le volume, est donc $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$. La quantité de fluide qui peut sortir pendant un intervalle de temps Δt à travers l'aire ΔA est $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \Delta A \Delta t$. La variation du volume est obtenue en intégrant cette quantité sur la surface A :

$$\Delta V = \iint \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \Delta t \Delta A$$

En faisant tendre Δt vers 0, on obtient :

$$\frac{dV}{dt} = \iint \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dA$$

Le théorème de Green permet de transformer cette intégrale de surface en intégrale sur le volume $V(t)$ avec l'opérateur divergence :

$$\frac{dV}{dt} = \iiint \nabla \cdot \mathbf{f} dV$$

La croissance ou non du volume en fonction du temps dépend de la divergence de \mathbf{f} qui s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \quad 12-23$$

Avec les équations 12-22, la divergence devient :

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = -(\sigma + 1 + b) < 0$$

Comme cette divergence est constante, l'équation d'évolution du volume est :

$$\frac{dV}{dt} = -(\sigma + 1 + b)V$$

V décroît donc exponentiellement vers 0. Lorsque cette propriété est satisfaite, on dit que le système dynamique est dissipatif. Cela fournit une forte contrainte sur l'évolution du portrait de phases.

3. Les points fixes

L'analyse de 12-22 est faite en fixant $\sigma = 10$ et $b = 8/3$ aux valeurs de Lorenz et en laissant varier r . L'origine $x^* = (0, 0, 0)$ est un point fixe pour toutes les valeurs des paramètres. Lorsque $r < 1$, on peut montrer que toutes les trajectoires tendent vers l'origine qui est donc globalement stable, c'est l'état de repos diffusif. Quand $r > 1$, ce point devient instable comme un point col. Il existe une paire de points fixes symétriques $x^* = y^* = \pm[b(r - 1)]^{1/2}$, $z = r - 1$, appelés C^+ et C^- , analogues aux rouleaux de convection qui tournent dans un sens ou dans l'autre dans l'expérience de convection.

Le diagramme de bifurcation est donc celui d'une bifurcation fourche en $r = 1$.

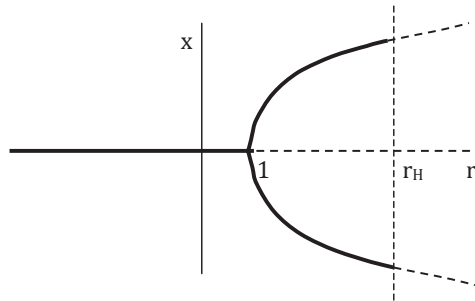


Figure 12.19

Le diagramme de bifurcation du système de Lorenz. L'origine est stable pour $r < 1$ et devient instable pour $r > 1$. Les points fixes C^+ et C^- apparaissent alors et deviennent eux-mêmes instables pour $r = r_H = 470/19$. Que devient le système au-delà ?

4. L'attracteur de Lorenz

En $r = r_H = 470/19 \approx 24,74$, les points C^+ et C^- deviennent eux-mêmes instables par une bifurcation de Hopf dite sous-critique, ce qui veut dire que les cycles limites qui naissent sont eux-mêmes instables. Donc à droite du pointillé vertical, il n'y a plus de structure stable et on se trouve en terra incognita. Les trajectoires ne peuvent pas partir à l'infini à cause de la contraction du volume qui impose une forte contrainte à se rapprocher de l'origine. Où vont-elles ? Pour le savoir, Lorenz

a expérimenté numériquement le système pour $r = 28$ ($> r_H$) dont les solutions sont illustrées ci-après.

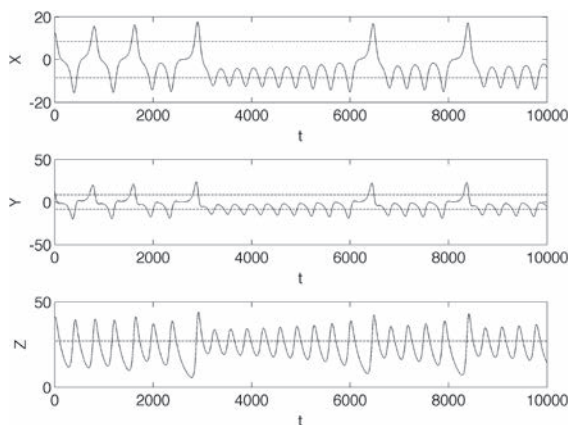


Figure 12.20

Les trois variables du système de Lorenz pour $r = 28$. Les droites en pointillé indiquent les positions des deux points fixes C^+ et C^- .

Les séries temporelles de la figure 12.20 montrent clairement un régime apériodique. On voit bien sur la courbe $x(t)$ que le système peut osciller parfois assez longtemps autour d'un point fixe, mais les oscillations sont amplifiées et le système finit par sauter autour de l'autre point fixe également instable. Le portrait de phase X, Z révèle la structure bien connue en aile de papillon de l'attracteur.

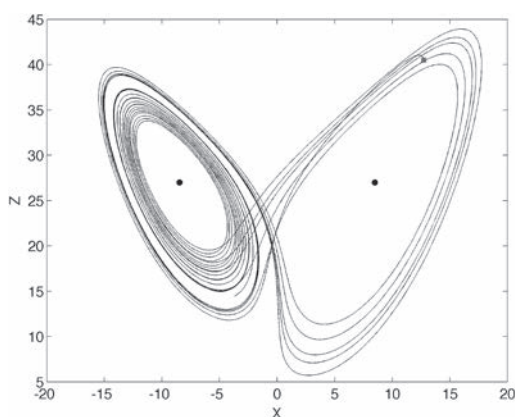


Figure 12.21

La trajectoire démarre du carré en haut à droite. Les points noirs représentent les deux points fixes C^+ et C^- .

La figure 12.21 montre dans le plan x, z des oscillations instables autour des deux points fixes C^- et C^+ , avec des possibilités de basculement de l'un à l'autre. Les trajectoires semblent se croiser uniquement à cause de la représentation bidimensionnelle dans ce plan xz .

5. La sensibilité aux conditions initiales ou SCI

Une des propriétés majeures du système de Lorenz dans le régime chaotique est la sensibilité aux conditions initiales. Deux trajectoires initialement très proches se séparent rapidement pour occuper des positions dans l'espace très différentes. Lorenz raconte qu'il calculait les solutions avec une calculatrice de poche sur disons 5 000 pas de temps. Il refait la même simulation mais part manger après avoir noté les valeurs de x, y, z sur un bout de papier au bout de 3 000 pas de temps. En revenant, il recopie ces valeurs dans la calculatrice et relance le calcul mais observe qu'il ne retrouve pas les valeurs obtenues par la première série d'intégration directe sur 5 000 pas. Dans ce genre de situations, on commence toujours par vérifier s'il n'y a pas un problème avec la méthode numérique, mais Lorenz finit par se convaincre que le résultat était correct. On peut le vérifier facilement : on met un grand nombre de particules dans un petit cube en bas et on suit chacune d'entre elles au cours du temps par intégration de 12-22.

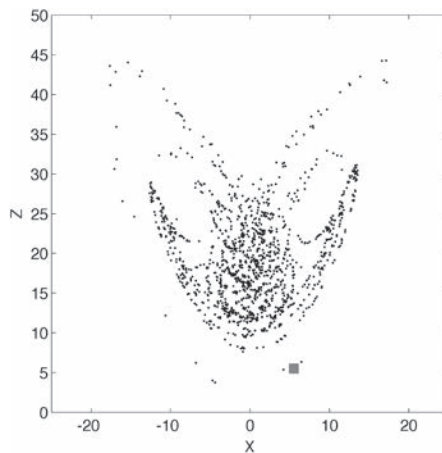


Figure 12.22

Un grand nombre de particules sont mises initialement dans le petit cube en bas. Les points noirs représentent les positions finales de ces particules après 3 000 pas de temps.

Après quelques milliers d'itérations, les particules initialement très proches se retrouvent à peu près n'importe où sur l'attracteur. La déformation est assez faible au début quand les particules tournent ensemble autour du même point fixe.

L'explosion arrive quand certaines du groupe sont attirées rapidement par l'autre point fixe.

Cette sensibilité aux conditions initiales (SCI) a des conséquences majeures sur la prédiction d'un système chaotique. Imaginons juste deux trajectoires qui sont séparées de δ_0 à l'instant $t = 0$ puis qui se séparent exponentiellement :

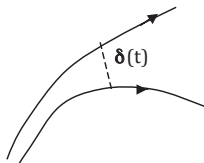


Figure 12.23

La première trajectoire a pour équation $\mathbf{x}(t)$ et la deuxième $\mathbf{x}(t) + \delta(t)$. On observe une séparation exponentielle des trajectoires au cours du temps, de sorte que la distance $|\delta|$ qui mesure la déviation entre les deux augmente comme :

$$|\delta(t)| = |\delta_0| e^{\lambda t}$$

où λ le taux de croissance est appelé l'exposant de Liapunov du système. On peut le déterminer empiriquement en comparant des paires de trajectoires. Évidemment cette croissance exponentielle s'arrête quand $|\delta|$ atteint la taille de l'attracteur. Supposons maintenant que l'une des trajectoires soit la vraie trajectoire et que la deuxième soit une prédiction faite par une observation des conditions initiales de la première avec une certaine erreur δ_0 à $t = 0$. On connaît ici parfaitement le modèle et on se sert donc de 12-22 pour calculer cette trajectoire perturbée. On juge que la prédiction de la deuxième à l'instant t reste correcte tant que l'erreur reste en deçà d'un certain seuil $|\delta| \sim a$. En d'autres termes, la prédiction devient mauvaise si :

$$|\delta(t)| = |\delta_0| e^{\lambda t} > a$$

ou

$$t > \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{a}{|\delta_0|} \right)$$

Pour fixer les idées, supposons $a = 1$ et $|\delta_0| = 10^{-2}$, alors le temps de prédiction correct est $t_p = \frac{2}{\lambda} \ln(10)$. Qu'à cela ne tienne, on va juste diminuer l'erreur $|\delta_0|$ sur l'état initial pour augmenter t_p . Mais le développement de la relation précédente montre la difficulté :

$$t_p = \frac{1}{\lambda} (\ln a - \ln |\delta_0|)$$

En gardant le même critère d'erreur à l'instant t et la même valeur de λ , on voit que pour doubler t_p , $|\delta_0| = 10^{-4}$: il faut donc diminuer l'erreur initiale $|\delta_0|$ par un facteur 100... Si on suppose que le temps des moyennes latitudes est dans un régime chaotique instable et on a de bonnes raisons de le penser, alors doubler le temps d'une prévision météorologique correcte implique d'observer l'état initial avec une précision 100 fois supérieure. Le chaos lié à la séparation exponentielle des trajectoires met donc une limite à l'horizon de prédiction météorologique, infranchissable en pratique.

12.5 Équations aux différences

Les itérations d'équations aux différences avec une seule variable sont introduites ici car elles sont faciles à calculer et leurs solutions sont très riches : elles comportent des points fixes, des solutions périodiques et du chaos. L'exploration numérique est plus simple et elles ont permis d'identifier la route vers le chaos par doublement de période. Le système dynamique est simplement la génération d'une suite de nombres à partir d'une condition initiale x_0 :

$$x_{n+1} = f(x_n), x_0 = a \text{ pour } t = 0 \quad 12-24$$

La richesse de cette suite discrète vient de ce qu'un point peut sauter par-dessus un autre, ce qui est impossible dans un système à une dimension à temps continu.

12.5.1 Points fixes et toiles d'araignées

Un point fixe existe si $x^* = f(x^*)$, car la suite des x_n reste alors en x^* . Pour examiner la stabilité de x^* , on procède comme au § 12.2.3 en perturbant le point fixe. On écrit :

$$\begin{aligned} x_n &= x^* + \eta_n \\ x_{n+1} &= x^* + \eta_{n+1} \end{aligned}$$

En insérant dans 12-24 et en faisant un développement limité de $f(x)$ au voisinage de x^* , on obtient l'équation :

$$\eta_{n+1} = f'(x^*)\eta_n + O(\eta_n^2)$$

Si on suppose que les termes $O(\eta^2)$ sont négligeables, en posant $\lambda = f'(x^*)$ la solution est simplement $\eta_n = \lambda^n \eta_0$. Si $|\lambda| < 1$, alors les perturbations tendent vers 0 et le point fixe x^* est stable. Si $|\lambda| > 1$, η tend vers l'infini avec n et le point fixe est instable. En revanche la méthode ne dit rien sur le cas marginal quand $\lambda = 1$, auquel cas il faut conserver les termes quadratiques.

Le plus simple est d'expérimenter avec une calculatrice, par exemple $f(x) = x^2$ ou $f(x) = \cos x$ en pressant de façon répétée sur la touche en question. Observez les limites selon la condition initiale et comparez avec l'analyse de stabilité ci-dessus.

Il existe une façon graphique de voir la suite x_n avec le diagramme dit en toile d'araignée (*cobweb*).

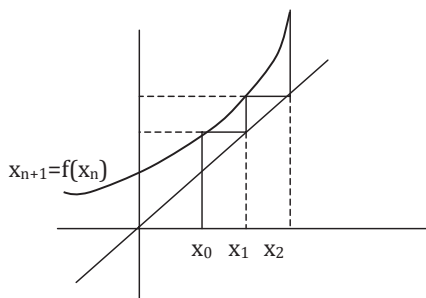


Figure 12.24

La courbe noire est la fonction $y = f(x)$. En traçant la première bissectrice $y = x$, la solution peut être facilement construite de proche en proche.

12.5.2 L'équation logistique

On a déjà rencontré l'équation logistique à temps continu et on l'explore maintenant à temps discret. Elle s'écrit :

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \quad 12-25$$

avec r un paramètre. La courbe de $f(x)$ est une parabole dont le maximum $r/4$ est obtenu en $x = 1/2$. On restreint r à l'intervalle $[0, 4]$ et les valeurs de x sont alors comprises dans l'intervalle $[0, 1]$. Il existe deux points fixes $x^* = 0$ et $x^* = 1 - 1/r$. Ce dernier n'existe que si $r \geq 1$ pour que x reste dans l'intervalle $[0, 1]$. On vérifiera que l'origine est stable si $r < 1$ et instable si $r > 1$, tandis que l'autre point fixe est stable pour $1 < r < 3$ et instable si $r > 3$. Pour $r = 1$, les deux points fixes échangent leur stabilité, et il s'agit donc d'une bifurcation transcritique. Quand $r > 3$, l'équation logistique offre une solution périodique par doublement de période. La solution oscille entre deux valeurs a et b , telles que $b = f(a)$ et $a = f(b)$. Ce qui signifie $f(f(a)) = a$. Ainsi a est le point fixe quand f est appliquée deux fois de suite. On peut voir que le double itéré de f est un polynôme d'ordre 4 et il faut chercher ses intersections avec la première bissectrice pour trouver les points de période 2. Mais cette solution est à nouveau instable quand r augmente et un cycle de période 4 apparaît pour $r = 3,449$ et puis cela continue comme indiqué sur le tableau suivant.

Tableau 12.1 Les valeurs de r d'apparition des doublements de période pour l'équation logistique 12-25.

r	période
3	2
3,449	4
3,544	8
3,564	16
3,568	32
$r_{\infty} = 3,5699$	∞

Cette suite de doublements de période prend le nom de cascade sous-harmonique. Quand $r > r_{\infty}$, on trouve un régime de valeurs de r pour lequel la solution est apériodique, chaotique comme pour le système de Lorenz. Mais il existe aussi à l'intérieur de ce régime chaotique des fenêtres de périodicité. Par exemple, une périodicité 3 est située entre $3,8284 < r < 3,8415$. On observe aussi de l'intermittence entre le chaos et ce cycle de période 3. Les possibilités sont visiblement grandes. Ces régimes sont illustrés sur un diagramme en toile d'araignée pour 4 valeurs de r :

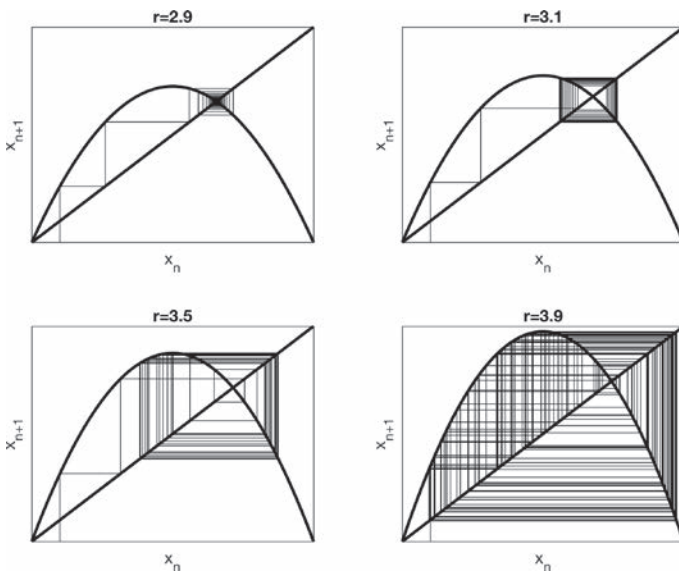


Figure 12.25

Le diagramme en toile d'araignée pour les valeurs de $r = 2.9, 3.1, 3.5, 3.9$ qui illustrent respectivement la convergence vers un point fixe stable, un cycle de période deux, un cycle de période quatre et le régime chaotique. Pour $r = 2.9$, le point fixe est stable, alors que pour les trois dernières l'instabilité du point fixe repousse les trajectoires. Source : O. Arzel.

La figure suivante montre les séries temporelles des valeurs qui apparaissent.

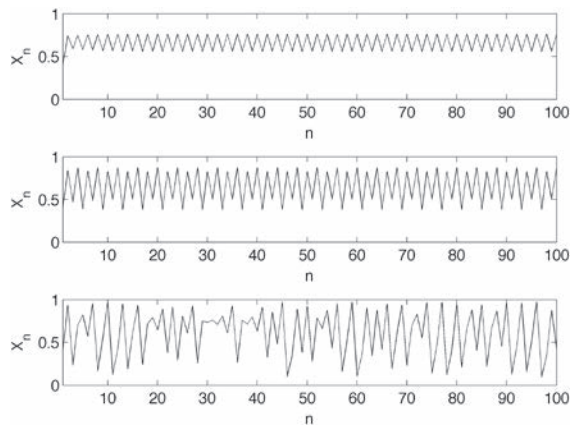


Figure 12.26

La série x_n de l'application logistique pour $n = 1$ à 100 pour trois valeurs de r , en haut $r = 3,1$, au milieu $r = 3,5$, en bas $r = 3,9$. Les points ont été reliés pour plus de lisibilité.

En se servant du tableau 12.1, la figure 12.26 illustre un cycle de période deux pour $r = 3,1$, un cycle de période 4 pour $r = 3,5$ et un régime apériodique pour $r = 3,9$. On notera aussi l'augmentation de l'amplitude des oscillations avec r . Cette cascade sous harmonique a été observée expérimentalement par Libchaber *et al.*, 1982, dans un petit bac de mercure chauffé par dessous, une convection de Rayleigh Bénard. Le paramètre de bifurcation est alors le nombre de Rayleigh proportionnel à la différence de température appliquée sur les parois du bac (voir aussi exercice 18).

L'analyse du système de Lorenz a révélé la divergence exponentielle des trajectoires alors que le volume, lui, se contracte. L'application logistique permet de comprendre comment les trajectoires chaotiques restent dans ce volume en dépit de la divergence de trajectoires proches. Dans le régime chaotique, on itère deux séries en parallèle dont les positions initiales sont très proches sur la figure 12.27.

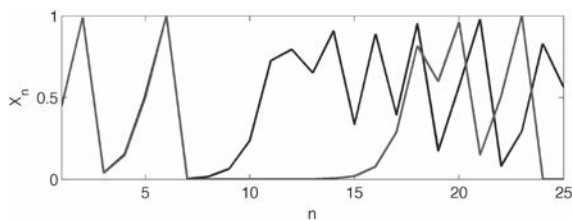


Figure 12.27

Pour $r = 4$ deux trajectoires de 12-25 sont initialisées de deux positions différant de $\varepsilon = 10^{-3}$. Elles se superposent parfaitement pour les premières itérations. À $n = 7$, on observe le début d'une divergence exponentielle des deux positions dans un voisinage de $x^* = 0$.

Il est assez simple de voir que le chaos pour l'application logistique est possible à cause des mêmes propriétés d'étirement - repliement présentes pour le système de Lorenz. Pour $r = 4$, la parabole de l'application logistique $rx(1 - x)$ a un maximum qui vaut 1 pour $x = \frac{1}{2}$. Ainsi x_n dans l'intervalle $[0 \frac{1}{2}]$ donne des x_{n+1} dans l'intervalle $[0 1]$. Il y a donc eu étirement (*stretching*). Les valeurs de x_n dans l'intervalle $[\frac{1}{2} 1]$ donne aussi x_{n+1} sur l'intervalle $[0 1]$, mais *en inversant* l'ordre des positions. On peut dire que cet intervalle est replié (*folded*) sous le précédent.

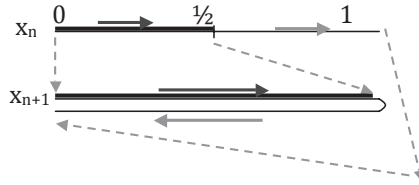


Figure 12.28

Illustration de l'étirement - repliement pour $r = 4$ pour un ensemble de conditions initiales. On voit la différence d'évolution des conditions initiales dans l'intervalle $[0 \frac{1}{2}]$ et celles dans $[\frac{1}{2} 1]$ qui se retrouvent repliées en sens inverse.

On voit sur la figure 12.28 que les nombres de l'intervalle $[0 \frac{1}{2}]$ se retrouvent au contact des nombres de l'intervalle $[\frac{1}{2} 1]$. Cet étirement - repliement ressemble à ce que l'on fait quand on pétrit une pâte où l'on observe que deux points initialement proches finissent par être très séparés. Cette perte d'information sur les conditions initiales est liée au fait que la fonction $f(x)$ de 12-25 n'est pas inversible : on peut toujours calculer x_{n+1} à partir de x_n , mais quand on veut retourner en arrière, il y a ambiguïté puisque deux choix sont possibles. On peut montrer que cette propriété de non-inversion est nécessaire pour générer un régime chaotique.

Stewart dans son livre *Dieu joue-t-il aux dés ?* donne une équation aux différences d'une simplicité désarmante et particulièrement suggestive. La transformation est la suivante, on part d'un chiffre compris entre 0 et 1 que l'on multiplie par 10 puis on supprime le chiffre des unités. Ceci s'écrit :

$$x_{n+1} = 10x_n, \text{ mod}(1) \quad 12-26$$

L'égalité $a = b, \text{ mod}(n)$, l'opération modulo, signifie que $a - b = k.n$ avec k et n entiers de sorte que b est le reste de la division de a par n . Supposons que x_0 ait un nombre de chiffres illimités $x_0 = 0,256328\dots$. En multipliant par 10, on obtient 2,56328. Ici le reste de la division de 2,56328 par 1 est donc 0,56328. L'opération $\text{mod}(1)$ efface le chiffre des unités. On peut alors représenter graphiquement la solution par un point se déplaçant sur le cercle de périmètre 1 sur la figure 12.29. Le cercle a été divisé en 10 secteurs et x_n se promène de secteur en secteur. Donc x_0 est

dans le secteur 2 puis x_1 dans le secteur 5, x_2 dans le secteur 6, etc. La suite explore donc tous les chiffres du nombre de départ x_0 .

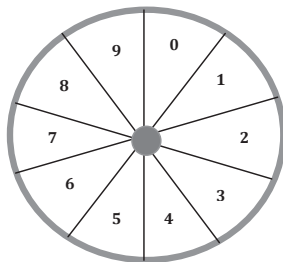


Figure 12.29

Aussi remarquable que cela puisse paraître, cette itération possède les propriétés des systèmes dynamiques précédents, points fixes, solutions périodiques et chaos avec SCI. Considérons ces propriétés successivement :

- 1) Point fixe : dès lors que les chiffres de x_0 se répètent, on a un point fixe. Les chiffres des 10 secteurs sont donc des points fixes possibles.
- 2) Solution périodique : si x_0 est un nombre rationnel de la forme p/q , alors son développement décimal se répète et la suite est donc périodique.
- 3) Solution apériodique : il suffit que x_0 soit un nombre réel. Si par exemple $x_0 = \pi$, toutes les décimales de π , qui forment une suite de nombres aléatoires, seront explorées.
- 4) Comme les nombres rationnels sont entourés de nombres réels, les solutions périodiques sont instables.
- 5) Cette itération possède aussi la SCI. Comparons deux suites $x_0 = \pi$ et $x_0 = \pi'$ où le premier million de décimales de π' coïncide avec celles de π mais qu'après π' soit de la forme 32323232... Les deux suites vont coïncider pendant un million d'itérations pour finalement diverger. La suite partant de π' devient périodique alors que celle partant de π continue d'explorer tous les secteurs de la figure 12.29.
- 6) L'application déterministe génère du hasard : en effet il suffit juste de tirer une suite de chiffres entre 0 et 9 au hasard et d'en faire le nombre x_0 . L'application 12-26 reproduira le hasard mis dans x_0 .

La transformation 12-26 permet le chaos car elle possède ses deux ingrédients fondamentaux, l'étirement (la multiplication par 10) et le repliement (l'opération modulo). Le déplacement sur le cercle illustre géométriquement le repliement. On ne sera pas surpris de savoir que la génération de nombres aléatoires par ordinateur utilise précisément ces opérations modulo.

12.6 Conclusion

Pour conclure, un certain nombre d'exercices sont proposés où les concepts mis en place et l'expérimentation numérique permettent de comprendre un système dynamique de façon globale. Comprendre des données expérimentales demande de faire un modèle. Newton en a fait un pour toute la mécanique classique. Que des systèmes dynamiques déterministes issus de la mécanique se comportent comme des machines à fabriquer du hasard reste la grande idée des années 1970. Quand un système rentre dans un régime chaotique, la sensibilité aux conditions initiales réduit *de facto* l'horizon des prédictions possibles. Le lecteur pourra consulter l'article de Lighthill, 1986, *The recently recognized failure of predictability in Newtonian dynamics*, dans lequel il relate les espoirs de prévision infondés qu'avait fait naître la mécanique newtonienne. Lighthill donne l'exemple du pendule sphérique amorti par la résistance de l'air et forcé par le mouvement du support du haut qui oscille avec une période T : on montre théoriquement que le pendule bouge de façon chaotique quand T est proche de la résonance ($T = 1,00234 \times T_0$ où T_0 est la période propre du pendule libre). Aristote avait noté la dichotomie entre le monde supra-lunaire harmonieux et déterministe et le monde sub-lunaire dominé par le hasard et le chaos. On commence à comprendre pourquoi.

D'autres domaines comme la Biologie ou l'Économie n'ont pas leurs lois de Newton et il faut être imaginatif pour les inventer. Une connaissance des systèmes dynamiques aide à choisir les bonnes équations pour trouver le modèle qui colle le mieux aux données et permettra donc de prédire le mieux possible.

12.7 Exercices

Systèmes à une dimension

L'intégration numérique peut se faire en adaptant le code matlab **sysdyn1.m**

1. Quand une résistance et un condensateur sont connectés à un générateur, la charge électrique Q sur le condensateur obéit à :

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{U}{R} - \frac{Q}{RC}$$

Dessinez le portrait de phase dQ/dt en fonction de Q . Trouvez les points fixes et leur stabilité (U est le potentiel électrique, R la résistance et C la capacité).

2. C Pour ces deux systèmes dynamiques, calculez et dessinez le potentiel V . Puis trouvez les points fixes et leur stabilité :

1) $dx/dt = x(1 - x)$

2) $dx/dt = x - x^3$.

3. * C Un modèle de surpêche

L'évolution d'une population de poissons soumise à un effort de pêche est modélisée par l'équation logistique :

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - H$$

avec N le nombre de poissons, r le taux de croissance initial, K la population à l'équilibre et H l'effort de pêche.

(i) Il est souvent pratique d'adimensionnaliser un problème avant de calculer. Choisir $x = N/K$ et l'échelle de temps τ pour réécrire l'équation comme :

$$\frac{dx}{d\tau} = x(1 - x) - h$$

(ii) Discutez des points fixes et de leur stabilité pour $h = 0$, $0 < h < 1/4$, $h = 1/4$ et $h > 1/4$ et tracez le diagramme de bifurcation x fonction de h .

(iii) Explorez numériquement les solutions. Montrez ce qui se passe quand on augmente lentement h en fonction du temps.

4. * C Retour sur la bifurcation fourche supercritique

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^3$$

(i) Reprendre le diagramme de bifurcation en traçant aussi les vecteurs vitesses dx/dt sur le même diagramme.

(ii) Étudiez la variation temporelle de la solution près d'un point fixe quand $r \neq 0$.

(iii) Même chose quand $r = 0$ avec x_0 , $t = 0$ arbitraire. Discutez de l'existence de la solution.

5. * C Vol libre : la force exercée par l'air dans la chute libre d'un *skydiver* est en kv^2 et donc la deuxième loi dans la direction verticale est :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

(i) Tracez le portrait de phase et donnez une analyse graphique de ce problème. Montrez que le point fixe est stable. Quelle est la vitesse limite v^* ?

(ii) Il est pratique pour la suite de mettre l'équation sous une forme adimensionnelle en choisissant l'échelle de vitesse v^* et une échelle de temps τ à déterminer :

$$\frac{dv'}{dt'} = 1 - v'^2$$

Ici les variables primées sont adimensionnelles.

(iii) Un test de chute libre a fourni les observations suivantes : la chute libre de 9 570 m à 640 m a duré 116 s, la masse de l'homme + équipement était $m = 120$ kg.

Estimez k . Pour cela, il faudra calculer l'altitude en fonction du temps. Sachant que la force de traînée s'exprime comme $\frac{1}{2} \rho_{\text{AIR}} A C_D v^2$ avec A la surface frontale exposée à l'écoulement. Estimez grossièrement le coefficient de traînée C_D . Notez que ρ_{AIR} décroît rapidement avec l'altitude.

6. La croissance de tumeurs cancéreuses peut être modélisée par la relation de Gompertz :

$$\frac{dN}{dt} = -aN \ln(bN)$$

Les paramètres a et b sont positifs.

(i) Étudiez et tracez la vitesse dN/dt en fonction de N . Déterminez les points fixes et leur stabilité.

(ii) Calculez $N(t)$ pour différentes valeurs initiales N_0 . *Note* : l'intégrale se calcule simplement en faisant le changement de variable $u = \ln(N)$.

7. * C Flot sur un cercle : on considère un système où une particule se déplace sur un cercle (plutôt que sur l'axe des x),

$$\frac{d\theta}{dt} = f(\theta)$$

avec θ la position angulaire sur le cercle. Le système est toujours à une dimension, mais une particule peut revenir à sa position de départ et on peut donc avoir des solutions périodiques. La plus simple est de prendre $f(\theta) = \omega$, la particule tourne sur le cercle à la vitesse angulaire ω . L'oscillateur suivant est non uniforme et on le rencontre dans beaucoup de domaines (électronique, biologie, mécanique) :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega - a \sin \theta$$

(i) Étudiez $f(\theta)$ selon la valeur du paramètre a . Identifiez les régimes oscillants, les points fixes et leur stabilité.

(ii) Quand $a < \omega$, le système est un oscillateur non uniforme. Étudiez numériquement le système. Montrez que la période T devient infinie quand $a_C = \omega$. On parle de bifurcation par période infinie et on peut montrer que $T \propto (a_C - a)^{-1/2}$. À vérifier numériquement.

Systèmes à deux dimensions

L'intégration numérique des exemples ci-dessous peut se faire en adaptant le code matlab **sysdyn2.m**

La vision globale de ces systèmes dynamiques demande de construire le portrait de phase en deux dimensions. Le plus direct est de résoudre numériquement le système pour construire les trajectoires $x(t)$, $y(t)$. Mais il est important d'essayer de trouver

des résultats analytiquement quand cela est possible. Si le système est linéaire, on peut l'écrire $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$ et les propriétés de la matrice A (valeurs propres et vecteurs propres) permettent de trouver la structure du portrait de phase.

8. Dessinez le portrait de phase du système linéaire $\frac{dx}{dt} = ax$, $\frac{dy}{dt} = -y$ pour les différentes valeurs de a : $a < -1$, $a = -1$, $-1 < a < 0$, $a = 0$, $a > 0$.

9. Étudiez le système $\frac{dx}{dt} = x + y$, $\frac{dy}{dt} = 4x - 2y$. Calculez les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A . Dessinez le portrait de phases.

10. Étudiez le système $\frac{dx}{dt} = x - y$, $\frac{dy}{dt} = x + y$. Ici le système est oscillant. Calculez les valeurs propres (ici complexes) et vecteurs propres de la matrice A . Dessinez le portrait de phase.

11. * C On reprend l'oscillateur harmonique de la masse accrochée à un ressort en ajoutant un frottement proportionnel à la vitesse entre la masse et son support fixe. La deuxième loi de Newton dans la direction horizontale x est :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

avec $\lambda > 0$.

(i) Réécrire l'équation sous la forme d'un système à deux dimensions.

(ii) Déterminez la stabilité du point fixe à l'origine et dessinez le portrait de phase. Discutez les limites où λ est petit ou grand.

12. Pour les 3 systèmes suivants, trouvez les points fixes et leur stabilité via la matrice jacobienne. Complétez numériquement le portrait de phase.

$$\begin{array}{ll} \frac{dx}{dt} = x - y & \frac{dy}{dt} = x^2 - 4 \\ \frac{dx}{dt} = 1 + y - e^{-x} & \frac{dy}{dt} = x^3 - y \\ \frac{dx}{dt} = \sin y & \frac{dy}{dt} = x - x^3 \end{array}$$

13. * C La 2^e loi de Newton gouvernant l'oscillation d'une bille dans un double puits de potentiel se traduit par :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x - x^3$$

(i) Réécrire cette équation sous la forme d'un système de dimension 2. Trouvez les points fixes et étudiez leur stabilité via la matrice jacobienne.

(ii) Trouvez une quantité conservée (une énergie). Identifiez l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. La tracer en fonction de x .

(iii) Dessinez le portrait de phase.

14. * La compétition entre lapins et moutons pour le même espace d'herbe est représentée par les équations de Lotka-Volterra. On considère que chaque espèce toute seule évoluerait vers sa limite stable (celle de l'équation logistique). On suppose que les lapins se reproduisent plus vite que les moutons. En revanche, les moutons diminuent plus le taux de reproduction des lapins que l'inverse. Les équations gérant ces conflits sont ici :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(3 - x - 2y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(2 - y - x)\end{aligned}$$

avec $x \geq 0$ les lapins et $y \geq 0$ les moutons.

(i) Déterminez les quatre points fixes et leur stabilité via les matrices jacobiniennes. Le point le plus intéressant est $(1, 1)$ qui est un nœud col.

(ii) Complétez le portrait de phase numériquement. Le modèle montre selon la condition initiale qu'une espèce conduit toujours l'autre à disparaître. Les biologistes appellent cela le principe d'exclusion compétitive. Précisez quelle espèce disparaît selon la position de la condition initiale (x_0, y_0) sur le portrait de phase.

15. * C Un modèle d'épidémie modélise le nombre de personnes en bonne santé $x(t)$, le nombre de gens contaminés $y(t)$ et le nombre de personnes guéries $z(t)$ et les décédées $w(t)$. Les modèles SIR (*Safe-Infected-Recovered*) inspirés de Kermack et McKendrick, 1927, sont de la forme :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -kxy \\ \frac{dy}{dt} &= kxy - \beta y - \sigma y \\ \frac{dz}{dt} &= \beta y \\ \frac{dw}{dt} &= \sigma y\end{aligned}$$

où x représente la population saine, y la population infectée, z les guéris et w les décès. Les paramètres k, β, σ sont positifs. Le système se réduit à un système d'ordre 2 puisque les équations pour x et y ne font pas intervenir z et w . Notez que le système conserve la somme qui est la population totale $x + y + z + w$. Les termes importants sont les produits xy qui représentent la contagion entre la population x et y . Les malades y peuvent, soit guérir avec le taux β , soit mourir avec le taux σ .

Supposons que $x = x_0$ à $t = 0$. L'équation pour y se réécrit :

$$\frac{dy}{dt} = (kx_0 - \beta - \sigma)y = (\beta + \sigma)(R_0 - 1)y$$

avec

$$R_0 = \frac{kx_0}{\beta + \sigma}$$

L'épidémie se déclenche si le nombre de reproduction $R_0 > 1$. Pour le Covid-19, $R_0 \approx 3$ indiquant qu'une personne en contamine trois autres en moyenne. Au début de l'épidémie, le nombre de patients infectés double tous les 3 jours, cela veut dire que y varie exponentiellement sur l'échelle de temps $\tau = 3/\ln 2 = 4,3$ j. Ainsi $\beta + \sigma = 1/(2\tau) = 0,116$. Prenons un village de 100 habitants de sorte que $x_0 = 100$. Alors $k = R_0(\beta + \sigma)/x_0 = 3,48 \times 10^{-3}$. Ne reste plus qu'à choisir entre le taux de guéris et le taux de mortalité. On prend arbitrairement $\beta = 0,1$ alors $\sigma = 0,016$.

(i) Intégrez numériquement le système avec $y_0 = 1$ à $t = 0$ avec ces paramètres et visualisez $x(t)$, $y(t)$.

(ii) Il est possible de calculer analytiquement le portrait de phase : écrire l'équation différentielle pour dy/dx et intégrez-la. Comparez les portraits de phase analytique et numérique.

(iii) En fonction des conditions initiales (x_0, y_0) , déterminez le nombre max de malades au pic de l'épidémie, puis le nombre de guéris et le nombre de décès en fin d'épidémie.

Systèmes à trois dimensions et transformations discrètes

L'intégration numérique du système de Lorenz est faite par le code matlab **sysdyn3.m**

16. Étudiez numériquement les solutions du système de Lorenz pour différentes valeurs de r et en gardant fixe $\sigma = 10$, $b = 8/3$.

17. Lorenz s'est intéressé au maximum local de la variable z sur une série temporelle $z(t)$ et il a tracé z_{n+1} en fonction de z_n . Assez remarquablement, les points se placent sur une courbe en forme de tente, la tente de Lorenz. Cela suggère que des propriétés du système de Lorenz pourraient être capturées par une application discrète. La transformation suivante en est une illustration :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n, & 0 \leq x_n \leq 1/2 \\ x_{n+1} &= 2 - 2x_n, & 1/2 \leq x_n \leq 1 \end{aligned}$$

On remarque que cette transformation possède les propriétés d'étirement et de repliement.

(i) Tracez $f(x)$, trouvez les points fixes et leur stabilité.

(ii) Expérimentez numériquement cette transformation.

18. Faire une carte du diagramme de bifurcations de l'application logistique discrète 12-25 c'est-à-dire représentez x en fonction de r pour $1 \leq r \leq r_\infty$. Vérifiez le tableau 12.1 puis montrez que les bifurcations successives par doublement de période obéissent à :

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4,669201...$$

Ce nombre δ est le nombre de Feigenbaum. Il est universel dans le sens où on le retrouve dans toutes les cascades sous-harmoniques (les doublements de période) pour n'importe quelle application. On retrouve aussi approximativement ce nombre dans les transitions de la convection thermique dans les expériences de laboratoire de convection thermique de Libchaber *et al.*, 1982. Du mercure liquide entre deux plaques est chauffé par-dessous et l'équivalent de r est le nombre de Rayleigh qui varie comme ΔT (la différence de température des plaques), des expériences très délicates à conduire.

19. * L'attracteur étrange de Hénon provient d'une application discrète à deux variables X et Y dans le plan :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= Y_n + 1 - \alpha X_n^2 \\ Y_{n+1} &= \beta X_n \end{aligned}$$

où α et β sont des paramètres. La non-linéarité est contrôlée par α et la dissipation par β . Les valeurs utilisées par Hénon sont $\alpha = 1,4$ et $\beta = 0,3$.

(i) Montrez que la transformation est inversible.

(ii) Dans le cas du plan, le déterminant de la matrice jacobienne contrôle l'évolution des aires. Il joue le rôle de la divergence en trois dimensions.

$$|J| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial X_{n+1}}{\partial X_n} & \frac{\partial X_{n+1}}{\partial Y_n} \\ \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial X_n} & \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial Y_n} \end{pmatrix}$$

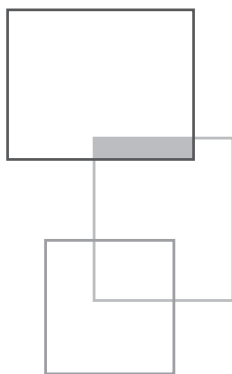
Calculez $|J|$ et montrez qu'il y a contraction des aires si $-1 < \beta < 1$.

(iii) En variant les conditions initiales, calculez numériquement les itérés et montrez que les points successifs forment un attracteur très complexe. Les points apparaissent de façon irrégulière (apériodique).

(iv) Intégrez pendant longtemps pour avoir beaucoup de points. Faites des agrandissements (zoom) successifs d'une petite région pour montrer que l'on retrouve une structure identique lors de ses différents agrandissements. On parle d'autosimilarité, la marque d'une structure *fractale*.

(v) Pour voir étirement et repliement, prendre l'ensemble des conditions initiales sur un cercle de taille comparable à celle de l'attracteur. Construire le premier et le deuxième itéré du cercle.

(vi) Pour voir la SCI, on peut faire la même expérience qu'en (v) mais avec un cercle petit devant la taille de l'attracteur. Au bout de combien d'itérations trouve-t-on des points un peu partout sur l'attracteur ?



Références Tome 2

Chapitre 8

Colin de Verdière, A., 2020, *Une introduction à la dynamique des océans et du climat*, tome 1 Océans, EDP Sciences.

Holton, J. R., 1992, *An introduction to dynamic meteorology*, 3rd edition, Academic Press, 511 p.

Sommeria, J., 2017, Foucault and the Rotation of the Earth, *Compte Rendus Physique*, **18**, 9-10, 520-525.

Chapitre 9

On ne saurait trop recommander de regarder quelques-uns des vingt-six films du National Committee for Fluid Mechanics Films, créé sous la supervision de A. Shapiro du MIT qui sont disponibles ici :

<http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>

Les expériences sont accompagnées d'un commentaire physique précieux qui permet de sortir la mécanique des fluides de son carcan théorique qui peut s'avérer étouffant pour les débutants. Le livre d'accompagnement des films est très bien fait : *Illustrated Experiments in Fluid Mechanics*, 1974, MIT Press.

Batchelor, G., 1967, *Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press.

Une introduction certes, mais un livre rigoureux déjà avancé (niveau Master) qui donne l'origine des équations de Navier-Stokes et les exemples majeurs du sujet. Écrit par un des piliers de la discipline, fondateur du Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, DAMTP, de Cambridge.

Guyon, E., J. P. Hulin, L. Petit, 2012, *Hydrodynamique Physique*, CNRS Éditions, EDP Sciences.

Un ouvrage très complet sur la dynamique des fluides à un niveau Master.

Feynman, R., R. Leighton, M. Sands, 1988, *The Feynman Lecture on Physics*, vol. 2, Addison-Wesley Publishing Company.

Traduit en français chez InterÉditions et plus récemment chez Dunod.

Contient deux chapitres lumineux sur la mécanique des fluides.

Lighthill, M. J., 1986, *An informal introduction to Theoretical Fluid Mechanics*, Clarendon Press, 260 pages.

Un ouvrage simple pour aborder les équations de la mécanique des fluides. L'importance de la notion de vorticité est particulièrement bien expliquée par un géant du domaine.

Mullin, T., 2011, Experimental studies of transition to turbulence in a pipe, *Annu. Rev. of Fluid Mech.*, **43**, 1-24.

Prandtl, L., 2010, *Essentials of Fluid Mechanics*, H. Oertel editor, Applied Mathematical Sciences, third edition, Springer, New-York, 795 p.

Écrit par un fondateur de la discipline en 1952, cette nouvelle édition est à recommander. Prandtl a entre autres explicité le rôle fondamental du frottement dans les couches limites sur les ailes d'avion pour expliquer l'origine de la portance.

Tritton, D. J., 1988, *Physical Fluid Dynamics*, Oxford University Press.

La physique des fluides est présentée sous l'angle de la phénoménologie d'expériences. Ouvrage très complet.

Von Karman, T., 2004, *Aerodynamics*, Dover Publ. Inc., 203 p.

Une discussion historique et physique engageante de l'aérodynamique du vol.

Young, H.D., R.A. Freedman, A.L. Ford, 2012, *University Physics with Modern Physics*, 13th edition, Pearson-Addison-Wesley.

Chapitre 10

Il existe beaucoup de livres de Thermodynamique. Les suivants semblent particulièrement instructifs.

Atkins, P., J. de Paula, 2014, *Physical Chemistry*, 10th edition, Oxford University Press.

Les six premiers chapitres du « Atkins » donnent une exposition complète de la thermodynamique, des fondations aux concepts avancés. Applications en Physique et Chimie. Réalisé avec un souci pédagogique majeur. Niveau Licence 2^e et 3^e année.

Feistel, R., 2008, A Gibbs function for seawater thermodynamics for -6 to 80 °C and salinity up to 120 g kg⁻¹, *Deep Sea Res.*, I, **55**, 1639-1671.

- Fermi, E., 1956, *Thermodynamics*, Dover Publications Inc.
Un livre court, résumé de lectures à l'université Columbia en 1936 par un des plus grands physiciens. Lumineux.
- Gonczy, G. 2018, *Comprendre la Thermodynamique*, 2^e édition, Ellipses.
L'objectif est dans le titre : un livre pour vraiment comprendre. Les démonstrations sont complètes. Nombreux exercices. Niveau Licence 2^e et 3^e année.
- Halliday, D., R. Resnick, J. Walker, 2001, *Fundamentals of Physics*, 6th edition, John Wiley & Sons, Inc.
Ces auteurs consacrent trois chapitres très pédagogiques à la thermodynamique. Niveau 1^{re} année de Licence.
- Hulin M., N. Hulin, M. Veyssié, 1996, *Thermodynamique Licence: cours et problèmes résolus*, Dunod, 384 p.
- Jancovici, B., 1996, *Thermodynamique et Physique statistique*, Nathan Université.
Un livre court qui présente l'essentiel de la thermodynamique du point de vue de la mécanique statistique avec des explications très claires.
- Mazur, E., 2015, *Principles & Practice of Physics*, Pearson.
Cet auteur consacre trois chapitres très pédagogiques à la thermodynamique. Le chapitre sur la dégradation de l'énergie est nouveau. Niveau Licence.
- Mosseri, R., C. Jeandel, 2013, *L'énergie à découvert*, CNRS Éditions.
Une remarquable compilation de 184 auteurs qui passent en revue les différentes sources d'énergie, leurs spécificités d'exploitation, leurs ressources et leurs impacts sur l'environnement.
- Planck, M., 1897, *Treatise on Thermodynamics*, Dover Publications Inc., New York.
Les trois premières parties donnent les bases de la thermodynamique par l'un de ses fondateurs.
- Planck, M., 1913, *The theory of heat radiation*, Dover Publications Inc., New York.
Introduit la deuxième loi de la thermodynamique pour calculer l'entropie du rayonnement électromagnétique. Ouvrage avancé nécessitant d'avoir suivi une introduction à l'électromagnétisme.
- Prigogine, I., D. Kondepudi, 1999, *Thermodynamique, des moteurs thermiques aux structures dissipatives*, Éditions O. Jacob.
Écrit par un des fondateurs de la thermodynamique moderne, les cinq premiers chapitres de ce livre sont une très bonne introduction au sujet. Le reste est de niveau Master.
- Reif, F., 1972, *Physique statistique*, Berkeley Cours de Physique, vol. 5. Librairie A. Colin.
Le Reif est un excellent livre d'introduction à la mécanique statistique avec toujours l'exigence pédagogique présente.
- Stephens, G. L., D. M. O'Brien, 1993, Entropy and Climate : ERBE observations of the entropy production of the Earth, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **119**, 121-152.

Stephens G. L., T. L'Ecuyer, 2015, The Earth's energy balance, *Atmospheric Research*, **166**, 195-203.

Van Ness, H. C. 1969, *Understanding Thermodynamics*, Dover Publications, Inc.
Un livre court qui rassemble une série de lectures de l'auteur auprès d'étudiants de 1^{re} année de parcours divers du Rensselaer Polytechnic Institute. Les concepts importants sont bien illustrés sans formalités.

Vega, L. A., 1999, Ocean Thermal Energy Conversion (OTEC).
Un document non publié disponible sur Internet qui est une mise à jour d'un article de 1995 du même auteur paru dans *Encyclopedia of Energy Technology and the Environment*, John Wiley & Sons, Inc.

Young, H. D., R. A. Freedman, A. L. Ford, 2012, *University Physics with Modern Physics*, 13th edition, Pearson-Addison-Wesley.
Comme le Halliday, ce livre fait partie de cette nouvelle génération de livres d'introduction à la Physique.

Zemansky, M., R. H. Dittman, 1981, *Heat and Thermodynamics*, 6th edition, McGraw-Hill International Editions, Physics series.
Un livre classique très complet pour approfondir le sujet. Présente la théorie et les expériences, niveau Master.

Les applications sur le climat terrestre sont développées dans :

Colin de Verdière, A., 2020, Une introduction à la dynamique des océans et du climat, tome 2 Climat, EDP Sciences.

Données physiques et chimiques

Handbook of Chemistry and Physics, D. R. Lide, editor in chief, Ann Arbor, CRC Press.
La bible pour les propriétés physiques et chimiques des matériaux. On en est à la 85^e édition, la première datant de 1913. Elle est disponible librement sur Internet.

<http://webbook.nist.gov>

C'est le site du NIST ou National Institute of Standards and Technology qui dépend du US Department of Commerce. Il fournit les données thermophysiques et thermochimiques rassemblées par le NIST dans le cadre du *Standard Reference Data Program*.

<https://diren.mines-paristech.fr/Sites/Thopt/fr/co/nouvelle-edition-du.html>

C'est le site de la direction des enseignements de l'École des Mines Paris Tech qui contient un cours de thermodynamique orienté vers l'ingénierie des centrales thermiques.

Chapitre 11

- Adamson W. and A. P. Gast, 1997, *Physical chemistry of surfaces*, 6th Ed, Wiley.
- de Gennes, P. G., F. Brochard-Wyart, D. Quéré, 2003, *Gouttes, bulles, perles et ondes*, Belin.
- de Gennes, P. G., J. Badoz, 1994, *Les Objets fragiles*, Plon.
- Katopodos, N., 2018, *Free-surface flow, Computational methods*. Elsevier.
- Law K. Y. and H. Zhao, 2016, *Surface Wetting, Characterization, Contact Angle, and Fundamentals*, Springer Verlag.
- Mezger E., 1946, Loi de variation de la tension superficielle avec la température. *J. Phys. Radium*, 7(10), pp. 303-309.
- du Noüy, P. L., 1925, An interfacial tensiometer for universal use. *The Journal of General Physiology*, 7(5), pp. 625-631.
- Plateau, J., 1873, *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, vol. 2, Gauthier-Villars, Paris.
- Wohlfarth C., Landolt-Bornstein, 1997, Numerical Data and Functional Relationships in *Science and Technology: Group IV: Physical Chemistry: Surface Tension*, **16**, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH.

Vidéos références sur les gouttes dans l'espace

<https://www.youtube.com/watch?v=whukr452ZvY>

<https://www.youtube.com/watch?v=s63JXdsL5LU>

<https://www.youtube.com/watch?v=3bCoGC532p8>

<https://www.youtube.com/watch?v=1v5gtOkyCG0>

<https://www.youtube.com/watch?v=o8TssbmY-GM>

https://www.youtube.com/watch?time_continue=194&v=o8TssbmY-GM&feature=emb_logo

Chapitre 12

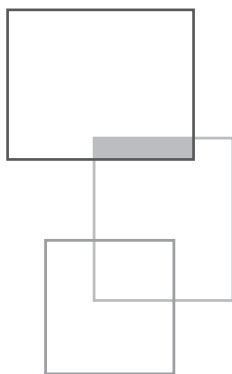
Bergé, P., Y. Pomeau, C. Vidal, 1984, *L'ordre dans le chaos*, Hermann, Éditeur des Sciences et des Arts.

Un des premiers livres en français qui introduit les grandes idées du sujet. Il fait le lien entre les résultats expérimentaux sur les étapes de transition vers la turbulence et la théorie du chaos.

Gleick, J., 1987, *Chaos, Making a new Science*, Viking, New York.

Une passionnante histoire de la découverte du Chaos au travers de la visite de plusieurs disciplines.

- Hénon, M., 1976, A two dimensional mapping with a strange attractor, *Commun. math. Physics*, **50**, 69-77.
- Kermack, W. O. and A. G. McKendrick, 1927, A contribution to the mathematical theory of epidemics, *Proc. Royal Soc.*, **115**, 772, 700-721.
- Libchaber, A., C. Laroche, S. Fauve, 1982, Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement, *J. Physique Lett.*, **43**, L-211 – L-216.
- Lighthill, J., 1986, The recently recognized failure of predictability in Newtonian dynamics, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A407**, 35-50.
- Lorenz, E., 1963, Deterministic non periodic flow, *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130.
L'article fondateur en Météorologie.
- Lorenz, E., 1993, *The Essence of Chaos*, UCL Press.
L'Essence du Chaos tout simplement par l'acteur numéro un de la pièce.
- Manneville, P., 2004, *Instabilités, Chaos et Turbulence*, Les Éditions de l'École polytechnique.
Un livre avancé qui fait le lien entre le mouvement des fluides et les résultats théoriques sur les instabilités et le chaos.
- Ruelle, D., 1993, *Chance and Chaos*, Penguin.
Un livre de vulgarisation écrit par l'un des acteurs principaux de la théorie du Chaos qui vient de la physique mathématique.
- Stewart, I., 2014, *Dieu joue-t-il aux dés ? Les nouvelles Mathématiques du Chaos*, Champs Sciences, Flammarion.
Écrit par un mathématicien appliqué bien connu, le livre présente l'histoire et la théorie du chaos de façon passionnante.
- Strogatz, S. H., 1994, *Nonlinear Dynamics and Chaos, with applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Westview Press, Perseus Books Group.
En évitant le formalisme mathématique, le Strogatz est une introduction aux systèmes dynamiques, bien adaptée à un public de physiciens. Il contient une mine d'or d'exemples et d'exercices. Le chapitre 12 en a largement bénéficié.



Constantes physiques fondamentales et valeurs utiles

Constante de la gravitation universelle $G = 6,673 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$

Constante de Boltzmann $k_B = 1,3807 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$

Constante des gaz parfaits $R = 8,31436 \text{ J mole}^{-1} \text{ K}^{-1}$

Nombre d'Avogadro $N_A = 6,022 \times 10^{23}$

Constante de Stefan-Boltzmann $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

Constante de Planck $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}$

Charge de l'électron $e = 1,6022 \times 10^{-19} \text{ C}$

Masse de l'électron (repos) $m_E = 9,1094 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Masse du proton (repos) $m_p = 1,67262 \times 10^{-27}$

Masse du neutron $m_N = 1,67493 \times 10^{-27}$

Vitesse de la lumière (dans le vide) $c = 2,9979 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$

Soleil

Masse du Soleil = $1,99 \times 10^{30}$ kg

Rayon du Soleil = $6,96 \times 10^8$ m

Luminosité $L_0 = 3,9 \times 10^{26}$ W

Unité astronomique 1 UA = $1,496 \times 10^{11}$ m (distance moyenne Terre–Soleil)

Terre Globale

Masse de la Terre = $5,977 \times 10^{24}$ kg

Rayon moyen de la Terre $R_T = 6\,378$ km

Surface terrestre = $5,10 \times 10^{14}$ m²

Gravité moyenne à la surface de la mer $g_0 = 9,806$ m s⁻²

Vitesse angulaire de la Terre $\Omega = 7,292 \times 10^{-5}$ rad s⁻¹

Constante solaire $S_0 = 1\,367$ W m⁻²

Atmosphère

Masse molaire de l'air sec $M_D = 28,966$ g

Masse molaire de l'eau $M_W = 18,016$ g

Constante de l'air sec $R_D = 287,04$ J kg⁻¹ K⁻¹

Constante de la vapeur d'eau $R_V = 461,50$ J kg⁻¹ K⁻¹

Rapport des masses molaires $\varepsilon = M_W/M_D = R_D/R_V = 0,62197$

Masse de l'atmosphère = $5,3 \times 10^{18}$ kg

Masse de vapeur d'eau = $1,3 \times 10^{16}$ kg

Chaleur spécifique de l'air sec à pression constante $C_p = 1\,004$ J K⁻¹ kg⁻¹

Chaleur spécifique de l'air sec à volume constant $C_V = 717$ J K⁻¹ kg⁻¹

Rapport $\gamma = C_p/C_V = 1,4$

Chaleur latente de vaporisation à 0 °C $L_V = 2,5 \times 10^6$ J kg⁻¹

Pression standard niveau de la mer $p_0 = 1\,013,25$ hPa

Température standard niveau de la mer $T_0 = 288,15$ K

Densité standard niveau de la mer $\rho_0 = 1,225$ kg m⁻³

Océan

Masse des océans = $1,4 \times 10^{21}$ kg

Surface des océans = $3,61 \times 10^{14}$ m²

Profondeur moyenne = 3 688 m

Chaleur spécifique de l'eau pure à 0 °C = 4 218 J K⁻¹ Kg⁻¹

Température de congélation de l'eau de mer ($S = 35$) = $-1,7\text{ }^{\circ}\text{C}$

Chaleur latente de sublimation (eau pure) $L_S = 2,85 \times 10^6\text{ J kg}^{-1}$

Glace

Masse de la glace sur Terre = $2,2 \times 10^{19}\text{ kg}$

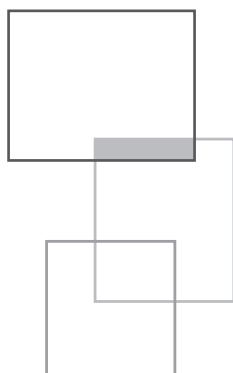
Surface des calottes de glace et glaciers = $1,62 \times 10^{13}\text{ m}^2$

Densité de la glace à $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ = 917 kg m^{-3}

Chaleur spécifique de la glace à $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ = $2\,106\text{ J K}^{-1}\text{kg}^{-1}$

Conductivité thermique $k_I = 2\text{ W m}^{-1}\text{ }^{\circ}\text{K}^{-1}$

Chaleur latente de fusion à $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ = $3,34 \times 10^5\text{ J kg}^{-1}$



Corrections des exercices du tome 2

Introduction

On reproduit ici la stratégie détaillée au tome 1 applicable pour trouver les solutions.

Ces corrections assez détaillées peuvent permettre à l'étudiant d'apprendre en toute autonomie, mais à une seule condition très importante : celle de ne regarder la correction d'un exercice qu'après l'avoir cherchée par soi-même pendant le temps nécessaire. Ce n'est qu'à cette seule condition d'entraînement que la forme physique (!) va s'améliorer car il en est de même pour les muscles et les neurones. Les remarques de Feynman ci-dessous, écrites il y a plus d'un demi-siècle, gardent toute leur actualité.

The problem of how to deduce new things from old, and how to solve problems, is really very difficult to teach, and I don't really know how to do it. I don't know how to tell you something that will transform you from a person who can't analyze new situations or solve problems, to a person who can. In the case of the mathematics, I can transform you from somebody who can't differentiate to somebody who can, by giving you all the rules. But in the case of the physics, I can't transform you from somebody who can't to somebody who can, so I don't know what to do.

Mais plus loin :

The only way you can understand physics physically, because of our lack of machinery for expressing this, is to follow the dull, Babylonian way of doing a whole lot of problems until you get the idea.

Ces deux extraits de R. Feynman, tirés de *Feynman's Tips on Physics*, expliquent qu'il ne sait pas enseigner à quelqu'un comment analyser une situation nouvelle ni comment résoudre un problème. Selon lui, il n'y a pas d'autres méthodes pour apprendre la Physique que de pratiquer un grand nombre de problèmes.

Les exercices proposés dans ce livre sont de deux types. Le premier rassemble des questions de réflexion et de concept qui permettent de se tester sur la compréhension du chapitre. Il suffit généralement de relire la partie concernée par la question pour y répondre. Avec une connaissance correcte du chapitre et ce premier type maîtrisé, on peut aborder le deuxième type qui rassemble des exercices de mise en œuvre quantitative. Les exercices notés avec un C sont corrigés dans cette section du livre. Le symbole * indique une catégorie d'exercices plus difficiles. Lorsqu'un nom apparaît, il indique la source que l'on trouve dans les références. La stratégie de résolution des exercices rappelée ci-dessous suit la pédagogie de E. Mazur, *Principles and Practice of Physics*. Il est important surtout au début de la suivre et de ne regarder les corrections qu'après avoir cherché. Il faut **sécher**, se poser tout un tas de questions pour arriver à comprendre le nouveau concept à utiliser et le mémoriser pour pouvoir s'en resservir. Il y a des exercices volontairement non résolus pour permettre de vérifier l'acquisition. Sans cet effort préalable, ces corrections ne serviraient hélas pas à grand-chose.

La méthode DPCE ou Démarrage, Plan, Calculs, Évaluation

Les problèmes de physique demandent une stratégie d'attaque que l'on peut résumer sous l'acronyme **DPCE** :

Démarrage

- Analyse de l'information pour déterminer ce qui est demandé.
- Trouver les concepts de physique à utiliser.

Faire un Plan

- Déterminer les relations - équations nécessaires.
- Lister les étapes qui devraient mener à la solution.

Calculs

Effectuez les calculs de façon littérale en donnant des noms à toutes les quantités qui apparaissent. Il faut se poser les questions suivantes :

- Ai-je affaire à des scalaires ou à des vecteurs ?
- Les dimensions du résultat sont-elles correctes ?
- Ai-je répondu à toutes les questions ?
- Reste-t-il des quantités inconnues dans les réponses ?
- Les unités sont-elles correctes ?
- Le nombre de chiffres significatifs est-il justifié ?

Évaluation du résultat

Évaluer finalement si votre réponse est raisonnable ou pas... Pour cela, il faut voir si le résultat quantitatif paraît crédible par rapport aux valeurs auxquelles on s'attend. C'est important de faire des dessins pour visualiser la solution. Ensuite on peut prendre différentes limites pour regarder comment évolue le résultat : que devient-il si la vitesse de l'objet A est très grande ou très petite ? Si la masse de l'objet B est très grande ou très petite, etc. C'est pour faire ces vérifications de bon sens que l'exécution des calculs en littéral prend tout son sens.

Au début souvent on se lance dans les calculs, l'étape **C**, en sautant les deux premières **D** et **P**, puis on ignore l'évaluation finale **E** et on passe complètement à côté du problème. Une application systématique de cette stratégie permettra d'acquérir le sens physique pour progresser de plus en plus rapidement dans l'analyse des situations de plus en plus complexes du tome 2.

Note : l'annexe donne les bases numériques et de programmation scientifique pour trouver numériquement les solutions de certains exercices.

Chapitre 8

$\Omega_{\text{TERRE}} = 7,292 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$ soit une période $T = 23,935 \text{ h}$.

La partie centrifuge de l'accélération de Coriolis en $\Omega^2 \mathbf{R}$ est prise en compte dans la gravité effective que l'on supposera constante dans ces exercices. Sinon voir exercice 6.

1.

Le vecteur **A** a un module de 2 et fait un angle de 60° avec l'axe des x. Dans le repère xy, les composantes du vecteur sont : $\mathbf{A} = (1, \sqrt{3})$.

En appliquant la transformation pour trouver les composantes de **A** dans le repère $x'y'$ tourné de 30° dans le sens positif, on a : $\mathbf{A} = (\sqrt{3}, 1)$.

On voit que dans le nouveau repère, $|\mathbf{A}| = 2$. On voit aussi que l'angle que fait **A** avec l'axe x' est de 30° , soit 60° avec l'axe des x. La rotation du repère laisse le vecteur **A** inchangé.

2.

La locomotive est soumise à la force de Coriolis et à son poids, soit dans le repère traditionnel (x, est, y, nord, z vers le haut) :

$$F_x = 0$$

$$F_y = -2\Omega m \sin \theta u$$

$$F_z = 2\Omega m \cos \theta u - mg$$

avec u la composante de la vitesse vers l'est de module $|u| = 55,5 \text{ m s}^{-1}$.

Si le train va vers l'est :

$$F_X = 0$$

$$F_Y = 114,3 \text{ N}$$

$$F_Z = 114,3 - 196\,200 = -196\,085 \text{ N}$$

Si le train va vers l'ouest :

$$F_X = 0$$

$$F_Y = -114,3 \text{ N}$$

$$F_Z = -114,3 - 196\,200 = -196\,314 \text{ N}$$

Le poids apparent que doit supporter le rail est donc plus fort (faible) selon que le train va vers l'ouest ou vers l'est.

3.

Une balle va vers l'est, l'autre vers l'ouest. Il n'y a pas de force dans cette direction et la balle conserve sa vitesse $u_X = U$. Comme les balles sont identiques, elles doivent s'éviter au milieu en $x = L/2$. La force de Coriolis agit dans la direction méridienne. Si chacune dévie d'un demi-diamètre ($d/2$), elles vont s'éviter. L'accélération dans la direction y permet de calculer vitesse et déplacement avec l'approximation que $f = 2\Omega\sin(\text{lat})$ est constant, ici $f = 1,03 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

$$a_Y = -fu_X$$

$$v_Y = -fu_X t$$

$$y = -fu_X \frac{t^2}{2}$$

Le temps pour la particule qui va vers l'est d'atteindre le milieu est $t = \frac{L}{2u_X}$. En reportant dans la valeur de y , on trouve la déviation :

$$y = -f \frac{L^2}{8u_X} = -\frac{d}{2}$$

La vitesse d'évitement s'en déduit :

$$u_X = \frac{fL^2}{4d} = 6,43 \text{ m s}^{-1}$$

Les deux balles montrent le début de la trajectoire d'un cercle d'inertie, voir exercice 7.

4.

Dans le repère traditionnel, l'accélération du caillou est :

$$a_X = f v_Y - \tilde{f} v_Z$$

$$a_Y = -f v_X$$

$$a_Z = -g$$

Où l'on a négligé la force de Coriolis devant g .

On suppose maintenant que :

$$f = 2\Omega \sin(\text{lat}) \approx \text{constante}$$

$$\tilde{f} = 2\Omega \cos(\text{lat}) \approx \text{constante}$$

Sur la verticale :

$$v_Z = -gt$$

$$z = -g \frac{t^2}{2}$$

Comme $v_Z \gg v_X$ et v_Y , l'accélération importante est sur l'axe est-ouest :

$$a_X \approx -\tilde{f}v_Z$$

$$v_X = \tilde{f}g \frac{t^2}{2}$$

$$x = \tilde{f}g \frac{t^3}{6}$$

Le temps pour descendre de h est $T = \left(\frac{2h}{g}\right)^{1/2}$, permettant d'écrire la déviation :

$$x = \frac{2^{3/2}}{3} \frac{\Omega \cos(\text{lat})}{g^{1/2}} h^{3/2}$$

Avec les valeurs données, on obtient un déplacement vers l'est $x = 2,75$ cm, à comparer avec 2,8 cm, la valeur moyenne des expériences de Reich.

5.

Le problème est analogue à celui de la chute du caillou dans le puits de mine. Dans le repère traditionnel, l'accélération du missile est :

$$a_X = f v_Y - \tilde{f} v_Z$$

$$(1) \quad a_Y = -f v_X$$

$$a_Z = -g + \tilde{f} v_X$$

avec :

$$f = 2\Omega \sin(\text{lat}) \approx \text{constante}$$

$$\tilde{f} = 2\Omega \cos(\text{lat}) \approx \text{constante}$$

En faisant l'hypothèse que la gravité (constante) domine dans l'équation en z , vitesse et déplacement vertical sont :

$$v_Z = v_0 - gt$$

$$z = v_0 t - g \frac{t^2}{2}$$

Le temps T pour atteindre l'altitude $h = 1$ km est $T = v_0/g$ et l'aller-retour dure donc $2T$. On trouve :

$$v_0 = (2gh)^{1/2} = 140 \text{ m s}^{-1}$$

$$T = \left(\frac{2h}{g} \right)^{1/2} = 14,3 \text{ s}$$

Il faut maintenant étudier le déplacement horizontal. Les équations en x et y sont couplées par les termes de Coriolis. Si on fait l'hypothèse que les vitesses verticales sont grandes devant les vitesses horizontales, on découple les deux équations :

$$a_X \approx -\tilde{f}v_Z$$

$$v_X = -\tilde{f}(v_0t - g \frac{t^2}{2})$$

$$x = -\tilde{f} \left(v_0 \frac{t^2}{2} - g \frac{t^3}{6} \right)$$

Connaissant v_X , on peut ensuite calculer le déplacement en y :

$$a_Y = -fv_X = \tilde{f}\tilde{f} \left(v_0t - g \frac{t^2}{2} \right)$$

$$v_Y = \tilde{f}\tilde{f} \left(v_0 \frac{t^2}{2} - g \frac{t^3}{6} \right)$$

$$y = \tilde{f}\tilde{f} \left(v_0 \frac{t^3}{6} - g \frac{t^4}{24} \right)$$

En insérant $t = 2T = 28,6$ s dans l'expression des déplacements, on trouve à Saint-Petersbourg :

$$\Delta x = 1,385 \text{ m}, \Delta y = 2,5 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

Le déplacement vers l'est domine sur le déplacement vers le nord. La vitesse v_Y au sol est simplement $fx = O(10^{-4}) \ll v_0 (= 140)$ justifiant l'approximation faite dans l'expression de a_X . L'approximation est invalide au pôle puisque $\tilde{f} = 0$.

6.

Pour tenir compte de la force centrifuge, il faut rajouter le terme en $\Omega^2 \mathbf{R}'$ avec $R' = r \cos(\text{lat})$ la distance à l'axe de rotation, r le rayon de la terre, \mathbf{R}' étant dirigé vers l'extérieur. Après projection sur les axes x, y, z du repère, l'accélération du missile est :

$$a_X = fv_Y - \tilde{f}v_Z$$

$$(2) \quad a_Y = -fv_X - \Omega^2 r \sin \theta \cos \theta$$

$$a_Z = -g + \tilde{f}v_X + \Omega^2 r \cos^2 \theta$$

Mais quand le missile est immobile sur sa plateforme de tir, l'accélération doit être nulle. Si \mathbf{N} est la réaction du sol, la résultante \mathbf{R} des forces est nulle si :

$$R_X = 0$$

$$R_Y = -m\Omega^2 r_0 \sin \theta \cos \theta + N_Y = 0$$

$$R_Z = -mg + m\Omega^2 r_0 \cos^2 \theta + N_Z = 0$$

avec r_0 la position au sol. Ce qui donne la réaction du sol \mathbf{N} perpendiculaire à la surface terrestre qui s'est déformée sous l'effet de la rotation. Du coup la gravité effective orientée par le fil à plomb est donnée par :

$$g_{EX} = 0$$

$$g_{EY} = -\Omega^2 r \sin \theta \cos \theta$$

$$g_{EZ} = -g + \Omega^2 r \cos^2 \theta$$

et le missile part verticalement quand la vitesse $\mathbf{v}(t=0)$ est opposée au vecteur unitaire $\mathbf{n} = \mathbf{g}_E(r_0)/|\mathbf{g}_E(r_0)|$. La vitesse initiale du missile est donc $\mathbf{v}(t=0) = -v_0(0, n_Y, n_Z)$.

L'annexe donne l'intégration numérique des équations (2) de la trajectoire du missile. On trouve :

$\Delta x = 1,39$ m, $\Delta y = 6 \times 10^{-4}$ m. Quand on compare aux résultats de l'exercice 5, l'effet de la variation de la force centrifuge est donc négligeable sur un aller-retour d'un kilomètre.

7.

Quand on néglige les vitesses verticales, la force de Coriolis horizontale est sur la droite de la vitesse horizontale \mathbf{V} dans l'hémisphère nord et a pour module fV . Cette force produit une accélération centripète telle que :

$$f_v = \frac{v^2}{r}$$

$$r = v/f$$

La particule décrit donc un cercle d'inertie de rayon v/f . Pour une vitesse v de 1 m s^{-1} à 45°N ($f = 1,03 \cdot 10^{-4}$), le cercle a un rayon de 9,7 km.

Il est instructif de retrouver la solution en coordonnées cartésiennes. On doit résoudre les deux équations différentielles couplées :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - f \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} = 0$$

On peut éliminer x au profit de y ou inversement, mais le plus simple est de transformer ces deux équations en passant en complexe via $z = x + iy$. L'équation différentielle satisfaite par le déplacement complexe z est :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + if \frac{dz}{dt} = 0 \text{ ou } \frac{du}{dt} + ifu = 0 \text{ avec } u = \frac{dz}{dt}$$

La recherche de solutions en $\exp(rt)$, donne $r = -if$. Les vitesses complexes sont de la forme :

$$u = u_0 e^{-ift}$$

et les déplacements :

$$z = i \frac{u_0}{f} e^{-ift}$$

Supposons que la particule parte d'une origine avec la vitesse U vers l'est ($u_0 = U$). En prenant les parties réelles et imaginaires de l'expression ci-dessus, on trouve :

$$x = \frac{U}{f} \sin ft$$

$$y = \frac{U}{f} \cos ft$$

une oscillation harmonique de période $2\pi/f = 12h/\sin(\text{lat})$ appelée période d'inertie, une échelle de temps fondamentale en dynamique océan - atmosphère. À 45°N , une révolution s'effectuera en 17 h. Les déplacements x et y confirment que la particule décrit un cercle de rayon U/f .

8.

La rivière subit une accélération de Coriolis sur la droite dans l'hémisphère nord d'amplitude f_v , soit $2,5 \times 10^{-4} \text{ ms}^{-2}$ à 45°N . Dans un méandre, la rivière doit négocier un tournant et ce sont les forces de pression qui permettent de créer l'accélération centripète nécessaire. Pour tourner à droite, le niveau de l'eau est plus élevé à gauche et inversement. Pour savoir si la force de Coriolis joue un rôle, on peut comparer accélération centripète et accélération de Coriolis via le rapport :

$$\frac{v^2/r}{f_v} = \frac{v}{rf}$$

Ce rapport est le nombre de Rossby qui mesure l'importance de la rotation. Celle-ci ne peut plus être négligée lorsqu'il est plus petit que un. Pour un méandre de rayon v/f , soit ici 24 km, il vaut un. Comme les méandres ont des rayons beaucoup plus petits, on peut conclure que la rotation terrestre ne joue pas de rôle important. Pour des fleuves très lents, disons 1 km h^{-1} , le rayon critique n'est plus que de 2,7 km, ce qui laisse penser que la force de Coriolis pourrait jouer un rôle. Si le fleuve tourne à droite, la force de Coriolis aide à tourner dans l'hémisphère nord et inversement si le fleuve tourne à gauche. Dans le cas favorable, la différence des niveaux en surface entre l'extérieur et l'intérieur du virage sera plus faible que dans le cas défavorable. Près du fond les vitesses sont réduites par frottement sur le fond, mais pas la différence de pression qui induit alors des transports sédimentaires vers l'intérieur du virage. Les formes sédimentaires des dépôts dans les méandres de fleuves lents de grand rayon montrent-elles une asymétrie que l'on pourrait relier à la rotation de la Terre ?

9.

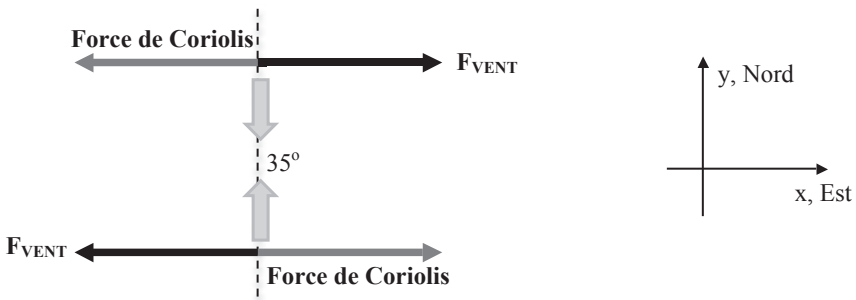
On prend le repère classique x vers l'est, y vers le nord et z vertical vers le haut. Considérons un petit cube d'eau à la surface de l'océan. Son volume est $V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Sur sa surface supérieure agit la force du vent \mathbf{F} qui est donc dirigée vers l'est ou vers l'ouest. À l'équilibre, la force de Coriolis est telle que :

$$+\rho V 2\Omega \sin\theta u_y + F_x = 0$$

ou

$$u_y = -\frac{F_x}{\rho V 2\Omega \sin\theta}$$

Le courant est 90° à la droite du vent. La situation est donc la suivante :



Les flèches épaisses sont les vecteurs courants prédits par l'équilibre vent - force de Coriolis. Ces courants convergent vers 35° expliquant les accumulations de particules de plastique à ces latitudes. Ceci s'appelle la convergence d'Ekman, en référence à W. Ekman qui le premier a étudié l'équilibre ci-dessus.

Chapitre 9

1.

Poids de l'air dans la salle = $\rho L W D g = 363 \text{ N}$

Force exercée par la pression atmosphérique sur le plancher : $F_{\text{ATM}} = p_{\text{ATM}} W L = 1,5 \times 10^6 \text{ N}$ de sorte que $F_{\text{ATM}} \gg \text{Poids}$. La pression atmosphérique au sol équilibre le poids de toute la colonne d'air (100 km) au-dessus, c'est bien plus que le poids de l'air dans la salle.

Le plancher résiste car la même force de pression atmosphérique s'exerce par-dessous. Les corps sont en équipression.

2.

La pression atmosphérique règne dans le sous-marin, $p_{\text{INT}} = p_{\text{ATM}}$. À l'extérieur, la pression de l'eau est :

$$p_{\text{EXT}} = p_{\text{ATM}} + \rho gh.$$

La force pour ouvrir le capot est donc juste $(p_{\text{INT}} - p_{\text{EXT}})LW = \rho ghLW = 490\,500\text{ N}$, une force gigantesque !

3.

On applique le principe de Pascal : un changement de pression appliqué sur un fluide incompressible enclos dans un container est transmis également dans tout le fluide et sur les parois du container. La conservation de la pression du liquide de frein dans tout le circuit donne :

$$\frac{f}{\pi d^2/4} = \frac{F}{\pi D^2/4}$$

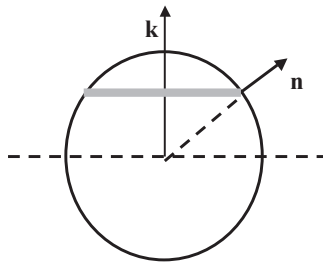
et

$$F = f \frac{D^2}{d^2} = 100 \times 25 = 2500\text{ N}$$

Toutes les machines hydrauliques fonctionnent sur ce principe de transmission de la pression par un fluide incompressible.

4.

L'exercice demande de calculer la force due à une pression uniforme sur une demi-sphère.



On calcule la force exercée par la pression intérieure sur la demi-coque métallique. Par symétrie, la seule composante non nulle est dans la direction du vecteur unitaire \mathbf{k} . Par ailleurs, toutes les forces élémentaires $p \mathbf{n} dA$ s'exerçant sur la couronne sphérique (en gris) ont même module et font le même angle avec \mathbf{k} . Si θ est l'angle entre \mathbf{k} et la normale \mathbf{n} , l'aire de cette couronne est $2\pi R \sin\theta \times R d\theta$. Comme $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = \cos\theta$ la résultante de la force de pression sur la demi-sphère dans la direction \mathbf{k} s'écrit successivement :

$$F = \iint p \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} dA = \int_0^{\pi/2} 2\pi R^2 p \sin\theta \cos\theta d\theta = \pi R^2 p \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta = \pi R^2 p$$

La force correspondant à la différence de pression Δp entre intérieur et extérieur est donc : $F = \pi R^2 \Delta p$ soit ici 25 446 N (le poids d'une masse de plus de 2,5 tonnes). L'idée que « du rien » puisse générer des forces si importantes marqua les esprits.

6.

L'équilibre entre le poids du corps et la résultante des forces de pression (la force d'Archimède) est :

$$\rho_{\text{CORPS}} g V = \rho_{\text{MER}} g \frac{2V}{3}$$

$$\rho_{\text{MER}} = \frac{3}{2} \rho_{\text{CORPS}}$$

Un corps humain a une masse volumique très proche de celle de l'eau douce (puisque l'on flotte dans une piscine). On en déduit que la densité de la mer Morte est proche de 1,5.

7.

À l'équilibre, la force de flottabilité (Archimède) et le poids s'équilibrent :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \rho g \right) = 4 \pi r^2 t \rho_C g$$

Comme densité $= \rho_C / \rho = 8$, on trouve $t = r/48$.



Lorsque l'on perturbe l'équilibre à droite, on voit que le couple de forces (Archimède, poids) amplifie la déformation rendant l'équilibre instable. Pour assurer la stabilité, il faut que le centre de masse soit plus bas que le centre de carène (le point d'application de la résultante des forces de pression sur la coque). Il faut ajouter du lest le plus bas possible.

9.

Le fluide contenu dans les parties verticales des tubes est accéléré par les parois des tubes. Mais les parois n'exercent que des forces tangentielles sur le fluide situé dans la partie horizontale en bas. Or à l'équilibre tous les points du fluide vont à la même vitesse et les forces visqueuses sont donc nulles. Ne restent que les forces de pression pour accélérer le fluide de la partie horizontale. On écrit la deuxième

loi de Newton pour ce bloc de fluide de longueur L délimité par les pointillés sur la figure :

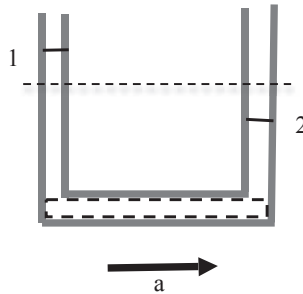
$$p_1 A - p_2 A = Ma$$

avec p_1 et p_2 la pression à gauche et à droite respectivement. Comme $M = \rho AL$, on obtient :

$$p_1 - p_2 = \rho La$$

Mais dans les tubes verticaux la pression est hydrostatique, de sorte que la différence des niveaux $z_1 - z_2$ dans les tubes est :

$$z_1 - z_2 = L \frac{a}{g}$$



C'est le fait que le niveau soit plus haut en 1 qu'en 2 qui permet aux forces de pressions d'accélérer le bloc horizontal de fluide vers la droite. De la mesure de $z_1 - z_2$ on peut obtenir « a ». On aura intérêt à choisir un tube avec L assez grand pour avoir une différence de niveau plus significative.

10.

Avec l'axe z vertical et origine à la surface du lac, la pression exercée par l'eau à un niveau z est $-\rho g z$ sur une surface élémentaire $W dz$ et la force résultante s'écrit comme l'intégrale :

$$F = - \int_{-D}^0 \rho g z W dz = \rho g W \frac{D^2}{2}$$

La pression atmosphérique n'intervient pas car le barrage est en équipression vis-à-vis de cette pression uniforme.

Le moment résultant par rapport au fond est :

$$\tau = - \int_{-D}^0 \rho g z (D - z) W dz = \rho g W \left(\frac{D^3}{2} - \frac{D^3}{3} \right) = \rho g W \frac{D^3}{6}$$

Pour trouver le bras de levier de la force moyenne, on applique la force résultante à un niveau H , tel que $FH = \tau$, soit $H = D/3$, le tiers de la profondeur à partir du fond.

11.

On écrit la relation hydrostatique entre le sol et l' ∞ . En pratique à 100 km la pression est nulle. On prend g constant pour simplifier :

$$p_S - 0 = \int_0^{\infty} \rho g dz = gm$$

avec m la masse par unité de surface. Pour avoir la masse totale, on multiplie par la surface de la sphère A :

$$Mg = p_S A$$

ou

$$M = \frac{p_S A}{g} = 5,26 \times 10^{18} \text{ kg}$$

C'est environ un millionième de la masse de la Terre ($= 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$).

12.

L'expression de la force de traînée d'une goutte de pluie dans l'air est $F = 1/2 \rho_{\text{AIR}} C_D S v^2$ avec S la surface frontale de la goutte, $S = \pi r^2$. Le poids de la goutte est $P = \rho_{\text{EAU}} V g$ avec $V = 4/3 \pi r^3$. En équilibrant ces deux forces, on trouve :

$$\frac{1}{2} \rho_{\text{AIR}} C_D \pi r^2 v^2 = \frac{4}{3} \rho_{\text{EAU}} g \pi r^3$$

$$v = \left(\frac{8}{3} \frac{\rho_{\text{EAU}}}{\rho_{\text{AIR}}} \frac{g}{C_D} \right)^{1/2} r^{1/2}$$

On trouve donc que v varie comme \sqrt{r} . Dans le coefficient qui est devant, la partie incertaine est le coefficient C_D sans dimension qui dépend de la forme de la goutte et du nombre de Reynolds. Pour une sphère $C_D = 0,5$. Or les gouttes sont déformées par le flux d'air et perdent leur forme sphérique dans la chute. Pour la sphère on trouve :

$$k = \left(\frac{8}{3} \frac{\rho_{\text{EAU}}}{\rho_{\text{AIR}}} \frac{g}{C_D} \right)^{1/2} = \left(\frac{8}{3} \frac{1000}{1} \frac{10}{0,5} \right)^{1/2} = 231$$

Le fait empirique avec les données observées ($v = 6 \text{ m s}^{-1}$ quand $r = 1 \text{ mm}$) donne $k = 190$, ce qui reste en assez bon accord avec la valeur théorique. Notez que k va aussi dépendre de la densité de l'air plus faible en altitude... Au final on peut proposer la loi de vitesse de chute des gouttes de pluie :

$$v = 200 \sqrt{r} \text{ [m s}^{-1}\text{]} \text{ avec le rayon } r \text{ en mètre.}$$

La même méthodologie conduit à proposer que la vitesse des oiseaux varie comme la racine carrée de leur longueur. Dans ce cas c'est plutôt la portance qu'il faut considérer, mais on aboutit dimensionnellement au même résultat.

14.

Avec le débit volumique du Gulf Stream, on déduit sa vitesse moyenne $= 100 \times 10^6 / (4\,000 \times 10^5) = 0,25 \text{ m s}^{-1}$.

16.

L'équation des lignes de courant est :

$$\frac{dx_1}{u_1} = \frac{dx_2}{u_2}$$

soit :

$$\frac{dx_1}{x_1} = -\frac{dx_2}{x_2}$$

ce qui donne $x_1 x_2 = k$, une constante, un ensemble d'hyperboles. Le flot converge selon ces hyperboles le long de l'axe x_2 et diverge selon l'axe x_1 .

Les trajectoires des particules fluides obéissent à :

$$\frac{dx_1}{dt} = -C x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = C x_2$$

En appliquant les conditions initiales, on trouve :

$$x_1 = x_{10} e^{-Ct}$$

$$x_2 = x_{20} e^{Ct}$$

On peut éliminer la variable t en multipliant les deux équations, et on voit que trajectoires et lignes de courant sont identiques, ce qui est toujours le cas quand le flot est permanent (indépendant du temps).

Pour calculer l'accélération d'une particule fluide, il suffit de dériver deux fois le déplacement par rapport au temps :

$$a_1 = x_{10} C^2 e^{-Ct} = C^2 x_1$$

$$a_2 = x_{20} C^2 e^{Ct} = C^2 x_2$$

Connaissant le vecteur vitesse $\mathbf{u}_i(x_i, t)$, l'accélération se calcule aussi directement comme :

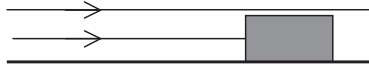
$$a_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} + (\mathbf{u} \bullet \nabla) u_1$$

$$a_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t} + (\mathbf{u} \bullet \nabla) u_2$$

ce qui redonne le même résultat que précédemment :

$$a_1 = 0 + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = C^2 x_1$$

$$a_2 = 0 + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = C^2 x_2$$

18.

On applique la relation de Bernoulli sur les deux lignes de courant de la figure. À l' ∞ , les constantes de Bernoulli sont identiques :

Au-dessus de la maison :

$$p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho U^2 = B_{\infty}$$

Comme cette ligne de courant n'est pas perturbée par l'obstacle, la pression au-dessus reste p_{∞} . La ligne de courant qui bute sur la maison a une vitesse nulle et donc une pression p telle que :

$$B_{\infty} = p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho U^2 = p$$

soit

$$p - p_{\infty} = \frac{1}{2}\rho U^2$$

La pression intérieure dépasse la pression extérieure de $\frac{1}{2}\rho U^2$. Pour un vent de 100 km h^{-1} , cela fait 463 N m^{-2} . Si la toiture ne résiste pas à cette contrainte, elle va exploser vers l'extérieur. À 200 km h^{-1} , la contrainte de pression est encore 4 fois plus forte...

19.

On prend l'axe z vertical avec l'origine au fond. Quand le bocal est rempli d'eau jusqu'à une hauteur z , l'eau sort avec un débit $D = a(2gz)^{1/2}$ d'après la formule de Torricelli. La variation de volume du bocal $dV = Adz$ pendant le temps dt est :

$$dV = Adz = Ddt$$

soit :

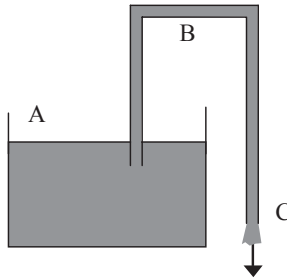
$$\frac{Adz}{(2gz)^{1/2}} = a dt$$

ou encore :

$$\frac{A}{a(2g)^{1/2}} \int_0^H \frac{dz}{z^{1/2}} = T$$

$$\text{et donc : } T = \sqrt{2} \frac{A}{a} \left(\frac{H}{g} \right)^{1/2}$$

21.



Le régime est permanent, les vitesses ne varient pas dans le temps. Une ligne de courant est une courbe tangente à la vitesse en chaque point. On choisit une ligne de courant qui part de la surface libre en A, entre dans le tube et ressort en C. Quand on néglige la viscosité, la relation de Bernoulli est un invariant de la ligne de courant donc : $B_A = B_B = B_C$. Le tube a une section constante donc les vitesses en B et C sont les mêmes. La conservation du débit pour un volume de contrôle limité par la surface libre et par une section du tube indique que les vitesses en A sont négligeables devant les vitesses dans le tube. En prenant l'origine des z à la surface libre, la conservation de B donne :

$$p_{\text{ATM}} = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho U^2 = p_{\text{ATM}} + \rho g z_C + \frac{1}{2} \rho U^2$$

Si $z_C = -H$, la vitesse en C est :

$$U = (-2gz_C)^{1/2} = (2gH)^{1/2}$$

La vitesse de sortie est contrôlée par la différence de niveau entre la surface libre et le point C qui doit être nécessairement plus bas. H contrôle le débit. On peut calculer maintenant la pression en B :

$$p_B = p_{\text{ATM}} - \rho g(z_B - z_C)$$

de sorte $p_B < p_{\text{ATM}}$: la pression plus faible en B permet de faire monter le fluide. Sur la branche descendante BC, c'est le poids du fluide qui fait remonter la pression jusqu'à la sortie. Évidemment on va avoir un problème si $p_B = 0$, mais avec de l'eau il faut une hauteur $z_B - z_C = 10$ m pour y arriver. Donc il y a de la marge.

22.

Dans une grosse artère, on peut supposer que l'écoulement est essentiellement non visqueux (à la différence du flot de Poiseuille dans un capillaire fin). Appelons A_1 la surface amont et A_2 la surface aval partiellement obstruée. La conservation du débit

donne $V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1$. Appelons la fraction cherchée $k = A_2/A_1$. Ensuite la relation de Bernoulli donne entre l'amont et l'aval :

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

ou

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (V_2^2 - V_1^2) = \frac{1}{2} \rho V_1^2 (k^{-2} - 1)$$

Cette équation permet d'obtenir $k = 0,31$, diagnostiquant qu'à peu près un tiers de l'artère est bouchée.

23.

À la surface du jet, la pression est atmosphérique. Mais si le jet est rectiligne, la pression est la même à l'intérieur du jet. Lorsque l'écoulement est permanent, l'application de la relation de Bernoulli sur une ligne de courant allant de la sortie du jet ($z = 0$) à la cote z donne donc :

$$\frac{1}{2} \rho v_0^2 \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z \Big|_z$$

soit :

$$v^2 = v_0^2 - 2gz$$

Attention, v augmente lors de la descente car ici z est négatif. On s'attend donc à ce que la section du jet diminue sur la longueur du jet. La conservation du débit entre $z = 0$ et la cote z donne :

$$A_0 v_0 = A v = A (v_0^2 - 2gz)^{1/2}$$

Pour un jet circulaire de rayon r , on obtient la forme du jet :

$$r_0^2 = r^2 \left(1 - \frac{2gz}{v_0^2} \right)^{1/2}$$

ou encore :

$$r = \frac{r_0}{\left(1 + \frac{2g|z|}{v_0^2} \right)^{1/4}}$$

qui exprime la diminution du rayon du jet avec la hauteur de chute $|z|$.

24.

Tout d'abord il y a conservation du débit entre l'entrée #1 et la sortie #2. Le débit est :

$$D = A_1 v_1 = \pi r_1^2 v_1 = 4,7 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} = 28 \text{ litre/minute}$$

Pour trouver la vitesse de l'eau à l'étage, on peut donc écrire :

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$v_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} v_1 = 1,5 \times 4 = 6 \text{ m s}^{-1}$$

Pour trouver la pression, on utilise la relation de Bernoulli :

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$$

ou

$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) - \rho g (z_2 - z_1)$$

L'accélération de la vitesse et la montée à l'étage font chuter la pression de respectivement 0,17 bar et 0,39 bar de sorte que la pression à l'étage n'est plus que de $p_2 = 1,94$ bar. Il faut évidemment que la pression de sortie reste supérieure à la pression atmosphérique pour que l'eau sorte comme un jet. Comme cette estimation ne prend pas en compte les frottements (une perte dans la relation de Bernoulli), la chute de pression réelle sera plus forte que cela :

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 + \text{pertes}$$

ou

$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) - \rho g (z_2 - z_1) - \text{pertes}$$

25. L'effet Coanda.



Sur une ligne de courant extérieure #1, la pression est atmosphérique : $p_1 = p_{\text{ATM}}$. Sur la ligne de courant intérieure #2 qui vient coller à la cuiller, on ne peut pas appliquer la relation de Bernoulli car les forces visqueuses viennent freiner l'écoulement. En revanche, comme le flot suit la surface courbée de la cuiller, il faut une force centripète pour dévier le fluide et donc :

$$\text{En notant : } \nabla p \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial p}{\partial n}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \frac{v^2}{r}$$

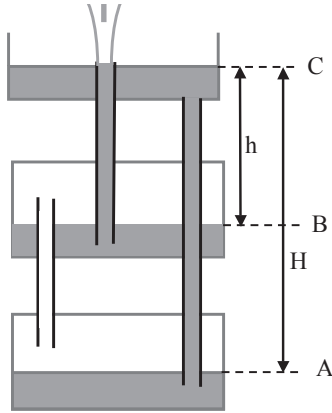
Cette relation permet de relier les pressions dans la direction \mathbf{n} normale aux lignes de courants et orientée vers le centre de courbure. Pour générer l'accélération centripète dans la direction \mathbf{n} , on doit avoir :

$$\frac{p_1 - p_2}{\Delta l} = \rho \frac{v^2}{r}$$

et donc la pression du jet sur la cuiller est plus faible qu'atmosphérique. Lorsque l'eau quitte la cuiller, elle conserve l'orientation acquise puisque la pression redevient atmosphérique.

26.

La fontaine de Heron se présente ainsi :



Entre le niveau A et C, la différence de pression est :

$$p_A = p_C + \rho g H$$

Le réservoir du bas et du milieu communiquent et sont donc à la même pression (si on néglige le poids de la colonne d'air dans le tube) :

$$p_B = p_A$$

En appliquant la relation de Bernoulli sur une ligne de courant qui part de la surface libre en B et sort dans le jet en C :

$$p_B = p_C + \rho g h + \frac{1}{2} \rho u^2$$

Notez que l'on néglige les vitesses en B car la surface du réservoir est grande devant la section du tube. En remplaçant :

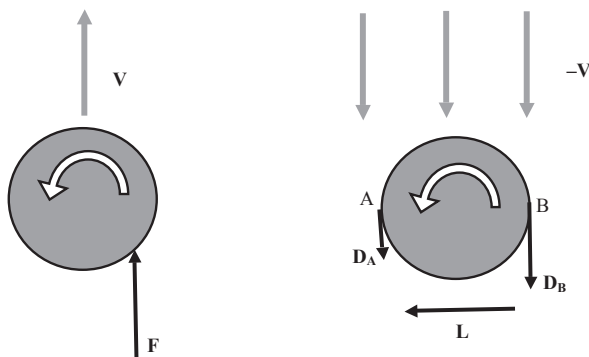
$$u = \sqrt{2g(H-h)}$$

Sur une ligne de courant dans le jet extérieur à la pression atmosphérique entre le point C et le point le plus haut, la relation de Bernoulli montre immédiatement que le jet atteint la hauteur maximum $H - h$.

27.

Le shoot **banane**.

La rotation du ballon joue un rôle très important dans les tirs au but.



La figure illustre la situation dans le plan horizontal. À gauche, le ballon subit la force \mathbf{F} exercée par le pied du joueur qui est décentrée par rapport au centre de masse. Celui-ci acquiert une vitesse de translation \mathbf{V} et une rotation dans le sens positif autour de ce centre de masse. On se place dans le référentiel du centre de masse du ballon. Sur la figure de droite, l'air arrive sur le ballon dans la direction opposée. On sait que les forces visqueuses dépendent des différences de vitesse dans le fluide. Au point A, l'air arrive dans le sens de la vitesse de rotation, la différence de vitesse entre l'air et le ballon n'est pas très importante et la force de frottement (la traînée) ne va pas trop ralentir l'air. C'est le contraire en B où l'air arrive face à une vitesse de rotation opposée. La vitesse relative entre l'air et le ballon est plus grande et donc aussi la force de frottement (la traînée). On en déduit que l'air va être très ralenti au voisinage de B et beaucoup moins près de A. Sur les lignes de courant extérieures où l'on peut appliquer la relation de Bernoulli, on en déduit que si la vitesse est plus grande en A qu'en B, la pression sera aussi plus faible en A qu'en B. Apparaît une portance \mathbf{L} perpendiculaire à la vitesse initiale et sur la gauche. La trajectoire du ballon est déviée sur la gauche de la vitesse initiale permettant de tromper le gardien de but. La figure montre aussi les forces de traînée (dans le sens de l'écoulement) qui s'appliquent sur le ballon aux points A et B. On peut dire en effet que :

$$D_A \propto (V - \Omega r)^2$$

$$D_B \propto (V + \Omega r)^2$$

avec Ω la vitesse angulaire du ballon et r son rayon. Comme D_B est supérieure à D_A , on voit que le moment des forces de traînée va ralentir la rotation du ballon et que l'effet déviateur causé par la portance L va progressivement diminuer.

Note :

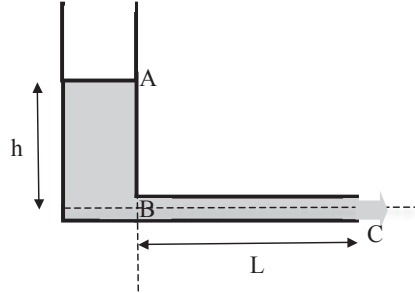
Un beau résultat théorique en deux dimensions donne la portance (par unité de longueur) comme :

$$L = \rho V \Gamma$$

où Γ est la circulation autour du corps solide qui peut être de forme quelconque. Pour un cylindre, la circulation sera $\Gamma = \oint \Omega r (rd\theta) = 2\Omega\pi r^2$. Cette dernière remarque est

juste là pour montrer le lien central entre portance et circulation de l'air autour d'une aile.

28. Viscosimètre



La vitesse moyenne U dans le réservoir est reliée à la vitesse u dans le tube par la conservation de la masse :

$$UA = \pi R^2 u$$

Les vitesses dans le réservoir sont négligeables devant les vitesses dans le tube si $A \gg R^2$. Dans ce cas, la diminution de h est très faible au cours du temps. Comme les vitesses sont négligeables dans le réservoir, la pression dans le réservoir est hydrostatique et :

$$p_B = p_{ATM} + \rho gh$$

L'écoulement permanent de Poiseuille-Hagen dans le tube fin donne le débit D en C :

$$D = \frac{\pi R^4}{8\mu L} (p_B - p_{ATM}) \text{ puisque la pression en C est atmosphérique.}$$

En remplaçant p_B par sa valeur :

$$D = \frac{\pi R^4 \rho gh}{8\mu L}$$

une expression qui relie le débit D , la hauteur h et la viscosité μ .

Pour trouver le temps pour vider le réservoir d'une certaine quantité, on écrit que le taux de variation du volume V du réservoir est juste égal au débit :

$$\frac{dV}{dt} = -D$$

Comme $V = Ah$ et que l'on suppose que l'écoulement permanent persiste dans le tube :

$$A \frac{dh}{dt} = -\frac{\pi \rho g R^4}{8\mu L} h$$

une équation différentielle ordinaire que l'on peut réécrire :

$$\frac{dh}{dt} = -kh$$

soit :

$$h = h_0 e^{-kt}$$

Le temps T pour vider le réservoir de moitié, $h/h_0 = 1/2$, est donc :

$$T = \frac{8\mu LA}{\pi \rho g R^4} \ln 2, \text{ d'autant plus grand que } L \text{ est grand et } R \text{ petit.}$$

Évidemment le dispositif expérimental est assez proche de celui de Reynolds pour montrer l'apparition de la turbulence. Pour prévenir l'apparition de celle-ci, le nombre de Reynolds UR/ν doit rester bien inférieur à 10^3 avec U la vitesse moyenne dans le tube.

30.

La force de pression horizontale dans la direction \mathbf{n} du centre du tourbillon fournit l'accélération centripète comme pour l'exercice 25.

Ainsi la pression doit décroître dans la direction \mathbf{n} pour générer l'accélération centripète, et ce, quel que soit le sens de rotation du tourbillon.

Mais dans la direction verticale, on considère la pression comme hydrostatique (accélération verticale négligeable). En prenant $z = 0$ la surface au repos et $z = \eta$ la surface perturbée par le tourbillon :

$$p = p_{\text{ATM}} + \rho g(h - z)$$

ce qui permet de réécrire l'équilibre horizontal avec le gradient de η :

$$-\rho g \frac{\partial h}{\partial n} = \rho \frac{v^2}{r}$$

soit :

$$\frac{\partial h}{\partial n} = -\frac{v^2}{gr}$$

Voilà comment on peut calculer la déflexion de la surface libre si on connaît la loi $v(r)$.

L'expression ci-dessus est l'équation différentielle pour trouver h . En introduisant la variable r (croît vers l'extérieur) :

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{v^2}{gr}$$

Lorsque v est un vortex de Rankine, on intègre sur les parties $r < r_0$ et $r > r_0$ et en appliquant la continuité de h en $r = r_0$, on trouve :

$$r \leq r_0 \quad h = H_0 + \frac{\Omega^2}{2g} r^2$$

$$r \geq r_0 \quad h = H_0 + \frac{\Omega^2 r_0^2}{2g} \left(2 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)$$

$$\text{A.N. : } \Delta h = h(\infty) - H_0 = \frac{\Omega^2 r_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{g} = 10,2 \text{ cm}$$

Pour trouver la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la tornade, il faut repartir de l'équation reliant pression et accélération centripète qui se réécrit :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{r}$$

Il suffit de remplacer $1/g$ par ρ dans le même calcul avec le profil de Rankine pour trouver :

$$r \leq r_0 \quad p = p_0 + \rho \frac{\Omega^2}{2} r^2$$

$$r \geq r_0 \quad p = p_0 + \rho \frac{\Omega^2 r_0^2}{2} \left(2 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)$$

La pression intérieure est p_0 et la pression extérieure est obtenue quand r tend vers l^∞ :

$$\Delta p = p(\infty) - p_0 = \rho \Omega^2 r_0^2 = \rho v_0^2 = 1,2 \times 10^4 \text{ Pa} = 120 \text{ hPa}$$

On s'aperçoit que le déficit de pression dépend de la vitesse maximale mais pas de la taille de la tornade. Une anomalie de pression de 120 hPa est très grande. Pour donner une idée, la pression varie de 1 040 hPa dans les anticyclones à 970 hPa dans les profondes dépressions des moyennes latitudes.

31.

L'exercice ressemble fort au précédent : si le fluide tourne, la surface libre doit s'abaisser au centre. Quand le bocal est en rotation solide, la vitesse est connue partout, $v = \omega r$, et on écrit dans la direction radiale (vers l'extérieur) :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{r} = \rho \omega^2 r$$

En intégrant par rapport à r :

$$p(r, z) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + C(z)$$

avec la constante d'intégration $C(z)$, origine de l'axe z prise au fond du bocal. Dans la direction verticale, l'équilibre est hydrostatique :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

soit :

$$C' = -\rho g \text{ et } C = -\rho g z + k$$

avec k une constante. Au final, la pression dans le bocal vaut :

$$p(r, z) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z + k$$

Comme en surface la pression est atmosphérique et donc constante, on obtient :

$$\rho g z = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + k - p_{\text{ATM}}$$

Au centre du bocal $z = z_0$, $\rho g z_0 = k - p_{\text{ATM}}$ de sorte que la surface libre a pour équation :

$$z - z_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

l'équation d'un paraboloïde de révolution. Encore une fois, la pression est toujours basse au centre quel que soit le sens de rotation choisi.

33.

Si la pression varie vers l'est, l'écoulement géostrophique du Gulf Stream est dans la direction nord-sud :

$$-\rho f u_Y = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

Avec l'origine de l'axe z prise sur la surface de l'océan au repos, l'équilibre hydrostatique indique que la pression varie comme :

$$p = p_{\text{ATM}} + \rho g(h - z)$$

si $\eta(x, y, t)$ est la déviation de la surface libre. La seule quantité fonction de x est justement η . Donc :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

et :

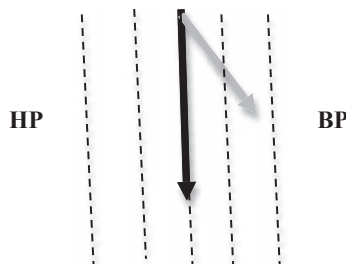
$$-f u_Y = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Puisque la pente de la surface libre augmente vers l'est, $u_Y > 0$, et le courant est vers le nord. Sa vitesse est :

$$u_Y = \frac{g}{f} \frac{\Delta \eta}{\Delta x}$$

soit $u_Y = 1,17 \text{ m s}^{-1}$.

35.



Vent en altitude ($> 2 \text{ km}$) flèche noire, vent au sol flèche grise, isobares en pointillé.

Le vent géostrophique en altitude (noir) souffle parallèlement aux isobares avec les hautes pressions à droite dans l'hémisphère nord. Au sol, les vitesses sont plus

faibles à cause du frottement et du coup les vitesses ont une composante dirigée vers les basses pressions. Quand on a le vent en plein visage au sol, les nuages d'altitude passent effectivement vers la gauche (vers la droite dans l'hémisphère sud).

37.

L'équation des ondes longues est :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad \text{avec } c^2 = gH$$

En introduisant la solution $\eta = \text{Partie réelle } [f(x)\exp(-i\omega t)]$, l'équation pour f est :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0 \quad \text{avec le nombre d'onde } k = \omega/c$$

Aux extrémités du lac, la vitesse normale est nulle, donc les accélérations, donc les forces et donc $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$. Le problème se réduit à :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0 \quad \text{avec } f'(0) = 0 \text{ et } f'(L) = 0$$

Existe-t-il des fonctions f autres que $f(x) = 0$, satisfaisant cette équation ? On remarque qu'ici il faut déterminer non seulement la fonction f mais aussi la constante k . On appelle cela un problème aux valeurs propres. La fonction f est la fonction propre ou mode propre ou vecteur propre et k la valeur propre (*eigenvalue, eigenvectors*). Comme l'équation est celle de l'oscillateur harmonique, les solutions sont des cos et des sin.

Prenons $f = A \cos kx$, $f' = -A \sin kx$, une forme qui satisfait déjà la condition aux limites en $x = 0$. En $x = L$, la condition aux limites demande :

$\sin kL = 0$, soit $kL = m\pi$, avec m entier.

On obtient donc un nombre discret (infini) de valeurs propres données par :

$$k_m = \frac{m\pi}{L} \quad \text{et} \quad \omega_m = \frac{m\pi}{L} c$$

Les modes propres correspondants sont :

$$\eta_m = A_m \sin\left(m\pi \frac{x}{L}\right) \cos \omega_m t$$

avec l'amplitude A_m arbitraire mais telle que l'approximation des petites oscillations soit satisfaite. Le premier mode, on dit le mode le plus grave, pour $m = 1$ est :

$$k_1 = \frac{\pi}{L}, \quad \omega_1 = \pi \frac{c}{L}$$

$$\eta_1 = A_1 \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) \cos \omega_1 t$$

Ceci donne la période du mode 1 ou formule de Mérian :

$$T_1 = \frac{2L}{c}$$

Pour le lac de Genève avec $L = 70$ km, $H = 160$ m, $c = 39,6$ m s⁻¹, $T_1 = 59$ min à comparer aux 73,5 min pour les observations. Les lacs n'ont pas une forme rectangulaire et leur profondeur n'est pas constante. La même méthodologie de recherche des valeurs propres vecteurs propres se fait très efficacement pour ces cas réalistes de façon numérique.

On voit aussi que la forme spatiale du mode correspond à une demi-longueur d'onde du sin avec ventre en $x = L/2$ et nœuds aux frontières. En transformant le produit cos·sin en somme, la solution s'écrit aussi :

$$\eta_1 = A_1 \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{\pi x}{L} + \omega_1 t\right) + \sin\left(\frac{\pi x}{L} - \omega_1 t\right) \right]$$

La solution apparaît aussi comme la superposition de deux ondes progressives de longueur d'onde $2L$, l'une qui se propage vers les $x > 0$, l'autre vers les $x < 0$, pour fabriquer une onde stationnaire (une onde dont tous les points oscillent en phase) et satisfaire les CLs.

Pourquoi les modes propres sont-ils si importants ? Pour au moins deux raisons :

1) Ils constituent des solutions libres des équations de l'hydrodynamique et quand un forcing externe (vent et pression atmosphérique dans ce contexte) excite un peu toutes les fréquences, on s'attend à voir émerger de façon prioritaire les modes libres grâce aux résonances de ces modes.

2) Une forme quelconque de solution peut être exprimée comme une superposition de modes propres :

$$\eta(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \sin\left(m\pi \frac{x}{L}\right)$$

qui n'est pas autre chose ici qu'un développement en série de Fourier...

39.

On injecte la forme de la solution $\eta = f(x) \cos \omega t$ dans l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad \text{avec } c^2 = gH$$

et on obtient :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0 \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

dont la solution générale est :

$$f(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$$

Pour déterminer les deux constantes C_1 et C_2 , on applique les conditions aux limites. En $x = 0$, l'amplitude est fixée par la marée et donc $C_1 = \eta_0$.

En $x = L$, le courant doit être nul, donc l'accélération est nulle et donc le terme de pression $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ et donc $f' = 0$.

$$f' = -C_1 k \sin kx + C_2 k \cos kx$$

Ce qui donne $C_2 = \eta_0 \tan kL$

La solution complète au problème posé est alors :

$$\eta = \eta_0 \left(\cos kx + \frac{\sin kx \sin kL}{\cos kL} \right) \cos \omega t$$

ou

$$\eta = \eta_0 \frac{\cos k(x-L)}{\cos kL} \cos \omega t$$

Connaissant le champ de pression, les courants s'en déduisent directement par la deuxième loi de Newton ou l'équation de continuité :

$$u = -\eta_0 \sqrt{\frac{g}{H}} \frac{\sin k(x-L)}{\cos kL} \sin \omega t$$

À la différence de l'onde progressive, on peut noter que le courant est en quadrature avec la surface libre. Ces expressions montrent que les amplitudes de la pression et du courant sont modulées par le $\cos kL$ au dénominateur et, si celui-ci s'annule, la solution devient infinie :

$$\cos kL = 0 \Rightarrow k_n L = (n + 1/2)\pi. \text{ La longueur d'onde correspondante est } \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{4L}{2n+1}$$

Il existe donc une infinité de valeurs de k donc de ω pour lesquelles la réponse devient infinie. Les fréquences correspondantes sont données par :

$$\omega_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \frac{c}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ce sont précisément les fréquences des ondes libres du canal qui ont un nœud en $x = 0$ ($\eta = 0$) et un ventre en $x = L$ ($\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$). La situation est tout à fait analogue au phénomène de résonance présenté au § 6.8.1 sauf que maintenant ce sont des ondes, des structures spatio-temporelles qui sont résonantes. Les fréquences les plus basses des oscillations libres du canal sont :

$$\omega_0 = \frac{\pi c}{2L}, \quad \omega_1 = \frac{3\pi c}{2L}, \quad \omega_2 = \frac{5\pi c}{2L}$$

et les périodes associées sont :

$$T_0 = \frac{4L}{c}, \quad T_1 = \frac{4L}{3c}, \quad T_2 = \frac{4L}{5c}$$

La fondamentale pour $n = 0$ a une longueur d'onde $\lambda_0 = 4L$ et une période $T_0 = 4L/c$. Le canal fait donc un quart de longueur d'onde.

Note :

Il faut dire que les modes propres du lac fermé de l'exercice 28 sont plus solides que ceux-ci. En effet il y aura toujours une partie de l'énergie qui fuit par le côté ouvert.

On peut s'attendre à ce que les résonances soient moins fortes que dans un bassin fermé.

On va maintenant calculer la période des ondes libres pour la baie de Fundy. Avec $L = 270 \text{ km}$ et $H = 75 \text{ m}$, $c = 27,1 \text{ m s}^{-1}$, on trouve $T_0 = 11,07 \text{ h}$, $T_1 = 3,7 \text{ h}$. L'onde fondamentale T_0 a une période assez proche de la période de l'onde M_2 , $T = 12,40 \text{ h}$ pour une amplification. Le coefficient d'amplification est $1/\cos kL$. Avec la valeur de $kL = \omega L/c = 1,40$, l'amplification $1/\cos kL = 5,9$. La marée dans la baie est près de 6 fois la marée à l'entrée.

43.

La vitesse de groupe contrôle la dynamique des ondes dispersives : k , ω et l'énergie d'un train d'onde se propagent à la vitesse du groupe. Pour les ondes courtes $\omega^2 = gk$ et :

$$C_G = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{k} \right)^{1/2} = \frac{g}{2\omega}$$

Les ondes sont isotropes et donc une vague générée en \mathbf{x}_0 à $t = t_0$ arrive en \mathbf{x} en suivant un arc de grand cercle sur la Terre et la distance parcourue $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ s'écrit :

$$\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}{t - t_0} = \frac{g}{2\omega}$$

$$\omega = \frac{g(t - t_0)}{2|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}$$

Sur une plage à $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ constant, un surfeur verra la fréquence augmenter linéairement avec t . La pente de cette droite permettra de trouver la distance $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ de la tempête génératrice. Le problème est que les vagues observées sur la plage sont la superposition de sources multiples...

44.

On écrit dimensionnellement $F = U^A g^B L^C = (L^A T^{-A}) (L^B T^{-2B}) L^C$, ce qui donne :

$$A + B + C = 0$$

$$A + 2B = 0$$

Avec $A = 1$, on obtient $B = -1/2$, $C = -1/2$ et donc :

$$F = \frac{U}{\sqrt{gL}}$$

La vitesse de phase des ondes de gravité est $c = \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{g\lambda}$ avec λ la longueur d'onde. Les vagues excitées par le bateau ont des longueurs d'ondes telles que $c = U$ et donc :

$$\frac{\lambda}{L} = 2\pi \frac{U^2}{gL} = 2\pi F^2$$

Le nombre n de vagues excitées est $n = L/\lambda$ et donc F en fonction de n est :

$$F = \left(\frac{1}{2\pi n} \right)^{1/2}$$

La valeur maximale de F est atteinte quand $n = 1$ pour $F_{\text{MAX}} = 0,4$. La vitesse maximale prédite est alors $U_{\text{MAX}} = 0,4 \times \sqrt{gL} = 1,25 \sqrt{L}$ dans le système SI.

La formule empirique donnée pour le voilier Dragon demande à être convertie dans le système SI. Soit U' et L' les vitesses en nœuds et longueur en pieds respectivement, les valeurs SI sans primes sont alors :

$$U = 0,514U'$$

$$L = 0,3048L'$$

Ainsi :

$$\frac{U}{\sqrt{L}} = \frac{0,514U'}{\sqrt{0,3048L'}} = \frac{0,514}{\sqrt{0,3048}} \frac{U'}{\sqrt{L'}} = 1,4 \times \frac{0,514}{\sqrt{0,3048}} = 1,30$$

et donc $U = 1,3 \sqrt{L}$ dans le système SI, ce qui correspond assez bien avec la formule théorique.

La plupart du temps les voiliers avancent à des vitesses qui ne dépassent pas 60 % des vitesses max et dans ces régimes la force de traînée en v^2 redevient la cause principale de la résistance à l'avancement. Les cargos ne dépassent guère des rapports $U/\sqrt{L} = 0,45$.

Chapitre 10

1.

La variation d'énergie potentielle est $E_p = Mg\Delta z = 2,61 \times 10^6$ J. La chaleur de combustion d'une masse de beurre pour gravir la hauteur résulte de l'égalité : $m\Delta_C H = E_p$, soit $m = 104$ g de beurre. Ce qui démontre la très grande qualité énergétique des aliments. Pour autant la transformation de cette énergie de combustion en travail musculaire disponible pour monter ne se fait pas avec un rendement de un. Une partie de l'énergie est perdue par le corps sous forme de chaleur et une autre fait fonctionner tous les organes.

2.

Avec P la puissance de la résistance électrique, ΔT la variation de température, le temps cherché Δt sera donné par : $mC_p\Delta T = P\Delta t$, soit : $\Delta t = 0,1 \times 4\,190 \times (100 - 20)/2\,000 = 16,7$ s.

Supposons que le temps de chauffage observé soit de 50 s, la puissance effective sera $mC_p\Delta T/\Delta t = 670,4$. Le rendement sera $\eta = 670,4/2\,000 = 33$ %. Ce rendement est au final une mesure objective des pertes thermiques dans la transformation.

4.

L'enthalpie de fusion pour un kg de glace est : $\Delta H' = 6\,000/0,018 \text{ J kg}^{-1} = 3,3 \times 10^5 \text{ J}$ et ceci est fourni par le radiateur pendant un temps Δt , soit $500 \times \Delta t = 3,3 \times 10^5$, et $\Delta t = 660 \text{ s}$ (11 min).

5.

Le gain de température de l'eau provient de l'énergie potentielle de l'eau qui tombe d'une hauteur Δh . On écrit simplement la conversion d'énergie potentielle en énergie thermique :

$$mC_p\Delta T = mg\Delta h.$$

Première observation, le résultat est indépendant de la masse. La chute demandée est :

$\Delta h = C_p\Delta T/g = 4\,190 \times (100 - 15)/9,81 = 36\,305 \text{ m}$. Sachant que le chef descend l'eau d'une hauteur de $0,3 \text{ m} \times 30 = 9 \text{ m}$ par minute, il lui faudra $36\,305/9 = 4\,034$ minutes, soit 67,2 heures pour atteindre 100°C . Un calcul qui rend ébahi sur les pouvoirs de l'électricité disponible sur une simple prise...

6.

Le transfert de chaleur au corps sur le temps Δt est égal à la puissance P fournie :

$$mC_p \frac{\Delta T}{\Delta t} = P$$

On en déduit :

$$\Delta t = \frac{mC_p\Delta T}{P} = \frac{70 \times 3480 \times 7}{1200} = 1420 \text{ s} \text{ (23,7 mn)}$$

8.

Appelons T_1 la température du four et T_2 la température de la poterie. On utilise la loi de Stefan Boltzmann pour chacun des corps, $E = \sigma T^4$ avec $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$. La poterie de surface A reçoit des parois du four une énergie radiative (par unité de temps) $E_1 = A\sigma T_1^4$ et émet une quantité d'énergie $E_2 = A\sigma T_2^4$. La quantité nette d'énergie reçue est donc $E = E_1 - E_2 = A\sigma(T_1^4 - T_2^4)$.

Numériquement :

$$A = 1,256 \times 10^{-1} \text{ m}^2$$

$$E_1 = 2\,544 \text{ W}$$

$$E_2 = 52,5 \text{ W}$$

$$E = 2\,491,5 \text{ W}$$

10.

À l'équilibre, le flux thermique est constant et donc $\mathbf{F} = -k_C dT/dz \mathbf{k}$ (où l'on a exprimé \mathbf{F} comme un vecteur de signe opposé à \mathbf{k} , vecteur unitaire dirigé selon Oz la verticale ascendante – la loi de Fourier dit que le flux est opposé au gradient de température). Il faut se rappeler que le flux s'exprime en W m^{-2} . On en déduit :

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{F}{k_C}$$

$$T = -\frac{F}{k_C} z + T_0$$

où T_0 est la température de surface à $z = 0$. À 40 km de profondeur, $z = -40\,000$ m, la température atteint :

$$T = 0 + \frac{60 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^4}{3} = 800^\circ\text{C}$$

12.

Le temps de cuisson est proportionnel au temps de diffusion de la chaleur dans la viande soit :

$\tau = \frac{L^2}{k_D}$ avec k_D le coefficient de diffusion. La viande flotte donc sa densité est proche de celle de l'eau. Avec un rôti cubique, $L = (1/10^3)^{1/3} = 0,1$ m. On en déduit $k_D = 0,01/1\,800 = 5,5 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Le coefficient de conductivité est $k_C = \rho C_P k_D = 10^3 \times 3\,480 \times 5,5 \times 10^{-6} = 19 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$. L'expression du temps de diffusion (de cuisson) peut s'exprimer en fonction de la masse du rôti :

$$\tau = \frac{1}{k_D} \left(\frac{m}{\rho} \right)^{2/3}$$

La relation montre que le temps de cuisson varie comme $\propto m^{2/3}$. Si on double la masse, il faut multiplier le temps de cuisson par 1,6. Si on multiplie la masse par 5, le temps de cuisson est multiplié par 3.

14.

À l'équilibre thermique, la température varie linéairement dans chaque matériau et est continue à l'interface. Le flux de chaleur est également continu à l'interface car sinon la variation spatiale du flux entraînerait une variation de température.

Dans le premier puis le deuxième matériau, on écrit la continuité du flux et de la température T_{JON} à la jonction entre les deux matériaux :

$$F_1 = k_1 \frac{T_1 - T_{\text{JON}}}{L_1}$$

$$F_2 = k_2 \frac{T_{\text{JON}} - T_2}{L_2}$$

On écrit $F_1 = F_2 = F$ et on élimine T_{JON} pour trouver :

$$F = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}}$$

Le facteur R , une sorte de résistance, qui lit flux F et différence de température ΔT est : $\Delta T = R F$. Pour un ΔT donné, le flux de chaleur vers l'extérieur est d'autant plus petit que R est grand. Pour un matériau composite de N couches, il n'est pas difficile de généraliser l'expression ci-dessus pour trouver que :

$$R = \sum_{i=1}^N \frac{L_i}{k_i}$$

15.

Il s'agit de trouver des solutions de l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

L'idée centrale pour trouver les solutions d'équations aux dérivées partielles est toujours d'essayer la méthode de séparation de variables. On cherche une solution sous la forme :

$T(x, t) = F(t)G(x)$. En injectant dans l'équation :

$$GF' = k_D FG''$$

ou encore :

$$\frac{F'}{k_D F} = \frac{G''}{G} = -m^2$$

On observe une fonction de t à gauche et une fonction de x à droite : elles ne peuvent être égales que si égales à une même constante. On a choisi une constante négative car cela permet d'avoir des fonctions de x bornées (périodiques) plutôt qu'exponentielles, incapables de satisfaire les conditions aux limites. G obéit à l'équation :

$$G'' + m^2 G = 0$$

dont les solutions sont $G = A \cos(mx) + B \sin(mx)$, des solutions oscillantes de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/m$. L'évolution temporelle est donnée par F :

$$F' + m^2 k_D F = 0$$

dont la solution est de la forme :

$$F(t) = F(0)e^{-m^2 k_D t}$$

La solution du problème est donc :

$$T(x, t) = a e^{-m^2 k_D t} \cos(mx)$$

L'amplitude de l'anomalie de température décroît exponentiellement sur une échelle de temps :

$$\tau = \frac{1}{m^2 k_D} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 k_D}$$

décroissance d'autant plus rapide que m est grand et la longueur d'onde λ petite. On justifie ici l'ordre de grandeur proposé dans le cours que $\tau \propto L^2/k_D$.

Notez que comme l'équation de diffusion est linéaire, on peut superposer ces solutions et écrire une solution générale sous la forme :

$$T(x,t) = \sum_m A_m e^{-m^2 k_D t} \cos(mx) + \sum_m B_m e^{-m^2 k_D t} \sin(mx)$$

Les coefficients A_m et B_m sont alors déterminés par les conditions initiales $T(x, t = 0)$ en suivant la procédure des séries de Fourier. Notez que ce sont les termes avec les « m » les plus petits (donc les grandes échelles) qui restent majoritaires à t grand. Les grand « m » (les petites échelles) sont amortis le plus rapidement.

16.

(i) Il y a trois étapes à considérer : amener la glace à 0°C , la faire fondre entièrement, puis amener l'eau liquide à 20°C .

Étape 1 :

$$Q_1 = mC_I(T_F - T_I) = 88,8 \text{ kJ}$$

Étape 2, fusion à 0°C :

$$Q_2 = mL_F = 666 \text{ kJ}$$

Étape 3 :

$$Q_3 = mC_W(T_F - T_I) = 167,6 \text{ kJ}$$

Soit au total $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 922,4 \text{ kJ}$.

L'étape la plus consommatrice en énergie est celle du changement de phase glace-eau.

(ii) Il s'agit de trouver l'état et la température finale si maintenant on ne fournit que $Q' = 400 \text{ kJ}$. On voit que $Q_1 < Q' < Q_1 + Q_2$. Il y a donc assez d'énergie pour amener toute la glace à 0°C mais pas assez pour la transformer entièrement en eau liquide. L'état final est donc un mélange d'eau et de glace à 0°C . Néanmoins il reste à 0°C une quantité d'énergie disponible $Q' - Q_1 = 311,2 \text{ kJ}$. Cette quantité peut faire fondre une masse de glace m' telle que $m'L_F = Q' - Q_1$, ce qui donne $m' = 0,934 \text{ kg}$. L'état final est donc composé d'un mélange à 0°C , composé de $0,934 \text{ kg}$ d'eau liquide et de $1,065 \text{ kg}$ de glace.

18. Croissance de la glace.

L'équation de diffusion appliquée à une couche de glace d'épaisseur h coincée entre deux milieux de température fixe implique que le flux soit constant et que T soit linéaire. En prenant l'origine d'un axe z vertical en surface, on a $T(z = 0) = T_0$ et $T(z = -h) = T_F$ et donc la température de la glace est :

$$T = T_0 - (T_F - T_0) \frac{z}{h}$$

La loi de Fourier donne le flux de chaleur dans la couche de glace :

$$F_I = -k_C \frac{dT}{dz} = k_C \frac{(T_F - T_0)}{h}$$

La glace extrait donc de la chaleur de l'eau par ce flux F_I . Mais comme on a supposé que l'eau est déjà très proche de la température de fusion, de la glace supplémentaire va se former.

Le volume de glace $A\Delta h$ formé pendant le temps Δt sur une surface A est tel que le nombre de joules extrait par le flux F_I serve à augmenter la masse de glace :

$$\rho_I A \Delta h L_F = F_I A \Delta t$$

En faisant tendre Δt vers zéro et en remplaçant F_I par son expression en fonction des températures, on trouve l'équation différentielle qui gouverne h :

$$\rho_I L_F \frac{dh}{dt} = k_I \left(\frac{T_F - T_0}{h} \right)$$

Le taux de croissance de glace est infini quand $h \rightarrow 0$ puis ralentit avec l'épaisseur de glace. L'équation différentielle s'intègre facilement :

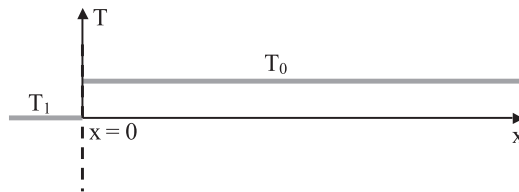
$$h = \left(\frac{2k_I}{\rho_I L_F} \right)^{1/2} (T_F - T_0)^{1/2} t^{1/2}$$

L'épaisseur de glace varie donc comme $\propto \sqrt{t}$. Le temps nécessaire pour geler l'étang jusqu'au fond est :

$$t = \frac{\rho_I L_F}{k_I} \frac{h^2}{2(T_F - T_0)} = \frac{0,92 \times 10^3 \times 3,34 \times 10^5 \times 1^2}{2 \times 2,25 \times 10} = 6,8 \times 10^6 \text{ s} = 2,6 \text{ mois}$$

Avec ce climat, la glace atteint un mètre d'épaisseur au bout de 2-3 mois. Comme la croissance de la glace est contrôlée par un processus de diffusion, le temps augmente comme l'épaisseur au carré.

19. Le problème de Kelvin, 1864.



À l'instant $t = 0$, les conditions initiales sont données ci-dessus. Avec le changement

de variable $y = \frac{x}{\sqrt{\pi k t}}$, on calcule :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dy} \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{x}{2\sqrt{k}} t^{-3/2} \frac{dT}{dy}$$

et :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{dy} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{kt}} \frac{dT}{dy}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{kt} \frac{d^2 T}{dy^2}$$

En remplaçant dans l'équation de diffusion :

$$\frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{y}{2} \frac{dT}{dy} = 0$$

une équation différentielle ordinaire dont la solution est successivement :

$$\frac{dT}{dy} = C_1 e^{-y^2/4}$$

$$T = C_1 \int e^{-y^2/4} dy + C_2$$

avec :

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\zeta^2} d\zeta$$

$$\text{erf}(\infty) = 1$$

Les constantes C_1 et C_2 sont déterminées par les conditions aux limites et les conditions initiales. On obtient la solution :

$$T(x,t) = T_1 + T_0 \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right)$$

Le gradient thermique est :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi kt}} e^{-x^2/4kt} \text{ et donc en } x = 0 :$$

$$G = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi kt}}$$

Le temps de refroidissement t est obtenu lorsque G est la valeur observée à l'instant t :

$$t = \frac{T_0^2}{\pi k G^2}$$

Avec le flux géothermique moyen $Q = 65 \times 10^{-3} \text{ W m}^{-2}$ et la conductivité thermique, on trouve par la loi de Fourier que $G = Q/k_C = 2,16 \times 10^{-2} \text{ °C m}^{-1}$ (soit $21,6 \text{ °C par km}$). Reste à calculer la diffusivité thermique $k = k_C/\rho C_p = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ avec les valeurs données. On trouve alors :

$$t = \frac{1200^2}{\pi \times 10^{-6} \times (2,16 \times 10^{-2})^2} = 9,8 \times 10^{14} \text{ s} = 31 \times 10^6 \text{ an}$$

Dans son article de 1864, Kelvin donnait une fourchette allant de quelques dizaines à quelques centaines de millions d'années selon le choix de T_0 , G , k . La trentaine

de millions d'années trouvée ici est bien trop courte par rapport à l'âge des plus anciennes roches terrestres ou lunaires. Il manque deux ordres de grandeurs essentiellement et le désaccord provient de ce que l'on sait maintenant que l'intérieur de la Terre est le siège de radioactivité naturelle qui est une source de chaleur importante. On estime la température de l'intérieur de la Terre à 5 000 °C.

Une bien meilleure estimation de l'âge de la Terre fait l'objet de l'exercice 84.

20.

Si l'objet de surface A a une température T et rayonne comme un corps noir, il perd une énergie $A\sigma T^4$. Il gagne de l'extérieur une énergie $A\sigma T_{\text{EXT}}^4$, soit au total une perte :

$$-A\sigma(T^4 - T_{\text{EXT}}^4)$$

Pour de petites différences de températures, un développement de Taylor donne :

$$T^4 \approx T_{\text{EXT}}^4 + 4T_{\text{EXT}}^3(T - T_{\text{EXT}})$$

Permettant d'exprimer la perte comme :

$$mC \frac{dT}{dt} = -4A\sigma T_{\text{EXT}}^3(T - T_{\text{EXT}})$$

avec m la masse de l'objet et C sa capacité calorifique. Le paramètre λ est donc :

$$\lambda = \frac{4A\sigma T_{\text{EXT}}^3}{mC}$$

La solution en posant $\Delta T = T - T_{\text{EXT}}$ est :

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-\lambda t}$$

Avec les conditions initiales sur le refroidissement de la maison, on trouve :

$$\lambda = \frac{1}{3600} \ln\left(\frac{14}{11}\right) = 6,7 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

Pour diminuer le refroidissement, il faut diminuer λ . En l'absence d'isolation dans ce problème, le seul paramètre sur lequel on peut jouer est d'augmenter la masse m, donc plutôt des maisons massives en pierre pour augmenter ce que l'on appelle l'inertie thermique.

21.

Il s'agit d'abord de déterminer le nombre de moles par la loi des gaz parfaits :

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{2,24 \times 1,01325 \times 10^5 \times 0,75 \times 10^{-3}}{8,3144 \times (273,15 + 50)} = 0,063 \text{ mole}$$

Connaissant le nombre d'Avogadro, on en déduit le nombre N d'atomes ou molécules :

$$N = nN_A = 3,8 \times 10^{22}$$

La masse molaire $M = m/n = 2 \times 10^{-3}$, soit l'hydrogène H_2 .

22.

L'énergie interne par mole d'un gaz diatomique comme N_2 est $U = 5/2RT + U_0$. Le nombre de moles est :

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{2 \times 1,01325 \times 10^5 \times 1 \times 10^{-3}}{8,3144 \times 298} = 8,18 \times 10^{-2} \text{ mole}$$

La variation d'énergie interne lorsque T augmente de 10 K est :

$$\Delta U = n \frac{5}{2} R \Delta T = 8,18 \times 10^{-2} \times 2,5 \times 8,3144 \times 10 = 17 \text{ J}$$

Pour chauffer une mole de N_2 de 0 K à 298 K à volume constant, l'énergie interne nécessaire est :

$$\Delta U = 2,5 \times 8,3144 \times 298 = 6,2 \text{ kJ}$$

23.

Dans l'équation d'état, $p = n \frac{RT}{V} + \phi(T, V)$, le premier terme $n \frac{RT}{V}$ est intensif comme la pression p . La fonction $\phi(T, V)$ doit être également intensive. Le paramètre T est intensif alors que V est extensif et par conséquent $\phi(T, V) = \phi(T)$ et donc la fonction ne peut être qu'une fonction de la température T .

28.

La vitesse de libération d'un atome d'hélium de l'attraction gravitationnelle du Soleil est :

$$V_E = \left(\frac{2GM_{\text{SOL}}}{R_{\text{SOL}}} \right)^{1/2} = 617 \text{ km s}^{-1}$$

La vitesse thermique rms d'un atome d'hélium est donnée par :

$$v_{\text{RMS}} = \left(\frac{3RT}{M_{\text{HE}}} \right)^{1/2} = 78 \text{ km s}^{-1}$$

avec M_{HE} la masse molaire de l'hélium. La vitesse thermique est de près d'un ordre de grandeur plus faible que la vitesse de libération du Soleil. On peut conclure que relativement peu d'atomes d'hélium pourront s'échapper.

29.

(i) L'équilibre hydrostatique de l'atmosphère est :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

En remplaçant ρ par $p/R_D T$ en vertu de l'équation des gaz parfaits, on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g \frac{p}{R_D T}$$

soit

$$p = p_0 e^{-z/H} \text{ avec } H = \frac{R_D T}{g} \approx 7,3 \text{ km}$$

Avec l'équation des gaz parfaits, on trouve de même que :

$$\rho = \rho_0 e^{-z/H}$$

Au sol $p_0 = \rho_0 R_D T = 0,86 \text{ bar}$. À 30 km, $p = p_0 \times 0,0164 = 0,014 \text{ bar}$ et $\rho = 0,02 \text{ kg m}^{-3}$, des valeurs considérablement réduites.

(ii) Pour assurer le décollage du ballon, la force de flottabilité (la résultante des forces de pression) doit être supérieure au poids, soit :

$$\rho_0 V_0 g > Mg$$

soit $V_0 > 83 \text{ m}^3$. Évidemment on peut embarquer d'autant plus d'équipement que le gaz est léger :

$$m_{\text{HELIUM}} = \rho_1 V_0 = 14,7 \text{ kg}$$

$$M_{\text{EQUIPEMENT}} = M - m_{\text{HELIUM}} = 85,3 \text{ kg}$$

(iii) À 30 km l'altitude d'équilibre, poids et flottabilité s'équilibrent et le volume V du ballon est donc :

$$\rho V g = Mg$$

soit $V = 5\,000 \text{ m}^3$. Le volume du ballon a augmenté d'un facteur 60 entre le sol et 30 km. C'est la raison pour laquelle les ballons sont très dégonflés au départ et se gonflent avec la diminution de pression extérieure. Si le ballon est hermétique, la loi des gaz parfaits pour l'hélium à température constante est :

$$p_{10} V_0 = p_1 V$$

ce qui donne $p_1 = 60 p_{10}$. Si p_{10} est proche de la pression atmosphérique au sol, la différence à 30 km est $60 - 0,014 = 59,98 \text{ bars}$. Pour éviter que l'enveloppe ne se déchire sous cette surpression énorme, on installe sur le ballon une soupape limiteuse de pression. Les ballons météorologiques de routine qui mesurent T , p et bien d'autres choses sont en caoutchouc dont l'élasticité permet d'accommoder le changement de volume. On les laisse éclater quand ils sont parvenus à leur altitude maximale.

30.

Le travail fait à pression constante est :

$$W = -p\Delta V = -1,69 \times 10^5 \text{ J}, W < 0 \text{ donc le gaz fait un travail positif sur l'environnement.}$$

Le gain de chaleur à fournir pour évaporer cette masse d'eau est la chaleur latente de vaporisation $L_v = 2\,256 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1}$, ici $Q = +2,256 \times 10^6 \text{ J}$

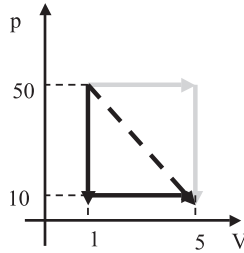
La variation d'énergie interne est donnée par la première loi :

$$\Delta U = W + Q = 2,08 \times 10^6 \text{ J}$$

L'essentiel de la variation de U est causé par le chauffage pour le changement de phase – la séparation des molécules du liquide, une petite fraction est utilisée pour faire du travail sur l'environnement.

31.

La situation est la suivante :



Il n'y a travail que s'il y a changement de volume.

À 10 Pa, l'expansion de 1 à 5 m³ demande :

$$W = -p\Delta V = -10 \times 4 = -40 \text{ J}$$

À 50 Pa, $W = -200 \text{ J}$

L'expansion sur la transformation qui suit le pointillé du point 1 au point 2 demande d'exprimer la pression en fonction du volume. En notant $\Delta V = V_2 - V_1$ et $\Delta p = p_2 - p_1$, on trouve la pente de la droite $m = \Delta p / \Delta V = -10 \text{ Pa m}^{-3}$. On a donc : $p = p_1 + m(V - V_1)$.

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} [p_1 + m(V - V_1)] dV$$

$$W = -p_1\Delta V - \frac{m}{2} \Delta V^2 = -200 + 5 \times 4^2 = -120 \text{ J}$$

On peut aussi remarquer plus simplement que cette aire est celle du trapèze :

$$W = - \frac{50+10}{2} (5-1) = -120 \text{ J}$$

Le point important est que le travail de 1 à 2 dépend du chemin suivi : ce n'est donc pas une variable d'état. Le travail est en valeur absolue « l'aire sous la courbe ». Il augmente depuis le petit rectangle du bas de hauteur 10, puis le trapèze sous la droite pointillée et enfin le grand rectangle de hauteur 50.

34.

Pour une transformation adiabatique, pression et volume sont reliés par :

$$pV^\gamma = \text{constant}$$

Le travail de 1 à 2 est :

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = -C \int_{V_1}^{V_2} V^{-\gamma} dV = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\gamma - 1}$$

En utilisant la loi des gaz parfaits, ceci se réécrit :

$$W = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_2 - T_1)$$

Mais $R/(\gamma-1) = C_V$ et donc :

$$W = nC_V(T_2 - T_1)$$

Où l'on reconnaît que le travail est égal à la variation d'énergie interne $U = nC_V T$. C'est évidemment correct puisqu'en l'absence de transferts thermiques, la première loi demande justement que :

$$\Delta U = W$$

Quand on fait une détente de V_1 à V_2 , l'expression précédente n'est pas directement utilisable puisque T_2 est inconnue. Mais on peut utiliser $TV^{\gamma-1} = \text{constant}$ pour calculer T_2 . En remplaçant T_2 avec cette relation, on obtient finalement :

$$W = nC_V T_1 \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right]$$

Lors d'une détente adiabatique $V_2 > V_1$, $T_2 < T_1$, $W < 0$, ce qui veut dire que le système fait du travail positif sur l'environnement.

35.

La première loi permet d'écrire : $dU = dQ - pdV$

Lors des transformations adiabatiques $\delta Q = 0$. Posons $\eta = pV^\gamma = \text{constant}$. Puisque U est une différentielle, on peut alors écrire :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_\eta = -p = -\eta V^{-\gamma}$$

$$\text{L'intégration donne } U = \frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} + f(\eta) = \frac{pV}{\gamma-1} + f(\eta)$$

Le terme constant en $f(\eta)$ est sans conséquence puisque U est définie à une constante près.

Comparer cette méthode avec celle de l'exercice 34.

37.

Si pV est constant ($= C$), cela signifie que la température est constante puisque le gaz est parfait. La transformation est isotherme et on en conclut que l'énergie interne du gaz ne change pas : $\Delta U = 0$.

Le travail pour passer d'un état 1 à un état 2 est :

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = -C \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

après avoir utilisé l'équation d'état ($C = nRT$). Comme $\Delta U = 0$, la chaleur transférée est telle $W + Q = 0$ et donc :

$$Q = +nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

de sorte que quand le volume double :

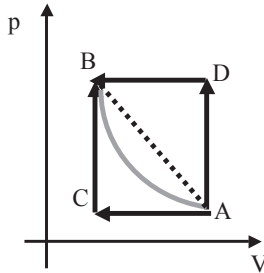
$$W = -nRT \ln 2$$

$$Q = +nRT \ln 2$$

On chauffe le gaz de façon isotherme et il fournit un travail positif sur l'environnement.

43.

Sur la figure suivante, le gaz est comprimé de façon adiabatique sur l'arc gris AB.



(i) Dans la transformation adiabatique AB, $pV^\gamma = C$. On peut vérifier que $1 \times 8^{5/3} = 32 \times 1^{5/3}$.

Le travail dans une transformation réversible est donné par $W = -pdV$. L'exercice 34 donne :

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\gamma - 1} = 36 \times 10^5 \text{ J}$$

Le travail est positif, signe que l'environnement fournit un travail sur le système pour le comprimer. Évidemment $Q = 0$, de sorte que la variation d'énergie interne est juste égale à W :

$$\Delta U = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\gamma - 1} = 36 \times 10^5 \text{ J}$$

(ii)

Transformation A C B

Le travail est nul sur CB mais non nul sur la contraction AC :

$$W = -p_1(V_2 - V_1) = 7 \times 10^5 \text{ J}$$

Comme l'énergie interne est une variable d'état, sa variation entre les deux points A et B est identique pour toutes les transformations. Ceci permet de calculer la quantité de chaleur transférée au gaz :

$$Q = \Delta U - W = 29 \times 10^5 \text{ J}$$

Transformation A D B

Le travail est différent du précédent car il se fait sur l'arc DB à haute pression.

$$W = -p_2(V_2 - V_1) = 224 \times 10^5 \text{ J}$$

et de même :

$$Q = \Delta U - W = -188 \times 10^5 \text{ J}$$

$Q < 0$, signifiant que la chaleur est transférée à l'environnement.

Transformation linéaire AB

La pente de la droite AB est $m = \Delta p / \Delta V = -31 \times 10^5 / 7 = -4,43 \times 10^5$. La droite AB a pour équation :

$p = p_1 + m(V - V_1)$ Le travail se calcule comme :

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} [p_1 + m(V - V_1)] dV$$

$$W = -p_1 \Delta V - \frac{m}{2} \Delta V^2 = -7 \times 10^5 + \frac{4,43 \times 10^5}{2} \times 7^2 = 115 \times 10^5 \text{ J}$$

et donc :

$$Q = \Delta U - W = -79 \times 10^5 \text{ J}$$

Le travail étant l'aire sous la courbe de la transformation dans le diagramme (V, p), on vérifie qu'il augmente dans l'ordre depuis la transformation ACB, la transformation adiabatique, la transformation linéaire, et finalement jusqu'à la transformation ADB. La chaleur Q diminue dans le même ordre. Elle reste positive pour ACB, est nulle pour la transformation adiabatique et devient négative pour la transformation linéaire et la transformation ADB. Cet exercice est encore une illustration que ni le travail ni la chaleur ne sont des variables d'état. Ils dépendent tous deux du chemin suivi dans l'espace (V, p).

44. Le paradoxe de Emden

Quand la température augmente, la pression n'augmente pas mais reste égale à la pression atmosphérique extérieure. Il y a donc des molécules d'air qui s'échappent par tous les interstices. Le volume de la pièce est constant, la pression est constante mais le nombre de moles n n'est pas constant.

L'énergie interne de l'air s'écrit $U = nC_V T + U_0$. Quand la température augmente, on peut écrire :

$$\Delta U = C_V \Delta(nT)$$

Mais en utilisant la loi des gaz parfaits, ceci se réécrit :

$$\Delta U = C_V \Delta \left(\frac{pV}{R} \right) = 0$$

Donc l'énergie interne est constante et le scientifique a tort...

On a plus chaud dans le refuge parce que les gains thermiques de notre corps par radiation du poêle et par conduction de l'air sont plus grands quand la température est plus élevée, ce qui était bien anticipé par le *layman*.

45.

Lors d'une transformation adiabatique infinitésimale, l'énergie interne varie comme :

$$du = -pdv$$

Dans cette expression, u est l'énergie par unité de masse et v le volume massique ou spécifique $v = V/m$. Avec v , l'équation des gaz parfaits s'écrit : $pv = \frac{R}{M}T$ avec M la masse molaire de l'air sec. On peut écrire :

$$du = -d(pv) + vdp$$

$$du = -\frac{R}{M}dT + vdp$$

On a introduit l'énergie interne comme $U = nC_VT + U_0$ avec C_V la chaleur spécifique par mole. L'énergie interne par unité de masse $u = U/m$ s'écrit alors :

$$u = \frac{C_V}{M}T + u_0$$

En remplaçant u dans l'expression ci-dessus :

$$\frac{C_V}{M}dT = -\frac{R}{M}dT + vdp$$

Comme $C_p - C_V = R$, on a aussi :

$$\frac{C_p}{M}dT = +vdp$$

Pour l'air sec, la masse molaire $M = 28,96 \text{ g mole}^{-1}$, on trouve $c_p = C_p/M = 1\,005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ (et $c_v = C_V/M = 719 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$). En utilisant la chaleur spécifique massique c_p , on a au final :

$$c_p dT = +vdp$$

Quand la particule monte ou descend, on suppose qu'elle reste en équilibre de pression avec l'environnement. On va alors pouvoir connaître dp , la variation de pression de l'environnement par la relation hydrostatique :

$$dp = -\rho g dz$$

En remplaçant dans l'expression précédente :

$$c_p dT = vdp = -gdz \quad (\text{car } vp = 1)$$

soit :

$$\Gamma_A = -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_p}$$

La quantité $\Gamma_A = g/c_p$ est le gradient adiabatique de l'air sec. On trouve que la température diminue avec l'altitude de l'ordre de 1°C par 100 m. Une particule qui monte subit une détente adiabatique et donc se refroidit, et inversement pour une qui descend. Ce sont les mouvements de convection dans l'atmosphère chauffée par le sol qui sont responsables de ces montées et descentes et établissent au final la distribution de température observée en moyenne. En pratique, la diminution de température est plus faible $\approx 0,65^\circ\text{C}$ par 100 m car l'air contient de la vapeur d'eau. Quand l'air se refroidit en montant et que la pression de vapeur saturante est atteinte, la vapeur d'eau commence à se condenser. Mais un processus de condensation relâche de la chaleur, l'air se réchauffe et le gradient thermique diminue.

46.

L'expression de l'accélération d'une particule de densité ρ_2 se déplaçant dans un fluide densité environnante ρ_1 est :

$$a_z = g \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} \right)$$

La pression de la particule reste égale à celle de l'environnement p_1 de sorte que la relation des gaz parfaits est :

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R^* T_1}$$

$$\rho_2 = \frac{p_1}{R^* T_2}$$

En remplaçant ρ_1 et ρ_2 en fonction de T_1 et T_2 , on trouve :

$$a_z = g \left(\frac{T_2 - T_1}{T_2} \right)$$

La particule est au repos à la température $T_1(z_0)$ au niveau z_0 et la température de l'air environnant varie comme :

$$T_1 = T_1(z_0) - \Gamma (z - z_0)$$

Lorsque l'on déplace adiabatiquement la particule du niveau z_0 à un niveau z , l'exercice 41 a montré que la température de la particule déplacée varie comme :

$$T_2 = T_1(z_0) - \Gamma_A (z - z_0)$$

En remplaçant T_1 et T_2 , l'accélération de la particule est donc :

$$a_z \approx -g \left(\frac{\Gamma_A - \Gamma}{T_1(z_0)} \right) (z - z_0)$$

où l'on a négligé les termes en $z - z_0$ au dénominateur dans l'hypothèse des petits déplacements. En appelant le déplacement $\eta = z - z_0$, l'équation différentielle pour ce déplacement devient :

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + g \left(\frac{\Gamma_A - \Gamma}{T_1(z_0)} \right) \eta = 0$$

où l'on reconnaît l'équation de l'oscillateur harmonique. Des solutions oscillantes sont possibles si la pulsation ω est réelle :

$$\omega^2 = g \left(\frac{\Gamma_A - \Gamma}{T_1(z_0)} \right)$$

On en déduit le tableau de stabilité :

$$\Gamma \leq \Gamma_A \Rightarrow \text{stable}$$

$$\Gamma > \Gamma_A \Rightarrow \text{instable}$$

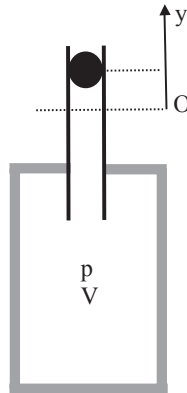
En effet quand $\Gamma > \Gamma_A$, les solutions sont des exponentielles réelles dont l'une tend vers l'infini.

Dans le cas stable, la fréquence calculée pour $T_1(z_0) = 273$ K est :

$$\omega = \left(9,81 \times \frac{[1 \times 10^{-2} - 0,65 \times 10^{-2}]}{273} \right)^{1/2}$$

La période des oscillations $T = 2\pi/\omega = 9,3$ minutes. Ces ondes dites internes existent dans tous les fluides stratifiés en densité, atmosphère et océans. Elles sont importantes notamment dans la stratosphère qui est très stratifiée puisque la température augmente avec l'altitude. Dans l'océan, elles sont générées notamment par la marée lunaire de période semi-diurne en présence d'obstacles topographiques qui permettent des courants verticaux qui peuvent exciter ce type d'oscillations.

47. L'expérience de Rüchhardt, 1929



À l'équilibre, la pression dans le bocal est supérieure à la pression atmosphérique à cause du poids de la bille :

$$p = p_{\text{ATM}} + mg/A$$

Quand la bille est déplacée d'une quantité y , le volume intérieur augmente de :

$$dV = yA$$

La pression diminue et force F exercée par le gaz sur la bille devient :

$$dp = F/A$$

Comme $dp < 0$, la force F s'oppose au déplacement y ; c'est donc une force de rappel et on s'attend à voir la bille osciller.

Si les oscillations sont rapides, les variations de p et V sont adiabatiques, car la conduction thermique n'a pas le temps d'agir. Et on suppose aussi que le gaz reste toujours proche de l'équilibre thermodynamique. Cette hypothèse est largement utilisée en aérodynamique et elle est fondée sur le fait que le retour à l'équilibre thermodynamique est très rapide. Ceci permet d'utiliser les équations d'état trouvées à l'équilibre. Donc on a :

$$pV^\gamma = C$$

En différenciant :

$$p\gamma V^{\gamma-1}dV + V^\gamma dp = 0$$

En remplaçant dp et dV , la force F devient :

$$F(y) = -\frac{\gamma p A^2}{V} y$$

Une force opposée à l'élongation de type ressort. La deuxième loi appliquée à la bille donne :

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\gamma p A^2}{V} y = 0$$

ce qui donne directement la fréquence des oscillations :

$$\omega = \left(\frac{\gamma p A^2}{mV} \right)^{1/2}$$

En mesurant la période des oscillations, on peut donc déterminer γ . Rùchhardt obtint des valeurs pour l'air et le CO_2 en bon accord avec les mesures calorimétriques. La difficulté pratique est que la bille empêche le gaz de s'échapper et que le frottement ne soit pas trop fort pour amortir les oscillations.

48.

L'univers forcera un très grand volume V de gaz (beaucoup plus grand que celui de la cavité) à entrer dans la cavité : $V_0 \ll V$. L'énergie du gaz introduit dans la cavité d'une manière adiabatique sera $U = U_0 + P(V - V_0) \approx U_0 + PV = 3k_B NT/2 + PV = 3k_B NT/2 + k_B NT = 5k_B NT/2$. D'où $3k_B NT_X/2 = 5k_B NT/2 \Rightarrow T_X = 5T/3$.

49.

On suppose que $T_1 > T_2$. La variation d'entropie du corps #1 (à la température T_1) et du corps #2 (à la température T_2) est :

$$\Delta S_1 = -\frac{Q}{T_1}$$

$$\Delta S_2 = +\frac{Q}{T_2}$$

L'entropie totale du système des deux corps est :

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -\frac{Q}{T_1} + \frac{Q}{T_2} = Q \left(-\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)$$

Ce système est isolé et la deuxième loi exige que $\Delta S > 0$. L'expression précédente montre que quand $T_1 > T_2$, ce sera le cas uniquement si $Q > 0$, c'est-à-dire si le transfert de chaleur va du corps chaud vers le corps froid.

51.

Quand les deux morceaux de cuivre sont mis en contact, le transfert de chaleur du cuivre chaud vers le cuivre froid va s'opérer jusqu'à ce qu'ils soient à une même température, ici 25 °C puisque les masses sont identiques. La variation élémentaire d'entropie du cuivre chaud #1 (50 °C) est :

$$dS_1 = -mC \frac{dT}{T}$$

et celle du cuivre froid # 2 (0 °C) :

$$dS_2 = +mC \frac{dT}{T}$$

En effet le #1 perd de la chaleur et le #2 en gagne. La variation nette de l'état initial de température T_1 à l'état final de température T_F pour le morceau #1 est :

$$\Delta S_1 = -mC \int_{T_1}^{T_F} \frac{dT}{T} = -mC \ln \left(\frac{T_F}{T_1} \right)$$

et pour le # 2 :

$$\Delta S_2 = +mC \int_{T_2}^{T_F} \frac{dT}{T} = mC \ln \left(\frac{T_F}{T_2} \right)$$

L'entropie du système total {1 + 2} est :

$$\Delta S = -mC \ln \left(\frac{T_F}{T_1} \right) + mC \ln \left(\frac{T_F}{T_2} \right) = mC \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right) > 0$$

Le total est indépendant de la température finale T_F . Le corps #1 perd de l'entropie, le corps #2 gagne de l'entropie mais plus que l'autre n'en perd afin que le total voie une variation positive en accord avec la deuxième loi.

Numériquement :

$$\Delta S = 1 \times 385 \times \ln \left(\frac{323,15}{273,15} \right) = 64,7 \text{ J K}^{-1}$$

52.

Quand de l'eau froide est mise en contact brutal avec de l'eau chaude, la transformation est irréversible. Mais on sait que l'entropie est une variable d'état, on peut

donc utiliser une transformation réversible pour calculer la variation d'entropie du kilogramme d'eau et écrire :

$$\Delta S_{\text{EAU}} = \int_{T_1}^{T_{\text{RES}}} m C_P \frac{dT}{T} = m C_P \ln \left(\frac{T_{\text{RES}}}{T_1} \right) = 4190 \times \ln \left(\frac{373}{273} \right) = 1308 \text{ JK}^{-1}$$

Le réservoir perd la quantité de chaleur égale $m C_P \Delta T$ mais reste à la température T_R . Donc son entropie diminue et sa variation est donc :

$$\Delta S_{\text{RES}} = - \frac{4190 \times (373 - 273)}{373} = -1123 \text{ JK}^{-1}$$

L'entropie de l'ensemble {eau + réservoir} est la somme des deux :

$$\Delta S = \Delta S_{\text{EAU}} + \Delta S_{\text{RES}} = 1308 - 1123 = 185 \text{ JK}^{-1} > 0$$

Comme l'ensemble est isolé, l'entropie totale doit augmenter, ce qui est bien le cas.

Pour chauffer l'eau de 273 K à 373 K sans augmenter l'entropie de l'ensemble, il faudrait faire une transformation réversible : mettre l'eau en contact avec un réservoir dont la température est juste un peu plus grande que celle de l'eau, attendre l'équilibre, réaugmenter un tout petit peu la température du réservoir, attendre, etc. une transformation très lente qui peut être inversée sans difficultés. Dans ces conditions la variation d'entropie du réservoir se calculera exactement comme celle de l'eau et sera égale et opposée à celle de l'eau et donc $\Delta S = 0$.

54.

Comme la chaleur transférée du réservoir au système est $Q = C (T_2 - T_1)$, la variation d'entropie du réservoir qui reste à la température T_2 est :

$$\Delta S_2 = \int \frac{dQ}{T_2} = - \frac{Q}{T_2} = C \frac{T_1 - T_2}{T_2}$$

Si $T_2 > T_1$, le réservoir perd de la chaleur et de l'entropie.

La variation d'entropie du système est :

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C dT}{T} = C \ln \frac{T_2}{T_1}$$

variation d'entropie positive du système si $T_2 > T_1$.

La variation d'entropie totale est la somme des entropies des parties :

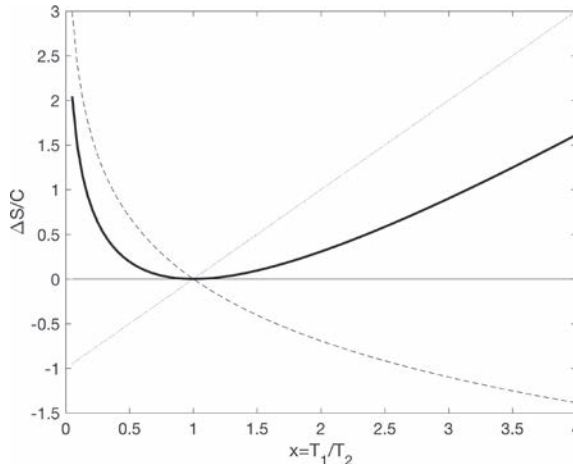
$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C \ln \frac{T_2}{T_1} + C \frac{T_1 - T_2}{T_2}$$

$$\Delta S = C(-\ln x + x - 1) \text{ avec } x = \frac{T_1}{T_2}$$

Si $x < 1$ (réservoir plus chaud), le réservoir perd de l'entropie et le système en gagne.

Si $x > 1$ (réservoir plus froid), le réservoir gagne de l'entropie et le système en perd.

Dans tous les cas, le graphique ci-après permet de vérifier que $\Delta S > 0$.



La courbe en trait épais donne la variation d'entropie totale toujours positive, la courbe en tiretées est la variation d'entropie du système, positive quand le réservoir est plus chaud, et la courbe en traits fins est la variation d'entropie du réservoir, négative quand le réservoir est plus chaud. La variation de S est nulle si $x = 1$ puisque système et réservoir sont déjà en équilibre.

56.

Connaissant la masse, on peut trouver le nombre de moles $n = m/M = 14/28 = 0,5$.

(i) Expansion isotherme réversible.

L'énergie interne est conservée donc la quantité de chaleur échangée est l'opposé du travail fourni lors de l'expansion. Quand le volume double, le système reçoit une quantité de chaleur :

$$Q = nRT \ln 2 = 0,5 \times 8,314 \times 298 \times \ln 2 = 858,6 \text{ J}$$

La variation d'entropie du système causée par cet échange est :

$$\Delta_E S = \frac{Q}{T} = \frac{858,6}{298} = 2,88 \text{ JK}^{-1}$$

Comme la transformation est réversible, on en déduit que la variation d'entropie du système {gaz} est simplement :

$$\Delta S|_{\text{GAZ}} = \Delta_E S = 2,88 \text{ JK}^{-1}$$

La variation d'entropie de l'environnement est $\Delta S_{\text{ENV}} = -\Delta_E S$ puisque l'environnement perd de la chaleur. La variation d'entropie de l'ensemble {gaz + environnement} est $\Delta S = \Delta S_{\text{ENV}} + \Delta S|_{\text{GAZ}} = 0$. L'ensemble étant isolé et la transformation réversible, l'entropie totale ne change pas.

(ii) Expansion isotherme irréversible, l'extérieur étant le vide, $p_{\text{EX}} = 0$.

Si l'extérieur est le vide, c'est la détente de Joule dont il s'agit. Le travail est nul, l'énergie interne ne change pas puisque la transformation est isotherme et il n'y

a donc pas de chaleur transférée d'après la 1^{re} loi. Mais l'entropie est une variable d'état donc l'entropie du système est la même que précédemment puisque les états initiaux et finaux sont identiques.

$$\Delta S|_{\text{GAZ}} = nR \ln 2 = 2,88 \text{ J K}^{-1}$$

Il n'y a pas de chaleur transférée avec l'environnement et donc $\Delta_E S = 0$ et $\Delta S_{\text{ENV}} = 0$. L'entropie du gaz augmente à cause des irréversibilités internes associées à la détente brutale et on peut écrire :

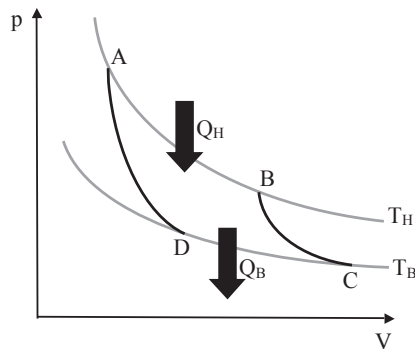
$$\Delta S|_{\text{GAZ}} = \Delta_I S = 2,88 \text{ J K}^{-1} > 0$$

(iii) Expansion adiabatique réversible.

Dans ce cas le système fait un travail sur l'environnement que l'on peut calculer via $W = -pdV$ puisque la transformation est réversible, mais il n'y a aucune chaleur échangée avec l'extérieur. Le système et l'environnement conservent chacun leur entropie et :

$$\Delta S|_{\text{GAZ}} = 0 \text{ et } \Delta S|_{\text{ENV}} = 0$$

60. Le cycle de Carnot



Sur les arcs isothermes, l'énergie interne est constante et donc la chaleur transférée est égale au travail. On reste avec la convention du cours que Q_H et Q_B sont positifs et que l'on compte positivement ce qui est importé et négativement ce qui est exporté. Sur l'arc AB d'expansion :

$$Q_H = nRT_H \ln \frac{V_B}{V_A}$$

Sur l'arc CD de compression :

$$Q_B = -nRT_B \ln \frac{V_D}{V_C}$$

Le signe - car $V_D/V_C < 1$. On va pouvoir maintenant relier V et T , car sur les arcs adiabatiques DA et BC, $TV^{\gamma-1} = \text{constant}$. Ainsi :

$$V_A^{\gamma-1} T_H = V_D^{\gamma-1} T_B$$

$$V_B^{\gamma-1} T_H = V_C^{\gamma-1} T_B$$

En divisant membre à membre ces deux expressions :

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C}$$

En remplaçant V_D/V_C dans l'expression de Q_B :

$$Q_B = nRT_B \ln \frac{V_B}{V_A}$$

et donc :

$$\frac{Q_H}{T_H} = \frac{Q_B}{T_B}$$

Comme $T_H > T_B$, la quantité de chaleur perdue Q_B reste toujours plus grande que la quantité reçue Q_H . Même le meilleur moteur a des pertes importantes. Cette relation est aussi la fondation de la variable entropie par Clausius. Le système importe de la source chaude une entropie Q_H/T_H et exporte une entropie Q_B/T_B . La variation d'entropie du système due aux échanges avec l'extérieur est :

$$\Delta_E S = \frac{Q_H}{T_H} - \frac{Q_B}{T_B} = 0$$

Le moteur fonctionne de façon réversible. Cela veut donc dire que le frottement, les pertes thermiques de toutes natures sont négligées. En l'absence d'irréversibilité interne $\Delta_I S = 0$. On en déduit que la variation totale d'entropie du système est :

$$\Delta S = \Delta_I S + \Delta_E S = \frac{Q_H}{T_H} - \frac{Q_B}{T_B} = 0$$

Puisque l'entropie reprend la même valeur après un cycle fermé, c'est bien une variable d'état.

Reste à calculer le travail fait par l'environnement sur le système sur chacun des arcs du cycle.

$$\text{Arc isotherme AB : } W_{AB} = -nRT_H \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$\text{Arc isotherme CD : } W_{CD} = -nRT_B \ln \frac{V_D}{V_C}$$

Sur l'arc adiabatique BC :

$$W_{BC} = - \int_{V_B}^{V_C} p dV = -C \int_{V_B}^{V_C} V^{-\gamma} dV = \frac{p_C V_C - p_B V_B}{1 - \gamma}$$

Sur l'arc adiabatique DA :

$$W_{DA} = - \int_{V_D}^{V_A} p dV = -C \int_{V_D}^{V_A} V^{-\gamma} dV = \frac{p_A V_A - p_D V_D}{1 - \gamma}$$

La somme sur les deux arcs BC et DA vaut :

$$W_{BC} + W_{DA} = \frac{p_C V_C - p_B V_B + p_A V_A - p_D V_D}{1 - \gamma} = 0$$

Elle est nulle d'après la loi des gaz parfaits car sur l'isotherme T_H $p_A V_A = p_B V_B$ d'une part et sur l'isotherme T_B , $p_C V_C = p_D V_D$. Ceci paraît magique mais il y a une autre façon de voir la chose. Sur les arcs adiabatiques, le travail est égal à la variation d'énergie interne $\Delta U = n C_V \Delta T$. Les travaux sur les arcs BC et DA sont donc égaux et opposés puisqu'associés à des variations ΔT et donc ΔU égales et opposées.

Reste le travail sur les arcs isothermes. Compte tenu de l'égalité des rapports des volumes démontrée plus haut, on a :

$$W_{AB} + W_{CD} = -nRT_H \ln \frac{V_B}{V_A} + nRT_B \ln \frac{V_B}{V_A}$$

Le travail W' fait par le système sur l'environnement se résume à :

$$W' = -(W_{AB} + W_{CD}) = nR(T_H - T_B) \ln \frac{V_B}{V_A}$$

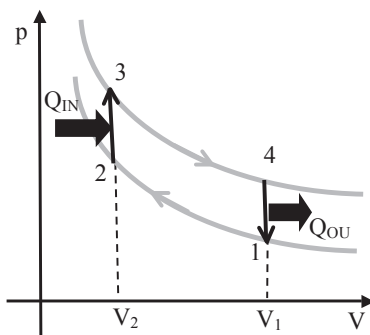
Le travail positif sur l'environnement n'est fait que sur l'arc d'expansion AB. Sur un cycle il faut lui soustraire la part plus faible faite sur le cycle CD. La formule finale montre que le travail net est d'autant plus grand que la différence de température est grande et que le rapport des volumes est grand, ce qui explique la course aux grosses cylindrées...

Le rendement du cycle de Carnot est :

$$\eta_c = \frac{W'}{Q_H} = \frac{nR(T_H - T_B) \ln \frac{V_B}{V_A}}{nRT_H \ln \frac{V_B}{V_A}} = 1 - \frac{T_B}{T_H}$$

ce qui redonne l'expression du cours.

64. Le cycle d'Otto



Sur l'arc adiabatique 1-2 on a :

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

Sur l'arc 2-3, la température et la pression de n moles d'air augmentent à volume constant sous l'effet de la chaleur de combustion du mélange explosif air-essence initiée par l'étincelle de la bougie.

L'arc 3-4 est une détente adiabatique, c'est la phase qui fait le travail du moteur. On a :

$$T_3 V_2^{\gamma-1} = T_4 V_1^{\gamma-1}$$

L'arc 4-1 est une chute de la température et de la pression à volume constant occasionnées par la perte de chaleur. Cela représente l'ouverture de la soupape à la pression atmosphérique extérieure.

Calculons le gain de chaleur sur l'étape 3-2. Comme le travail est nul, on peut le calculer par la variation d'énergie interne :

$$Q_{IN} = nC_V(T_3 - T_2)$$

La perte sur l'étape 4-1 est :

$$Q_{OUT} = nC_V(T_4 - T_1)$$

La première loi indique que :

$$W + Q_{IN} - Q_{OUT} = 0$$

Le rendement est donc :

$$\eta = \frac{W'}{Q_{IN}} = 1 - \frac{Q_{OUT}}{Q_{IN}}$$

Soit en remplaçant Q_{IN} et Q_{OUT} par leurs valeurs :

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

Soustrayons les deux relations adiabatiques ci-dessus reliant les T et les V :

$$(T_3 - T_2)V_2^{\gamma-1} = (T_4 - T_1)V_1^{\gamma-1}$$

Avec le rapport de compression $r = V_1/V_2$, on trouve donc :

$$\eta = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}$$

Le rendement est d'autant meilleur que le rapport de compression est grand. Comme indiqué, il ne peut pas être trop grand car sinon l'explosion se produit spontanément sur l'arc de compression 1-2. Avec une valeur de $r = 9$ et $\gamma = 1,4$ pour l'air, le rendement est de 58 %.

66.

On donne ici la puissance mécanique fournie par le moteur. Connaissant le rendement, on détermine la puissance thermique fournie par la combustion :

$$\eta = \frac{\dot{W}_{OUT}}{\dot{Q}_{IN}} \Rightarrow \dot{Q}_{IN} = \frac{\dot{W}_{OUT}}{\eta} = 9 \times 10^4 \text{ W}$$

Incidentement la quantité de chaleur perdue est donnée par la première loi :

$$\dot{W}_{OUT} + \dot{Q}_{OUT} = \dot{Q}_{IN} \Rightarrow \dot{Q}_{OUT} = (1 - \eta)\dot{Q}_{IN} = 6.3 \times 10^4 \text{ W}$$

En effet sur un cycle moteur, l'énergie interne revient à sa valeur initiale et $\Delta U = 0$.

La combustion de l'essence ayant une enthalpie de combustion $\Delta_C H$, le débit massique (kg s^{-1}) d'essence nécessaire est :

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}_{\text{IN}}}{\Delta_C H} = 2,04 \times 10^{-3} \text{ kg s}^{-1}$$

Le débit volumique D est : $D = \frac{\dot{m}}{\rho} = 2,83 \times 10^{-3} \text{ litre s}^{-1}$

Le volume d'essence pour rouler une heure à 95 km h^{-1} est $V = 10,2$ litres. Le nombre de litres consommés aux 100 km est donc de $10,2 \times 100/95 = 10,7$ litres.

68.

En se référant à la figure 10-15, le travail fait sur le système est $W = 200 \text{ J}$ et $Q_{\text{IN}} = 600 \text{ J}$. La première loi dit que :

$$W = Q_{\text{OUT}} - Q_{\text{IN}} \text{ et donc } Q_{\text{OUT}} = 800 \text{ J}.$$

69.

Le moteur d'un réfrigérateur a une puissance de 200 W . La température du freezer est de 270 K et l'air extérieur est à 300 K .

En se référant à la figure 10-15, la relation entre les quantités de chaleurs et les températures d'un réfrigérateur de Carnot est :

$$\frac{Q_{\text{IN}}}{T_{\text{IN}}} = \frac{Q_{\text{OUT}}}{T_{\text{OUT}}}$$

On en déduit qu'en unités de puissance (la dérivée temporelle est notée par un point) :

$$\frac{\dot{Q}_{\text{IN}}}{\dot{Q}_{\text{OUT}}} = \frac{T_{\text{IN}}}{T_{\text{OUT}}}$$

avec $T_{\text{IN}} = 270 \text{ K}$ et $T_{\text{OUT}} = 300 \text{ K}$. D'autre part W est donné sous forme de puissance soit par unité de temps : $\dot{W} = 200 \text{ W}$. La première loi s'écrit :

$$\dot{W} = \dot{Q}_{\text{OUT}} - \dot{Q}_{\text{IN}}$$

En éliminant Q_{OUT} , on trouve :

$$\dot{Q}_{\text{IN}} = \frac{\dot{W}}{\left(\frac{T_{\text{OUT}}}{T_{\text{IN}}} - 1\right)} = 1800 \text{ W et } \dot{Q}_{\text{OUT}} = 2000 \text{ W}$$

L'énergie qui peut être extraite du freezer en 10 minutes est :

$$Q_{\text{IN}} = \Delta t \dot{Q}_{\text{IN}} = 10 \times 60 \times 1800 = 1,08 \text{ MJ}$$

Notez la grande efficacité du frigidaire : pour seulement 200 W de puissance fournie, on extrait 1800 W , soit un coefficient d'efficacité de 9...

72.

Notons $T_1 = 283,15 \text{ K}$, $T_2 = 293,15 \text{ K}$, Q_1 la chaleur reçue du dehors et Q_2 la chaleur transférée à l'intérieur. Comme sur un cycle $\Delta U = 0$, la première loi indique que :

$$W + Q_1 = Q_2$$

Le rapport des chaleurs transférées dans un cycle de Carnot est :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

On peut donc écrire le rapport d'efficacité comme :

$$\chi = \frac{Q_2}{W} = \frac{T_2}{T_2 - T_1} = 29,3$$

L'électricité joue le rôle du travail W fourni au système. Donc pour chaque joule d'électricité fournie, cette pompe transfère à l'intérieur de la maison une énergie thermique de 29,3 J.

En prenant l'air au dehors, le coefficient d'efficacité tombe à 7,3. Toutes choses égales par ailleurs, la facture d'électricité va être multipliée par 4 donc cela devrait valoir le coup de creuser ce trou.

73.

La capacité calorifique de l'atmosphère est :

$$C_A = M_{\text{ATM}} C_P = 5,3 \times 10^{18} \times 1004 = 5,32 \times 10^{21} \text{ J K}^{-1}$$

La capacité calorifique de l'océan est :

$$C_O = M_{\text{OCE}} C_P = 1,4 \times 10^{21} \times 4200 = 5,88 \times 10^{24} \text{ J K}^{-1}$$

Et donc $C_O/C_A = 1\,105$: la capacité calorifique de l'océan dépasse celle de l'atmosphère d'un facteur 1 000.

En chauffant l'atmosphère avec ce flux solaire moyen pendant un temps τ , le gain de température ΔT sera :

$$C_A \Delta T_A = F_S A \tau$$

Avec $A = 5,1 \times 10^{14} \text{ m}^2$ la surface terrestre et sur un an $\tau = 3,15 \times 10^7 \text{ s}$, on trouve $\Delta T_A = 724 \text{ K}$.

Pour l'océan :

$$C_O \Delta T_O = F_S A_O \tau$$

Avec $A_O = 3,6 \times 10^{14} \text{ m}^2$ la surface océanique, on trouve $\Delta T_O = 0,46 \text{ K}$.

Le rapport des variations $\Delta T_A/\Delta T_O = 1\,573$.

Ce calcul démontre l'immense inertie thermique de l'océan comparée à l'atmosphère... L'océan permet d'amortir efficacement les anomalies thermiques de l'atmosphère.

76.

La luminosité du Soleil est simplement égale au flux d'énergie du corps noir fois la surface de la photosphère :

$$L_0 = \sigma T^4 4\pi r_S^2$$

Avec les valeurs données, on en déduit le flux solaire :

$$F_S = \frac{L_0}{4\pi r_S^2} = 6,4 \times 10^7 \text{ W m}^{-2}$$

et la température d'émission $T \approx 5\,800 \text{ K}$.

77.

Pour trouver la température d'émission de Jupiter, il faut d'abord calculer le flux solaire moyen à la distance moyenne entre Jupiter et le Soleil, soit :

$$S_0 = \frac{L_0}{4\pi r_S^2} \approx 51 \text{ W m}^{-2}$$

L'équilibre entre le flux solaire incident et le flux infrarouge émis donne la température d'émission :

$$T_E = \left(\frac{S_0(1-\alpha)}{4\sigma} \right)^{1/4} = 102 \text{ K}$$

Mais la température observée de 124 K est significativement plus forte. Soit la planète a une source d'énergie interne (comme la Terre), soit elle n'est pas à l'équilibre énergétique. Cette deuxième hypothèse est la plus généralement acceptée, la planète continuant de se refroidir depuis la période d'accrétion initiale.

78.

Quand un rayon solaire incident arrive sur un élément de surface lunaire dA de normale \mathbf{n} , l'énergie courte longueur d'onde reçue par la surface dA par unité de temps est : $S_0(1-\alpha)\cos\theta dA$ avec θ l'angle entre le rayon et la normale. La surface réémet une énergie dans le domaine infrarouge donnée par la loi de Stefan-Boltzmann $\sigma T^4 dA$. À l'équilibre, l'énergie émise est égale à l'énergie reçue et :

$$\sigma T^4 = S_0(1-\alpha)\cos\theta$$

soit :

$$T = \left(\frac{S_0(1-\alpha)}{\sigma} \right)^{1/4} (\cos\theta)^{1/4} = 378,3 \times (\cos\theta)^{1/4}$$

T varie assez peu avec θ sauf quand on arrive près de $\pi/2$. Comme le flux solaire est nul, la température atteint le zéro absolu pour $\theta = \pi/2$. La température maximale de 378 K est obtenue quand le Soleil est au zénith ($\theta = 0$). Cet équilibre n'est pas observé sur la Terre car ses fluides, air et eau, redistribuent efficacement la chaleur horizontalement et verticalement. L'effet instantané serait celui de la convection thermique dans l'air si une température maximale de cet ordre de grandeur était

imposée au sol. Il ne reste sur la Lune que la faible conduction thermique qui n'a pas le temps de redistribuer grand-chose. Notons aussi que la température moyenne d'émission de la Terre est déterminée par le forçage solaire moyen qui est le quart du précédent ($S_0/4$).

79.

Mars est à une distance moyenne du Soleil de $d = 2,28 \times 10^{11}$ m. Connaissant la luminosité L_0 du Soleil, on en déduit le flux solaire moyen reçu par Mars :

$$S_0 = \frac{L_0}{4\pi d^2} = 588 \text{ Wm}^{-2}$$

Avec α l'albédo, l'équilibre du flux solaire incident et du flux infrarouge définit la température d'émission de Mars :

$$4\pi R^2 \sigma T_E^4 = S_0(1 - \alpha)\pi R^2$$

soit :

$$T_E = \left(\frac{S_0(1 - \alpha)}{4\sigma} \right)^{1/4} = 210 \text{ K}$$

Elle est proche de la température observée de Mars. On en déduit qu'elle est arrivée à l'équilibre thermique et que son effet de serre G est faible et son atmosphère doit être peu dense.

$$G = \sigma T_S^4 - \sigma T_E^4 = 30 \text{ Wm}^{-2}$$

Comme le flux solaire net reçu sur Mars est $S_0(1 - \alpha)/4 = 110 \text{ W m}^{-2}$, l'effet de serre G ne représente que 27 % de ce flux solaire net, ce qui est beaucoup moins que sur la Terre.

Notons que cet effet de serre est dû au dioxyde de carbone qui constitue 95 % du volume de l'atmosphère martienne.

La gravité à la surface de Mars est :

$$g = \frac{GM}{R^2} \approx 3,7 \text{ m s}^{-2}$$

La pression au sol p_s est de 6×10^{-3} bars de sorte que la masse d'une colonne d'un m^2 d'atmosphère martienne est :

$$m = \frac{p_s}{g} = 1,6 \times 10^2 \text{ kg m}^{-2}$$

ce n'est que 1,6 % de la masse d'une colonne d'atmosphère terrestre.

Pour calculer le nombre de moles de CO_2 , faisons l'hypothèse que tout est CO_2 , ce qui est vrai à mieux que 5 % près. Il suffit alors de diviser la masse de l'atmosphère par la masse molaire du CO_2 qui est de 44 grammes :

$$n_{\text{CO}_2} = M_{\text{ATM}}/M_{\text{CO}_2}$$

La masse de l'atmosphère est :

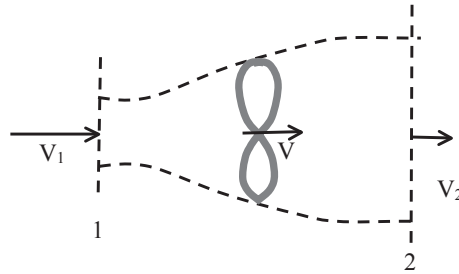
$$M_{\text{ATM}} = 4\pi R^2 m = 2,3 \times 10^{16} \text{ kg}$$

$$n_{\text{CO}_2} = 2,3 \times 10^{16} / 44 \times 10^{-3} = 5,2 \times 10^{17} \text{ moles.}$$

Pour un calcul qui ne néglige plus les constituants mineurs N_2 , Ar , O_2 , voir l'exemple de l'exercice 82.

80.

La limite de Betz des éoliennes : une application du théorème de la quantité de mouvement.



L'écoulement stationnaire a une vitesse V_1 en amont de l'éolienne, une vitesse V sur l'éolienne et une vitesse V_2 en aval de l'éolienne. Pour appliquer le théorème de l'énergie cinétique, on considère le bloc de fluide dont les limites sont en pointillé sur la figure ci-dessus. La section du volume est A_1 en amont, A_2 en aval et A est la surface balayée par l'éolienne. Le théorème de l'énergie cinétique appliquée à ce bloc de fluide demande de calculer le travail de la force exercée par l'éolienne. Trouver la force est une application de la relation 9-11 obtenue en considérant le déplacement du bloc de fluide pendant un temps Δt .

Pendant le temps Δt , la masse Δm qui circule dans le bloc de fluide est constante et donc :

$$(1) \dot{m} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho A_1 V_1 = \rho A V = \rho A_2 V_2$$

Comme l'éolienne freine l'écoulement, le bloc de fluide a une section plus grande en sortie qu'en entrée.

La variation d'énergie cinétique du bloc de fluide par unité de temps est simplement la différence entre ce qui sort en 2 et ce qui entre en 1 :

$$(2) P = \frac{1}{2} \dot{m} (V_2^2 - V_1^2)$$

La relation 9-11 permet de calculer la force R exercée par l'éolienne sur le bloc de fluide comme la variation de quantité de mouvement aux frontières 1 et 2 :

$$(3) R = \dot{m} (V_2 - V_1)$$

La pression n'intervient pas puisque loin de l'éolienne elle reste égale à la pression atmosphérique constante. Le travail de R par unité de temps sur le fluide est donc :

$$(4) P' = R V = \dot{m} (V_2 - V_1) V$$

un travail négatif puisque R est opposée au déplacement.

Le théorème de l'énergie cinétique équilibre le travail P' (4) et la variation d'énergie cinétique P donnée par (2) :

$$\frac{1}{2} \dot{m} (V_2^2 - V_1^2) = \dot{m} (V_2 - V_1) V$$

Ce qui donne la valeur de la vitesse V au niveau de l'éolienne, la moyenne des vitesses amont et aval :

$$V = \frac{1}{2} (V_1 + V_2)$$

La puissance primaire offerte par le vent au niveau de l'éolienne est :

$$P_0 = \frac{1}{2} \rho V_1^3 A$$

et la puissance P'' extraite par l'éolienne est :

$$P'' = -P = \frac{1}{2} \dot{m} (V_1^2 - V_2^2) = \frac{1}{2} \rho A V (V_1^2 - V_2^2)$$

$$P'' = \frac{1}{4} \rho A (V_1 + V_2) (V_1^2 - V_2^2)$$

Le rendement de l'éolienne est le rapport :

$$\eta = \frac{P''}{P_0} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{V_2}{V_1} \right) \left(1 - \frac{V_2^2}{V_1^2} \right)$$

Posons $x = V_2/V_1$ pour étudier la fonction $\eta(x)$:

$$\eta(x) = \frac{1}{2} (1+x)(1-x^2)$$

On peut calculer la dérivée :

$$\eta' = \frac{1}{2} (1 - 2x - 3x^2)$$

La dérivée s'annule pour $x = -1$ et $x = 1/3$. Dans l'intervalle $x > 0$, ceci montre que η a un maximum pour $x = 1/3$ et la valeur du maximum est alors :

$$\eta_{\text{MAX}} = \frac{16}{27} \approx 0,59$$

Ce rendement est la limite de Betz.

82.

La masse de l'atmosphère est $m_{\text{ATM}} = 5,3 \cdot 10^{18}$ kg et la masse molaire équivalente du mélange de gaz qui constitue l'air sec est $M_{\text{AIR}} = 28,97$ grammes. Connaissant les fractions volumiques des gaz, on en déduit leur nombre de moles puis leurs masses :

$$\text{Nombre de moles d'air : } n = m_{\text{ATM}}/M_{\text{AIR}} = 1,83 \times 10^{20}$$

$$\text{Nombre de moles de } N_2 \text{ (} Y_N = 0,78 \text{)} : n_{N_2} = n Y_{N_2} = 1,43 \times 10^{20}$$

$$\text{Nombre de moles de } O_2 \text{ (} Y_{O_2} = 0,21 \text{)} : n_{O_2} = n Y_{O_2} = 3,84 \times 10^{19}$$

$$\text{Masse de } N_2 \text{ (} M_{N_2} = 28 \text{ g/mole)} : m_{N_2} = n_{N_2} M_{N_2} = 4 \times 10^{18} \text{ kg}$$

$$\text{Masse de } O_2 \text{ (} M_{O_2} = 32 \text{ g/mole)} : m_{O_2} = n_{O_2} M_{O_2} = 1,22 \times 10^{18} \text{ kg}$$

La combustion des réserves fossiles sur la période 2000-2013 a consommé en moyenne $9,5 \times 10^{14}$ moles de O_2 par an. En l'absence d'activité photosynthétique dans les océans et dans les forêts, le temps pour faire disparaître l'oxygène de l'atmosphère sera de : $\Delta t = 3,84 \times 10^{19} / 9,5 \times 10^{14} = 40\,421$ années.

À une assez bonne approximation le CO_2 est bien mélangé dans l'atmosphère.

Nombre de moles de CO_2 ($Y_{CO_2} = 4,05 \times 10^{-4}$) : $n_{CO_2} = nY_{CO_2} = 7,41 \times 10^{16}$

Masse de CO_2 ($M_{CO_2} = 44$ g/mole) : $m_{CO_2} = n_{CO_2}M_{CO_2} = 3,26 \times 10^{15}$ kg

Le volcanisme injecte 0,1 GtC par an, soit $0,1 \times (44/12)$ Gt CO_2 . Le temps nécessaire pour arriver à la concentration actuelle avec le seul volcanisme est : $\Delta t = 3,26 \times 10^{15} / 0,36 \times 10^{12} = 9\,055$ années.

83.

On utilise les unités atomiques u beaucoup plus pratiques. Pour le carbone $^{12}_6C$, $Z = 6$, $A = 12$. La masse des nucléons s'écrit :

$$\sum_i m_i = Zm_p + (A - Z)m_n + Zm_e = 12,099 \text{ u}$$

Comme la masse atomique de $^{12}_6C$ est 12 u, le défaut de masse est $\Delta m = \sum m_i - m = 0,099$. L'énergie de cohésion par nucléon est :

$$\Delta E_{BN} = \frac{\Delta E_B}{A} = \frac{\Delta m c^2}{A}$$

soit en électron volt : $0,099 \times 932,5/12 = 7,69$ MeV.

Pour l'uranium naturel $^{238}_{92}U$: $\Delta m = 239,985 - 238,05 = 1,935$

L'énergie de cohésion par nucléon $\Delta E_{BN} = 7,58$ MeV n'est pas très différente de celle du carbone. L'énergie de cohésion totale est $\Delta E_B = 1,8$ GeV.

84.

Si N_K est le nombre d'atomes de potassium aujourd'hui et N_0 leur nombre à la formation, la décroissance radioactive donne :

$$N_K = N_0 e^{-\lambda t}$$

On ne connaît pas N_0 , mais pour chaque atome de potassium qui disparaît un atome d'argon apparaît de sorte que la conservation du nombre d'atomes permet d'écrire :

$$N_K + N_A = N_0$$

En posant $r = N_A/N_K$, on trouve :

$$e^{\lambda t} = 1 + r$$

ce qui donne la durée radioactive :

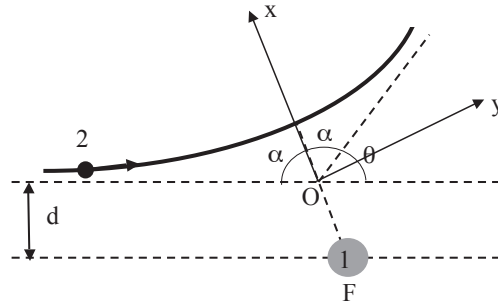
$$t = \frac{1}{\lambda} \ln(1 + r)$$

Mais $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$ de sorte que :

$$t = T_{1/2} \frac{\ln(1+r)}{\ln 2} = 4,37 \times 10^9 \text{ an}$$

l'âge de la Terre... Ce sont ces mesures de décroissance radioactive qui ont définitivement écarté les valeurs beaucoup plus courtes de l'âge de la Terre estimé par Kelvin.

85.



On remet le problème dans le cadre du traitement de l'hyperbole du § 7.4.3.2. Pour cela on trace l'axe x qui passe par le foyer et le sommet de l'hyperbole et l'axe y perpendiculaire. L'origine O est le point d'intersection des asymptotes. Dans ce système d'axes, l'équation cartésienne de l'hyperbole est :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Quand x est grand, y varie comme :

$y = \pm \frac{b}{a} x$ qui est donc l'équation des asymptotes. On voit immédiatement que :

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}$$

La solution du problème demande de déterminer a et b à partir des conditions initiales.

Le moment cinétique total J et l'énergie totale de 1 + 2, E sont donnés au § 7.4.3.2 :

$$J^2 = m_2 k \frac{b^2}{a}$$

$$E = k/2a$$

Ce sont deux quantités conservées au cours du mouvement et on les connaît initialement quand la particule 2 est infiniment loin de 1 (le foyer F) sur l'asymptote de gauche de la figure. J est dominé par le moment cinétique de 2 (le léger) et donc :

$$J = m_2 V d$$

Par ailleurs, l'énergie potentielle en $1/r$ tend vers zéro quand 2 est loin de F. L'énergie cinétique de 1 est négligeable car la cible d'atomes d'or est beaucoup plus massive que les particules qui la bombardent. Ne reste que :

$$E = \frac{1}{2} m_2 V^2$$

En remplaçant on trouve $b = d$ et $a = k/m_2 V^2$. On en déduit l'orientation de l'asymptote sortante :

$$\tan \alpha = \frac{dm_2 V^2}{k} = 4\pi\epsilon_0 \frac{m_2}{q_1 q_2} dV^2$$

Comme $\theta/2 = \pi/2 - \alpha$, on obtient la déviation de la particule 2 :

$$\tan \frac{\theta}{2} = \cot \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{m_2} \frac{1}{dV^2}$$

Si la particule 2 passe loin de l'atome d'or, d est grand et θ faible : la particule n'est pas ou peu déviée. En revanche, si 2 s'approche beaucoup de 1, d tend vers zéro et $\theta/2$ tend vers $\pi/2$ et θ tend donc vers π . Une énorme déviation puisque dans ce cas la branche retour de l'hyperbole est quasi confondue avec sa branche aller. En pratique, on envoie un flux de particules α avec des vitesses V similaires, mais qui ont des distances d variées par rapport à la cible. La cible est composée de feuilles d'or minces pour éviter le problème des collisions multiples. Les signaux récupérés des particules déviées sont à comparer avec une courbe de distribution des déviations. En résumé, les fortes déviations observées par Rutherford ont montré la toute petite taille du noyau par rapport à la taille de l'atome.

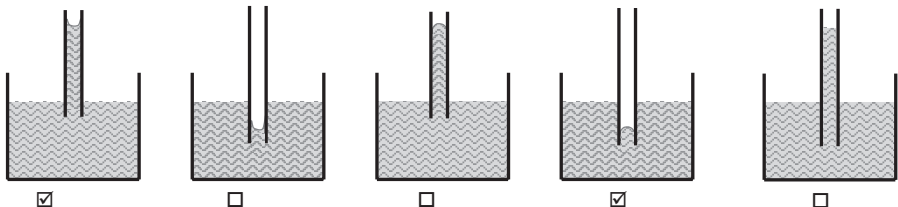
Chapitre 11

Dans les exercices ci-après on prendra les valeurs suivantes :

Tension superficielle de l'eau $\gamma_{\text{EAU}} = 73 \times 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$, $\rho_{\text{EAU}} = 1\,000 \text{ kg m}^{-3}$, accélération de pesanteur $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Questions à choix multiples

R4. Si on plonge un tube capillaire en verre dans un liquide (mouillant ou non), on observe soit une ascension soit une descente du liquide dans le tube. On constate, en outre, que la surface du liquide dans le tube présente soit un ménisque concave soit un ménisque convexe.



Parmi ces figures de tubes capillaires, certaines ne correspondent pas à la réalité. Lesquelles ?

R5. Deux bulles de savon de rayon différent, constituées du même liquide se trouvent au même niveau dans l'air. Lequel des énoncés est correct ?

- ☐ Les pressions dans les 2 bulles sont égales car la pression dans la bulle ne dépend que de la pression atmosphérique.
- ☐ La pression dans la petite bulle est plus grande car le coefficient de la tension superficielle dépend de la taille de la bulle.
- ☒ La pression dans la petite bulle est plus grande puisque son rayon est plus faible.
- ☐ La pression dans la grande bulle est plus grande puisque son rayon est plus grand.
- ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

R6. La différence de pression P entre l'intérieur d'une sphère pleine (de rayon R et de masse volumique ρ) et l'extérieur de la sphère due à la tension superficielle (le coefficient de la tension superficielle est noté par γ) est donnée par la formule de Laplace (g est l'accélération de pesanteur) :

$$P = \frac{2\gamma}{R^3} \square. \quad P = \frac{\gamma}{R} \square. \quad P = \frac{\rho}{R} \square. \quad P = \rho g R \square. \quad P = \frac{\gamma}{R^2} \square. \quad P = g \gamma \rho \square.$$

$$P = \frac{2\gamma}{R} \checkmark. \quad P = \frac{3\gamma}{R} \square. \quad P = \frac{2\gamma}{R^2} \square. \quad P = \frac{\gamma}{gR} \square. \quad P = g \frac{\gamma^2}{2R} \square. \quad P = \gamma g R \square.$$

R7. La montée h de l'eau dans un capillaire de rayon R est décrite par la loi de Jurin. En notant le coefficient de la tension superficielle par γ , la masse volumique de l'eau par ρ , l'angle de contact par θ et l'accélération de pesanteur par g , cochez l'expression correcte de cette loi :

$$h = \frac{2\gamma g}{\rho R^3} \sin \theta \square. \quad h = \frac{\rho \gamma \cos \theta}{2gR^2} \square. \quad h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g R} \checkmark. \quad h = \frac{\rho g^2 R^2}{2\gamma} \cos^2 \theta \square.$$

$$h = \rho \gamma g \sin \theta \sqrt{R} \square. \quad h = \frac{2\gamma g \cos \theta}{2\rho R^2} \square. \quad h = \frac{g \gamma \sin \theta}{3\rho R^2} \square. \quad h = \frac{2\rho \cos \theta}{g \gamma R} \square.$$

R8. Dans quelles unités du Système international se mesure le coefficient de tension superficielle :

$$\square \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \quad \square \text{ m}^{-2} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^2 \quad \square \text{ m}^{-2} \cdot \text{kg} \quad \checkmark \text{ kg s}^{-2}$$

R9. Pour un coefficient de tension superficielle donné, quand le rayon de la goutte double, la pression à l'intérieur d'une goutte d'eau :

- ☐ augmente 2 fois ☐ diminue 3 fois ☐ augmente 3 fois
- ☐ augmente 4 fois ☒ diminue 2 fois ☐ diminue 4 fois

R10. Deux bulles de rayon différent sont reliées, quelle sera leur évolution ?

- ☐ Chacune des bulles existe uniquement parce que le liquide qui forme le film entourant les bulles a une très faible tension superficielle.

- ☒ La surpression dans la petite bulle fait qu'elle va se vider dans la grande bulle.
- ☐ Rien, car les pressions sont égales dans les deux bulles.
- ☐ Les bulles vont éclater.
- ☐ Les quatre propositions sont fausses.

R11. Le coefficient de tension superficielle est défini comme :

- ☐ une force.
- ☒ une force par unité de longueur.
- ☐ une énergie.
- ☐ une énergie par unité de volume.
- ☐ une énergie par unité de longueur.

R12. Lorsqu'on augmente le diamètre d'un capillaire de 2 fois, la montée de l'eau :

- ☐ augmente 2 fois.
- ☐ augmente 4 fois.
- ☐ diminue trois fois.
- ☒ diminue 2 fois.
- ☐ reste constante.

Exercices

1.

La différence de pression Δp entre la pression p_i dans une goutte sphérique pleine et celle du milieu extérieur p_0 : $\Delta p = p_i - p_0 = 2\gamma/R$ où γ est le coefficient de tension superficielle.

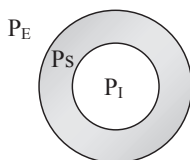
L'unité du coefficient de tension superficielle dans le SI est : N m^{-1} , ou encore J/m^2 .

2.

P_E Pression extérieure

P_S Pression du liquide savonneux

P_I Pression intérieure



$$P_I - P_S = \frac{2\gamma}{r}, \quad P_S - P_E = \frac{2\gamma}{r} \Rightarrow P_I - P_E = \frac{4\gamma}{r}$$

$$P_I = P_E + \frac{4\gamma}{r} = 1,015 \times 10^5 + \frac{4 \times 0,025}{3 \times 10^{-2}} = 1,015 \times 10^5 + 3,33 = 101\,503 \text{ Pa}$$

3.

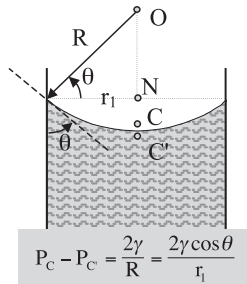
*À une hauteur de h en dessous de l'eau : $P_h = P_{\text{ATM}} + \rho gh$.

Dans la bulle de rayon r_1 , la pression sera

$$\begin{aligned} \text{i) } P_{\text{BULLE}} &= P_h + \frac{2\gamma}{r_1} = P_{\text{atm}} + \rho gh + \frac{2\gamma}{r} = 1,013 \times 10^5 + 1000 \times 9,81 \times 10^{-3} + \frac{2 \times 0,073}{10^{-5}} \\ &= 1,159 \times 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } P_{\text{BULLE}} &= P_{h1} + \frac{2\gamma}{r_1} = P_{\text{atm}} + \rho gh_1 + \frac{2\gamma}{r} = 1,013 \times 10^5 + 1000 \times 9,81 \times 10 + \frac{2 \times 0,073}{10^{-5}} \\ &= 2,140 \times 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

4.



$$\text{(i) } P_B = P_A + \rho gh$$

$$P_C - P_{C'} = \frac{2\gamma \cos \theta}{r}$$

$$P_{C'} - P_A = -\rho gh_1, P_C = P_A = P_{\text{ATM}}$$

$$P_C = P_{C'} + \frac{2\gamma \cos \theta}{r}, P_A = P_C = P_{C'} + \rho gh_1$$

$$\text{d'où } \frac{2\gamma \cos \theta}{r} = \rho gh_1, h_1 = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho gr}$$

(ii) Pour un liquide mouillant parfaitement la surface du verre : $\cos(\theta) = 1$

$$h_1 = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho gr} = 0,03 \text{ m}$$

$$5. \quad h_S = \frac{2\gamma_S}{\rho_S g r},$$

$$\text{(i) } h_{\text{EAU}} = \frac{2\gamma_{\text{EAU}}}{\rho_{\text{EAU}} g r} \Rightarrow \frac{\gamma_{\text{EAU}}}{h_{\text{EAU}} \rho_{\text{EAU}}} = \frac{\gamma_S}{h_S \rho_S} \Rightarrow \gamma_S = \frac{\rho_S}{\rho_{\text{EAU}}} \frac{h_S}{h_{\text{EAU}}} \gamma_{\text{EAU}} = \frac{8}{10} \times \frac{2}{10} \gamma_{\text{EAU}}$$

$$\gamma_S = 0,16 \gamma_{\text{EAU}} = 12 \times 10^{-3} \text{ N/m}$$

$$(ii) h_{EAU} = \frac{2\gamma_{EAU}}{\rho_{EAU}gr} = \frac{4\gamma_{EAU}}{\rho_{EAU}gD} \Rightarrow D = \frac{4\gamma_{EAU}}{\rho_{EAU}gh_{EAU}} = \frac{4 \times 0,073}{1000 \times 0,1 \times 9,81} = 0,30 \text{ mm}$$

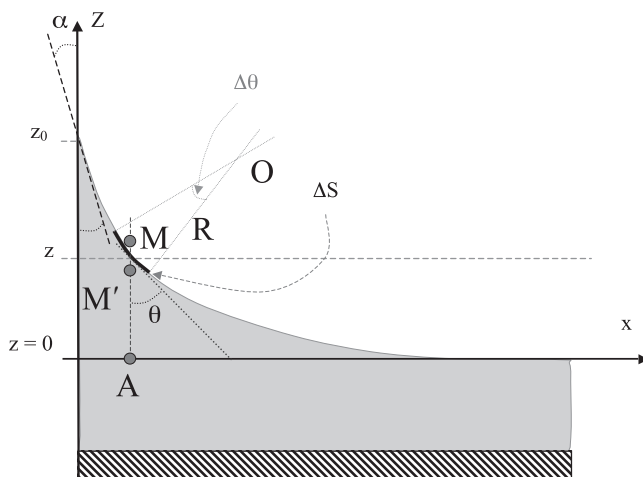
6.

On calcule $h = \frac{4\gamma}{\rho g d}$ et on compare les résultats.

Liquide	h (cm)
Eau de mer	2,97
Diiodométhane	0,63
Glycérine	2,04
Éthanol	1,14

7.

Cet exercice calcule la forme du ménisque près d'une paroi verticale.



On va considérer dans ce qui suit que R est la valeur du rayon de courbure $R > 0$. En référence aux points sur la figure, on a :

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= P_{ATM} = P_{M'} + \rho g z \\ P_0 &= P_M = P_{M'} + \frac{\gamma}{R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho g z = \frac{\gamma}{R}$$

Appelons s l'abscisse curviligne et θ l'angle que le ménisque forme avec le plan vertical du verre. Puisque $R > 0$,

$$R = \left| \frac{ds}{d\theta} \right| = -\frac{1}{\cos\theta} \frac{dz}{d\theta} > 0$$

car $d\theta \downarrow, dz \uparrow$.

On peut donc relier l'angle θ avec z par l'équation différentielle suivante :

$$\rho g z R = - \frac{\rho g z}{\cos \theta} \frac{dz}{d\theta} = \gamma$$

soit :

$$-\int_0^z \rho g z dz = \gamma \int_{\pi/2}^{\theta} \cos \theta d\theta$$

En remarquant que $z = 0 \rightarrow \theta = \pi/2$:

$$[\gamma \sin \theta]_{\pi/2}^{\theta} + \left[\rho g \frac{z^2}{2} \right]_0^z = 0$$

ou

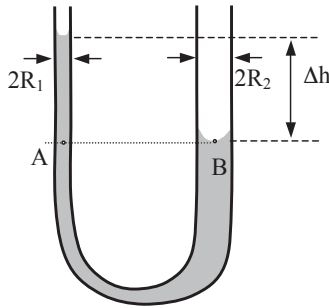
$$z = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho g}} \sqrt{1 - \sin \theta}$$

Cette dernière équation donne la courbe du ménisque $z(\theta)$.

Sur le bord du verre lorsque $z = z_0$, $\theta = \alpha$. Pour un fluide mouillant parfaitement la

surface : $\alpha = 0 \Rightarrow z_0 = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho g}} = 3,8 \text{ mm}$

8.



Calculons la pression aux points A et B (juste en dessous sous la surface de l'eau) :

$$P_A = P_{ATM} + \rho_L g h - \frac{2\gamma}{R_1}, \quad P_B = P_{ATM} + \rho_{AIR} g h - \frac{2\gamma}{R_2}$$

À ce niveau, la pression doit être la même (équilibre hydrostatique).

$$P_A = P_B \Rightarrow P_{ATM} + \rho_L g h - \frac{2\gamma}{R_1} = P_{ATM} + \rho_{AIR} g h - \frac{2\gamma}{R_2}$$

$$(\rho_L - \rho_{AIR}) g h = \frac{2\gamma}{R_1} - \frac{2\gamma}{R_2}$$

$$\Rightarrow h = \frac{2\gamma}{(\rho_L - \rho_{AIR}) g} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \approx \frac{2 \times 0,073}{10^4} \left(\frac{1}{10^{-4}} - \frac{1}{2 \times 10^{-4}} \right) = 0,073 \text{ m} = 7,3 \text{ cm}$$

9.

$$F = P + 2 \times \gamma 4L = P + 8\gamma L = 0,05 \text{ N} + 8 \times 0,073 \times 2,5 \times 10^{-3} \text{ N} \\ = 0,05 \text{ N} + 0,0015 \text{ N} = 0,052 \text{ N}$$

10.

$$[v] = [L][T]^{-1} \quad [\gamma] = [M][T]^{-2} \quad [\rho] = [M][L]^{-3} \quad [\lambda] = [L].$$

$$v = D \gamma^A \rho^B \lambda^C \text{ donne}$$

$$[L][T]^{-1} = [M]^A [T]^{-2A} [M]^B [L]^{-3B} [L]^C$$

$$A + B = 0, -2A = -1, C - 3B = 1, \text{ d'où } A = 1/2, B = -1/2 \text{ et } C = -1/2 \text{ ainsi}$$

$$v = D \sqrt{\frac{\gamma}{\rho \lambda}}$$

Comme v varie comme $\propto \lambda^{-1/2}$, on voit déjà que les ondes capillaires sont des ondes dispersives : chaque harmonique de longueur d'onde λ se propage avec un v particulier et les ondes se dispersent. À la différence des ondes de gravité se sont les courtes qui vont le plus vite.

11.

L'équation aux dimensions pour R : $[R] = [L]$,

$$\text{pour } \rho : [\rho] = [M][L]^{-3}$$

$$\text{pour } \gamma : [\gamma] = [M][T]^{-2}$$

Avec $T = C R^A \rho^B \gamma^D$, on trouve avec la même méthode qu'à l'exercice 10 :

$$B = -D = 1/2 \text{ et } A = 3/2$$

Ainsi : $T = C R^{3/2} \sqrt{\frac{\rho}{\gamma}}$, avec C sans dimension. La théorie donne une valeur de

$$C = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2,22.$$

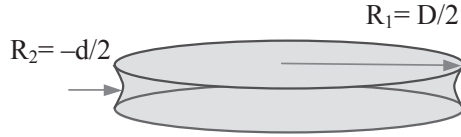
Pour estimer un ordre de grandeur de la période d'oscillations, prenons le cas d'une goutte de rayon $R = 2,5 \text{ mm}$, ceci donne $T = 0,0146 \text{ s}$ et une fréquence $f \sim 68 \text{ Hz}$.

12.

Il s'agit de trouver la force pour séparer le disque de la plaque de verre.



Comme l'angle de contact verre-eau est nul, le rayon du ménisque est juste $d/2$. La pression est plus faible à l'intérieur qu'à l'extérieur et la formule de Laplace-Young s'écrit :



$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$p = p_{\text{ATM}} + \Delta p$$

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{D/2} - \frac{1}{d/2} \right) \approx -\frac{2\gamma}{d} \text{ puisque } D \gg d$$

La pression atmosphérique s'exerce aussi au-dessus de la plaque de verre, de sorte que la force nette pour soulever un disque de rayon D est :

$$F = \frac{\pi D^2}{4} \frac{2\gamma}{d}$$

La force est d'autant plus grande que l'espace entre les plaques est petit vu que la dépression varie comme $1/d$.

A.N. : avec $d = 0,5 \text{ mm}$ et $D = 50 \text{ cm}$, $F = 60,5 \text{ N}$, ce qui est déjà grand.

Deux remarques :

- Soulignons que si $p_{\text{ATM}} \sim \Delta p \approx -\frac{2\gamma}{d}$, alors

$$d < \frac{2\gamma}{p_{\text{ATM}}} = \frac{2 \times 0,073}{10^5} = \frac{2 \times 0,073}{10^5} = 1,46 \times 10^{-6} \text{ m} = 1,46 \mu$$

Donc en dessous de la valeur de $d = 1,46 \mu$, une pression négative apparaît. Lorsqu'une pression négative apparaît dans un liquide, il y a vaporisation, c'est le phénomène de la cavitation.

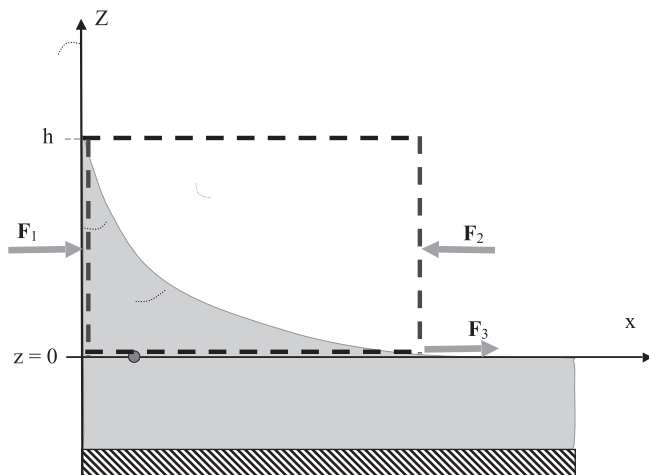
- Lorsqu'une goutte s'écrase entre 2 morceaux de verre, son volume $V = \frac{\pi D^2}{4} d$ reste constant. Plus on appuie les deux plaques de verre l'une contre l'autre, plus la goutte s'étale et donc : $F = V \frac{2\gamma}{d^2}$, c'est-à-dire $F \propto \frac{1}{d^2}$.

Une goutte de diamètre de 5 mm a un volume : $V = \frac{\pi D^3}{6} = 6,555 \times 10^{-8} \text{ m}^3$. Si la distance entre 2 morceaux de verre est d'environ 3 fois la rugosité $0,3 \times 10^{-6} \text{ m}$ alors, la surface de la tache sera $S = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{6,555 \times 10^{-8} \text{ m}^3}{0,3 \times 10^{-6} \text{ m}} = 0,22 \text{ m}^2$ soit $D_1 = 0,53 \text{ m}$, comme dans les données.

La dépression capillaire sera alors $\Delta p = \frac{2\gamma}{d} = \frac{2 \times 0,073}{0,3 \times 10^{-6}} = 486\,667 \text{ Pa} = 4,76 \text{ atm} > 1 \text{ atm}$ et donc la pression dans la goutte sera négative, $-3,76 \text{ atm}$.

13.

La question est la même que pour l'exercice 7, trouver la hauteur h du ménisque au contact eau-verre avec un mouillage total (angle de contact nul). Ici on utilise l'équilibre statique des forces dans la direction x horizontale s'exerçant sur le volume de contrôle en pointillé. La largeur du bac perpendiculaire à la figure est L .



La force \mathbf{F}_1 est exercée par le mur, la force \mathbf{F}_2 est due à la pression atmosphérique et la force \mathbf{F}_3 est la tension de surface exercée par le reste de la surface liquide à droite. Pour calculer F_1 , il faut connaître la pression sur le mur en $x = 0$. En $z = 0$, la pression est atmosphérique (loi de l'hydrostatique sur une surface horizontale) et en z : $p(z) = p_{\text{ATM}} - \rho g z$, une pression plus faible qu'atmosphérique consistante avec la loi de Laplace-Young. Pour trouver la force nette exercée par le mur, il faut calculer :

$$F_{1X} = \int_0^h (p_{\text{ATM}} - \rho g z) L dz = p_{\text{ATM}} L h - \rho g L \frac{h^2}{2}$$

La pression est uniforme pour calculer \mathbf{F}_2 :

$$F_{2X} = -p_{\text{ATM}} L h$$

La force \mathbf{F}_3 est la tension qui s'exerce sur toute la largeur L de la surface et vaut $F_{3X} = +\gamma L$ d'après la définition même de la tension de surface. L'équilibre du bloc pointillé demande :

$$F_{1X} + F_{2X} + F_{3X} = 0 \Rightarrow -\rho g L \frac{h^2}{2} + \gamma L = 0$$

ou :

$$h = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho g}}$$

ce qui redonne le résultat de l'exercice 7.

Chapitre 12

Systèmes sur une droite

Il n'y a qu'une seule variable dépendante et le code matlab **sysdyn1.m** permet d'intégrer ces systèmes numériquement. Le code écrit avec le système de l'exercice 4 peut être facilement adapté aux autres situations.

2.

$$(i) \frac{dx}{dt} = x(1-x) = -\frac{dV}{dx}$$

$$\text{Le potentiel est : } V = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C$$

Il y a deux points fixes $x^* = 0$ et $x^* = 1$. Le tracé de la fonction $V(x)$ montre que $x^* = 1$ est un minimum de V et que $x^* = 0$ est un maximum. On sait que V décroît toujours sur la trajectoire du système dynamique, on en déduit que $x^* = 1$ est stable (attracteur) pour toute condition initiale x_0 sur l'intervalle $]0, +\infty[$. En revanche, $x^* = 0$ est instable pour tout x_0 sur $] -\infty, 1[$. La méthode est globale et fournit les bassins d'attraction des x^* .

On peut aussi étudier la stabilité par la méthode des perturbations en écrivant $x = x^* + \eta$, auquel cas :

$$\frac{d\eta}{dt} = (1 - 2x^*)\eta - \eta^2$$

pour $|\eta| \ll 1$, ceci devient :

$$\frac{d\eta}{dt} = (1 - 2x^*)\eta$$

soit

$$\eta = \eta_0 e^{(1-2x^*)t}$$

La perturbation décroît exponentiellement pour $x^* = 1$ mais croît exponentiellement pour $x^* = 0$. On retrouve les conditions de stabilité précédentes mais pour des perturbations infinitésimales, le voisinage immédiat de x^* . La méthode des petites perturbations est locale et ne donne pas accès aux conditions initiales x_0 loin de x^* . En revanche, elle indique l'échelle de temps d'approche ou de répulsion du point fixe $\tau = 1/|1 - 2x^*|$.

(ii)

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3 = -\frac{dV}{dx}$$

$$V = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C$$

Il y a maintenant 3 points fixes $-1, 0, 1$. Le graphe de $V(x)$ est une courbe symétrique avec deux puits de potentiel en $x^* = -1$ et $x^* = 1$ et un maximum en $x^* = 0$.

Ainsi -1 et $+1$ sont stables alors que l'origine est instable. On en déduit les bassins d'attraction des points stables pour une condition initiale x_0 quelconque :

Bassin d'attraction de $x^* = -1$ est délimité par $x_0 \in]-\infty 0[$

Bassin d'attraction de $x^* = +1$ est délimité par $x_0 \in]0 +\infty[$

3.

(i) Le système s'étudie pour les valeurs positives de N . En posant $x = N/K$, l'équation devient :

$$\frac{1}{r} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{H}{rK}$$

On choisit une nouvelle échelle de temps t' sans dimension $t' = t/\tau$. En insérant dans l'équation précédente :

$$\frac{1}{r\tau} \frac{dx}{dt'} = x(1-x) - \frac{H}{rK}$$

Pour simplifier l'équation, on choisit donc : $\tau = \frac{1}{r}$ et $h = \frac{H}{rK}$ et :

$$\frac{dx}{dt'} = x(1-x) - h$$

(ii) Les points fixes sont solutions de :

$$x^2 - x + h = 0$$

$$\Delta = 1 - 4h$$

Si $h \leq 1/4$, les points fixes sont : $x^\pm = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - h}$

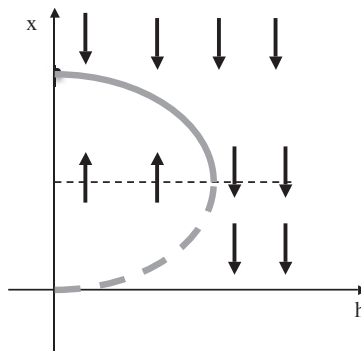
Si $h > 1/4$, il n'y a aucun point fixe.

Le tracé de la courbe $f(x) = x(1-x) - h$ donne directement la stabilité :

$x^+ = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - h}$ est stable et son bassin d'attraction est $x_0 \in]x^- +\infty[$

$x^- = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - h}$ est instable sur $x_0 \in [0 x^+[$

Le diagramme de bifurcation demande de tracer x^+ et x^- en fonction de h :



L'allure du diagramme sur la figure permet de prévoir l'évolution x du stock de poissons en fonction de l'effort de pêche h .

Tant que $h < \frac{1}{4}$ et que le stock initial $x_0 > x^-$, la population évolue vers un stock stable x^+ . Mais si le stock initial est déjà dégradé et que $x_0 < x^-$, la population disparaît.

Quand h augmente vers $\frac{1}{4}$, le stock stable décroît comme $\sqrt{\frac{1}{4} - h}$ mais il y a une bifurcation col pour $h_C = \frac{1}{4}$ et la population disparaît pour $h > h_C$. Un comité des pêches devrait surveiller la pente $\frac{dx^+}{dh} = \frac{-1}{2\sqrt{\frac{1}{4} - h}}$ qui tend vers $-\infty$ quand h tend

vers h_C , pour s'assurer que l'effort de pêche reste toujours en deçà de h_C .

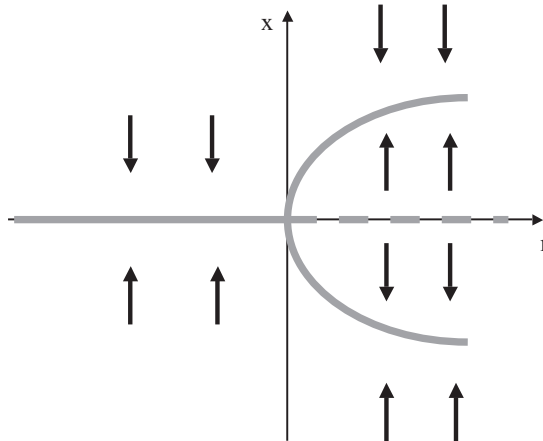
Le même système dynamique explique le *thermohaline shutdown* quand la circulation océanique forcée par les flux de chaleur et les flux d'évaporation précipitation en surface s'écroule complètement. Le paramètre de contrôle équivalent à h est alors le flux d'eau douce (précipitation ou fonte des glaces continentales) dans les régions polaires, sujet traité dans Colin de Verdière, 2020.

4.

(i) La bifurcation supercritique :

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^3$$

L'origine est un point fixe stable pour $r < 0$, instable pour $r > 0$. Quand $r > 0$, il y a deux autres points fixes $-\sqrt{r}$ et $+\sqrt{r}$, tous deux stables. Le diagramme de bifurcation rassemble toutes ces informations en traçant x^* en fonction de r :



Les flèches illustrent le signe de dx/dt et montrent directement le bassin d'attraction des points fixes.

(ii) Pratiquement sans rien faire, on a obtenu une vision globale de l'équation différentielle quand on varie le paramètre r . Trouver la variation temporelle demande d'intégrer cette équation différentielle analytiquement. On obtient certes la solution $x(t)$ quantitativement mais au prix d'un effort certain... Au terme de ce calcul, il faut de toutes façons numériser la solution exacte pour voir comment elle se comporte. Un avantage néanmoins, la solution exacte pourra permettre de tester la précision d'un code numérique sur une équation différentielle non linéaire.

Pour intégrer, on décompose la fraction en éléments simples que l'on sait intégrer :

On écrira par exemple si $r > 0$: $\frac{1}{x(r-x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{\sqrt{r-x}} + \frac{c}{\sqrt{r+x}}$ et on déterminera a, b, c puis on intégrera. Les primitives cherchées sont :

$$r > 0 : \int \frac{dx}{rx - x^3} = \frac{1}{r} \ln \left(\frac{x}{\sqrt{r-x^2}} \right) + C$$

$$r < 0 : \int \frac{dx}{rx - x^3} = \frac{1}{r} \ln \left(\frac{x}{\sqrt{-r+x^2}} \right) + C$$

Le cas $r > 0$

$$\ln \left(\frac{x}{\sqrt{r-x^2}} \right) = Ce^{rt}$$

soit :

$$x = \pm \sqrt{r} \frac{1}{\sqrt{1 + C^{-2}e^{-2rt}}}$$

$$\text{et } C = \frac{x_0}{\sqrt{r-x_0^2}} \text{ si } x(t=0) = x_0$$

La convergence vers les deux points fixes est démontrée. Notez que x ne dépend pas linéairement des conditions initiales x_0 comme ce serait le cas dans un système linéaire. Quand t est grand, un développement limité montre une convergence exponentielle sur l'échelle de temps $1/2 r$:

$$x \approx \pm \sqrt{r} \left(1 - \frac{1}{2} C^{-2} e^{-2rt} \right)$$

Supposons maintenant que x_0 soit proche d'un point fixe, l'expression précédente est alors valable pour tout t puisque $C^{-2} \rightarrow 0$ quand $x_0^2 \rightarrow r$.

Le cas $r < 0$

$$\frac{x}{\sqrt{-r+x^2}} = Ce^{rt}$$

soit :

$$x = \pm \sqrt{-r} \frac{1}{\sqrt{C^{-2}e^{-2rt} - 1}}$$

$$\text{et } C = \frac{x_0}{\sqrt{-r+x_0^2}} \text{ si } x(t=0) = x_0$$

Le terme au dénominateur de la solution x croît exponentiellement et x tend donc vers 0 exponentiellement comme $x \approx \pm \sqrt{-r} C e^{rt}$ pour toutes les conditions initiales C . Notez que le dénominateur de l'expression pour x n'est jamais nul à temps fini et donc la solution se comporte bien, ce qui n'est pas le cas pour $r = 0$.

(iii) **Le cas $r = 0$** demande d'intégrer $\frac{dx}{dt} = -x^3$ avec la condition initiale $x = x_0$ à $t = 0$. On trouve :

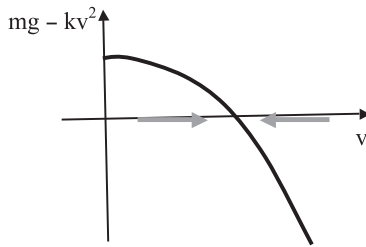
$x^2 = \frac{x_0^2}{(1 - 2x_0^2 t)}$ une solution qui explose et donc cesse d'exister au bout d'un temps fini $t = \frac{1}{2x_0^2}$ mais ce temps est d'autant plus long que x_0 est proche de 0...

5.

La 2^e loi de Newton pour le *skydiver* est :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \quad (1)$$

(i) Le diagramme de phase est le suivant :



On voit immédiatement que le point fixe $v^* = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ est un point fixe stable, la vitesse limite dans le langage mécanique. Si la vitesse (verticale) initiale est nulle à $t = 0$, elle croît pour atteindre v^* et reste là. La chute se poursuit comme $y \propto v^* t$.

(ii) Pour utiliser les données de la chute et déterminer k , il faut résoudre aussi la partie transitoire. Pour rappel $k = \rho_{\text{AIR}} C_D A / 2$ avec C_D un coefficient de traînée sans dimension et A la surface exposée à l'écoulement. C'est commode pour les calculs d'adimensionnaliser l'équation (1), car cela donne la solution pour toutes les valeurs des paramètres externes. Divisons par mg :

$$\frac{1}{g} \frac{dv}{dt} = 1 - \frac{k}{mg} v^2$$

On définit maintenant la vitesse adimensionnelle par $v' = v/v^*$ pour obtenir :

$$\frac{v^*}{g} \frac{dv'}{dt} = 1 - v'^2$$

Et maintenant on introduit un temps adimensionnel par $t' = t/\tau$. En introduisant t' :

$$\frac{v^*}{g\tau} \frac{dv'}{dt'} = 1 - v'^2$$

avec le choix évident de l'échelle de temps $\tau = v^*/g$ qui donne une équation très simple :

$$\frac{dv'}{dt'} = 1 - v'^2 \quad (2)$$

La tradition à ce point est de laisser tomber les primes ' qui ont joué leur rôle. L'intégration de (2) demande de calculer la primitive :

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{1 - v^2} = t$$

qui n'est autre que $\tanh^{-1}(v)$, la fonction inverse de \tanh .

donc :

$$\tanh^{-1}(v) = t + C$$

soit :

$$v = \tanh(t + C) \quad \text{et} \quad C = \tanh^{-1}(v_0) = 0 \quad \text{si} \quad v_0 = 0$$

Notez que l'on retrouve que v tend vers 1 quand t tends vers $l'\infty$.

Pour avoir le déplacement (axe y vers le bas) :

$$y = y_0 + \int_0^t \tanh(t) dt$$

Comme $\tanh = \sinh/\cosh$, le changement de variable $u = \cosh(t)$ donne :

$$\int_0^t \tanh(t) dt = \int_0^u \frac{du}{u} = \ln[\cosh(t)]$$

et

$$y - y_0 = \ln[\cosh(t)]$$

Cette écriture adimensionnelle devient dimensionnelle en multipliant des deux côtés par l'échelle de longueur $v^*\tau$ et en notant que $t' = t/\tau$:

$$y - y_0 = v^*\tau \ln\left[\cosh\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

avec

$$\tau = \frac{v^*}{g} = \left(\frac{m}{gk}\right)^{1/2}$$

$$v^*\tau = \frac{v^{*2}}{g} = \frac{m}{k}$$

et donc :

$$y - y_0 = \frac{m}{k} \ln\left[\cosh\left(t\left(\frac{gk}{m}\right)^{1/2}\right)\right]$$

formule dans laquelle y et t sont maintenant dimensionnels.

La distance de chute $\Delta L = 9\,570 - 640 = 8\,930$ m est obtenue après $t_1 = 116$ sec avec $m = 120$ kg. Comment trouver k ?

L'équation qui gouverne k est :

$$e^{k \frac{\Delta L}{m}} = \cosh \left(t_1 \left(\frac{gk}{m} \right)^{1/2} \right)$$

$$e^{74,4k} = \cosh[116 \times (0,082k)^{1/2}]$$

Le plus simple est d'évaluer les deux côtés pour trouver le point d'égalité de ces deux fonctions. On trouve un point d'intersection pour $k = 0,18 \text{ kg m}^{-1}$. Comme $k = \rho_{\text{AIR}} C_D A / 2$, on peut évaluer le coefficient de traînée C_D . Avec une surface estimée $A = 1,8 \times 0,7 \text{ m}^2$, $\rho_{\text{AIR}} = 0,7 \text{ kg m}^{-3}$ (car la densité de l'air décroît fortement avec l'altitude), on trouve $C_D = 0,4$.

Connaissant k , on trouve $v^* = 81 \text{ m s}^{-1}$. L'échelle de temps qui gouverne la partie transitoire $\tau = v^*/g = 8,2$ sec : la vitesse atteint 76 % [= $\tanh(1)$] de la vitesse limite pour $t = \tau = 8,2$ sec et 96 % [= $\tanh(2)$] pour $t = 2\tau = 16,4$ sec. Au bout d'une vingtaine de secondes, le *skydiver* n'a plus d'accélération.

Système périodique sur le cercle

7.

Le système dynamique sur le cercle est $\frac{d\theta}{dt} = \omega - a \sin \theta$

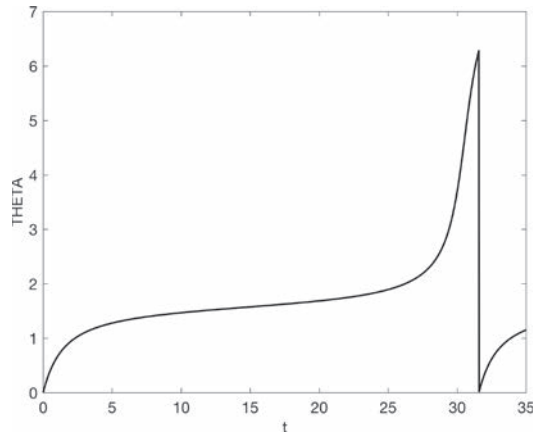
θ est la position d'un point sur un cercle mesurée par l'angle. Si $a = 0$, on obtient un oscillateur uniforme. Il faut tracer la courbe $d\theta/dt$ en fonction de θ pour comprendre ce qui se passe.

$a < \omega$: comme d/dt ne s'annule jamais, il n'y a pas de point fixe. Le système oscille mais de façon non uniforme. Le passage se fait rapidement en $\theta = \pi/2$ puis plus lentement autour de $\theta = -\pi/2$.

$a = \omega$: il y a un point fixe instable en $\theta = \pi/2$.

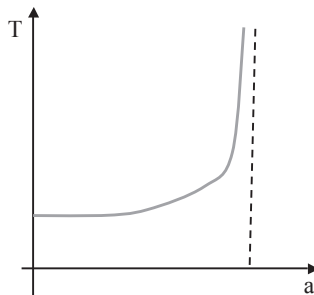
$a > \omega$: il ya deux points fixes solutions de : $\sin \theta^* = \frac{\omega}{a}$. L'examen de la courbe ou la dérivée $f'(\theta^*) = -a \cos \theta^*$ donne la stabilité : l'un est stable, l'autre est instable.

Lorsque a est juste en dessous de ω , le système devient un oscillateur non uniforme. Il reste longtemps au voisinage de $\pi/2$ (car il y a un fantôme de point fixe pas loin) puis varie très vite ailleurs. La figure ci-dessous a été réalisée pour $\omega = 1$ et $a = 0,98$.



On peut chercher la période de l'oscillation qui est donnée par :

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\omega - a \sin \theta} = \frac{2\pi}{(\omega^2 - a^2)^{1/2}}$$



La période croît avec a et tend vers ∞ quand a tend vers ω . Au voisinage de $a = \omega$, on peut simplifier l'expression de T :

$$(\omega^2 - a^2)^{1/2} \approx \sqrt{2\omega} \sqrt{\omega - a}$$

soit :

$$T = \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\omega}} \right) \frac{1}{(\omega - a)^{1/2}}$$

Le système possède une bifurcation de période infinie pour $a_C = \omega$ et la période au voisinage de cette bifurcation varie donc comme $T \propto (a_C - a)^{-1/2}$. Ce comportement est générique des bifurcations à période infinie. En fait la période T est dominée par le temps passé au voisinage de $\theta = \pi/2$ dans une sorte de goulot de bouteille où la transition est très lente et le système initial devient parabolique dans cette région, de la forme $\frac{dx}{dt} = r + x^2$, une bifurcation générique nœud-col. Vous pouvez vérifier ce comportement de la période T avec le code `sysdyncircle.m`.

Système dynamique dans le plan

Le code matlab **sysdyn2.m** permet d'intégrer ces systèmes numériquement et de visualiser le portrait de phases en choisissant une famille de conditions initiales.

11.

En posant $v = dx/dt$, on ramène l'équation différentielle du second ordre à celle d'un système du premier ordre à deux dimensions :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\lambda}{m}v - \frac{k}{m}x\end{aligned}$$

Quand $\lambda = 0$ on sait que le système oscille avec $\omega^2 = k/m$. Posons aussi $\mu = \lambda/m$ pour réécrire le système oscillant amorti sous la forme générique :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\mu v - \omega^2 x\end{aligned}$$

Le point fixe est l'état de repos $x^* = 0$ et $v^* = 0$. L'étude des petites perturbations autour de ce point fixe est gouvernée par :

$$\begin{aligned}\frac{d\delta x}{dt} &= \delta v \\ \frac{d\delta v}{dt} &= -\mu\delta v - \omega^2\delta x\end{aligned}$$

La matrice A s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

Recherche des valeurs propres α par le polynôme caractéristique :

$$\alpha^2 + \mu\alpha + \omega^2 = 0$$

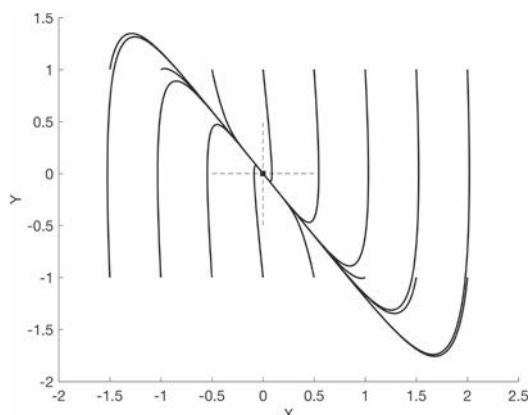
$$\Delta = \mu^2 \left(1 - 4 \frac{\omega^2}{\mu^2} \right)$$

$$\Delta > 0 : \alpha^{\pm} = -\frac{\mu}{2} \left(1 \pm \left(1 - 4 \frac{\omega^2}{\mu^2} \right)^{1/2} \right)$$

$$\Delta = 0 : \alpha = -\frac{\mu}{2}$$

$$\Delta < 0 : \alpha^{\pm} = -\frac{\mu}{2} \left(1 \pm i \left(4 \frac{\omega^2}{\mu^2} - 1 \right)^{1/2} \right)$$

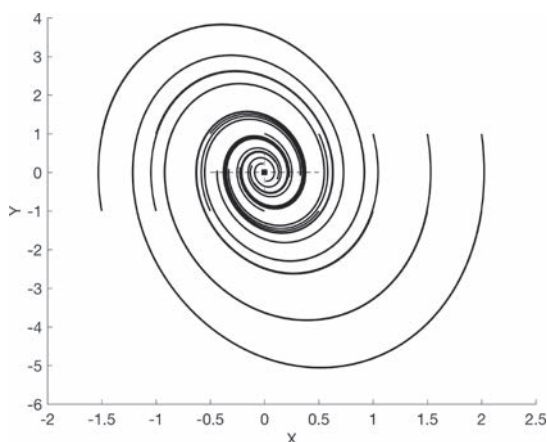
Quand $\Delta > 0$, les valeurs propres sont réelles et toutes deux négatives. Le point fixe est attractif, un nœud dans le langage des systèmes dynamiques. Physiquement le système s'approche du repos sans osciller car le frottement est trop fort. C'est le cas de la figure ci-dessous construite pour $\omega = \pi$ et $\mu = 3\omega$. On parle de régime supercritique.



La solution s'approche d'abord d'une direction privilégiée qui est celle d'un des vecteurs propres de A . Ensuite elle se déplace sur cette direction jusqu'au point fixe.

Quand $\Delta = 0$, il n'y a plus qu'une valeur propre et donc plus qu'un vecteur propre. Les solutions convergent vers le point fixe selon une seule direction. Le nœud est dit dégénéré.

Quand $\Delta > 0$, valeurs propres et vecteurs propres sont complexes. C'est le régime des oscillations amorties ou encore sous-critique et le portrait de phase correspond à des spirales stables.



La figure est tracée pour $\omega = \pi$ et $\mu = 1$. Notez que les spirales ne se coupent jamais et convergent vers l'origine.

Quand $\mu = 0$, on retrouvera le portrait de phase de l'oscillateur harmonique avec des ellipses centrées autour de l'origine.

13.

On voit que si x est petit, la force $\propto x$ éloigne la particule de l'origine. Mais heureusement, quand x est grand, le terme en $-x^3$ domine et ramène la particule vers les faibles valeurs de x . On s'attend donc à des oscillations. La nouveauté ici est que l'équation différentielle est non linéaire. On peut réécrire l'équation différentielle du second ordre comme un système dynamique du plan :

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = x - x^3$$

Il y a trois points fixes $(x^*, y^*) = (0, 0), (-1, 0)$ et $(1, 0)$. Leur stabilité demande d'étudier la matrice jacobienne en (x^*, y^*) :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $(0, 0)$, les valeurs propres sont -1 et 1 . Il y a donc une direction stable et l'autre instable, c'est un col. Pour les deux autres points fixes, J est le même et les valeurs propres sont $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$. Ce sont des oscillations et les points fixes sont donc entourés d'oscillations stables.

Il y a effectivement une conservation d'énergie car :

$$y \frac{dy}{dt} = (x - x^3)y = (x - x^3) \frac{dx}{dt}$$

soit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) = 0$$

soit :

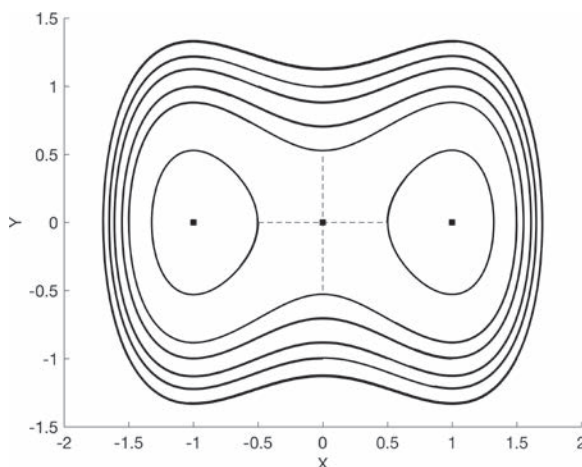
$$E = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} = \text{constant}$$

On voit tout de suite que l'énergie cinétique est le terme en $\frac{y^2}{2}$ et que l'énergie potentielle $U(x)$ est :

$$U(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C$$

et on peut recalculer la force via $F = -dU/dx$. U a donc deux minima en -1 et 1 et un maxima en x en $x = 0$. On s'attend à voir des oscillations stables autour des

2 minima, mais la nouveauté est la possibilité est d'avoir des oscillations qui franchissent le col en $x = 0$ si l'énergie est suffisante, ce qu'illustre le portrait de phases ci-dessous :



Les trajectoires sont des courbes fermées puisque l'énergie est conservée. Ce système dynamique correspond au mouvement d'une bille dans un double puits de potentiel. Quand l'énergie est faible, elle oscille dans l'un ou l'autre puits. Quand l'énergie est forte, la bille peut passer d'un puits à l'autre en passant au-dessus du col qui les sépare. Il existe encore une trajectoire passant par l'origine en forme de nœud papillon (non représentée). Il faut initialiser le système au voisinage de l'origine sur l'une ou l'autre des directions propres pour la trouver.

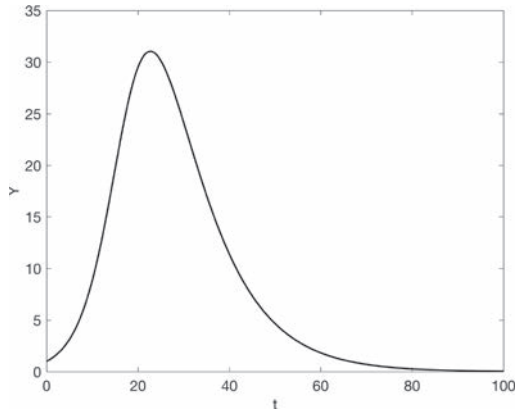
15.

Il faut noter que les variables z et w n'apparaissent pas dans les équations gouvernant x et y : le système dynamique évolue dans le plan xy . Connaissant x et y , on peut toujours calculer z et w puisque la somme des vivants, des malades, des guéris et des morts $x + y + z + w = \text{constante}$. Ici la seule condition pour l'état stationnaire est la condition $y = 0$ quand il n'y a plus de malades, mais on ne sait pas ce que sera x à t grand. Ici t sera le temps en jours. Supposons que la population de biens portants soit x_0 à $t = 0$, l'équation pour y est :

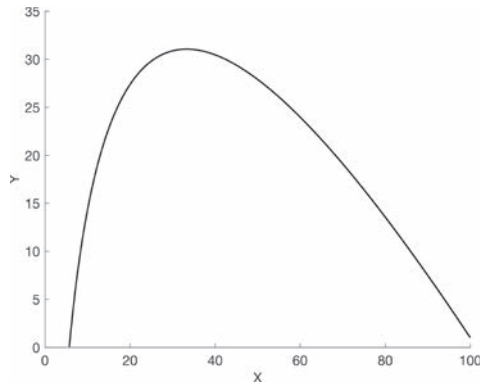
$$\frac{dy}{dt} = (\beta + \sigma)(R_0 - 1)y$$

L'épidémie ne démarre que si $R_0 > 1$. Et il faut évidemment que y_0 soit différent de 0 (il faut au moins un malade). Notez aussi que y et donc l'épidémie atteint son maximum si $kx = (\beta + \sigma)$.

Le système dynamique a été intégré avec $k = 3,48 \times 10^{-3}$, $\beta + \sigma = 0,116$ et $y_0 = 1$ à $t = 0$ avec les résultats suivants :



On reconnaît la courbe classique en cloche d'une épidémie avec un maximum de 30 infectés qui arrive vers 25 jours. L'épidémie se termine au bout de 2 mois. La forme temporelle est à peu près ce qui a été observé pour la première vague en France du Covid-19 entre le 10 mars 2020 et le 30 juin 2020. Le portrait de phase est le suivant :



x décroît tout le temps quand y commence par augmenter, passe par un maximum, puis diminue vers 0. On n'a illustré qu'une trajectoire car en variant y_0 , les courbes sont toutes décalées par translation vers le haut. Ce portrait de phase peut se retrouver analytiquement. En effet :

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = -1 + \frac{\beta + \sigma}{kx}$$

soit :

$$y - y_0 = \int_{x_0}^x \left(-1 + \frac{\beta + \sigma}{kx} \right) dx$$

En posant $\gamma = (\beta + \sigma) / k$

$$y - y_0 = -(x - x_0) + \gamma \ln \left(\frac{x}{x_0} \right)$$

Au début y varie comme $\propto -x$ puis quand x s'écarte de x_0 , la courbe est dominée par le log. La courbe présente bien un maximum en $x = \gamma$ et la valeur du maximum est :

$$y_{\text{MAX}} = x_0 + y_0 + \gamma \left(\ln \left(\frac{\gamma}{x_0} \right) - 1 \right)$$

La formule fournit aussi une manière de calculer la population épargnée x_{FIN} quand $y = 0$:

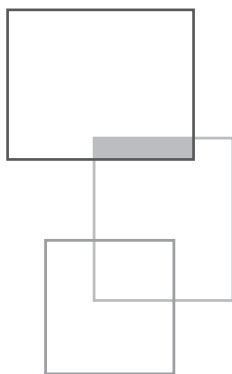
$$x_{\text{FIN}} - x_0 = y_0 + \gamma \ln \left(\frac{x_{\text{FIN}}}{x_0} \right)$$

et

$$z_{\text{FIN}} + w_{\text{FIN}} = x_0 + y_0 - x_{\text{FIN}}$$

Ici $\gamma = 0,116/3,48 \times 10^{-3} = 33$. Les taux de guérison et de mortalité $\beta = 0,1$ et $\sigma = 0,016$ donnent les populations des guéris (82) et des décédés (13). Seules 5 personnes n'ont rien eu. Ces dernières relations peuvent servir à optimiser le choix des paramètres du modèle pour fitter les observations.

Le code matlab **sysdyn3.m** qui intègre le système de Lorenz pourra être adapté pour les systèmes d'ordre 3.



Index général tomes 1 et 2

A

absorption · II-490, II-557–558

accélération

- angulaire · I-60
- cartésienne · I-51
- centripète · I-56–58
- chute libre · I-52–54
- dans un fluide · II-429, II-436, II-456, II-473
- intrinsèque · I-56

accéléromètre · I-208, I-210

acoustique · II-459–462, II-541

action et réaction (principe) · I-90–91, I-186–187, I-239

addition de vecteurs

- par composantes · I-23

adiabatique (processus) · II-490

aérodynamique · II-583–585

aile · II-438–442

analyse dimensionnelle · I-106, I-128, II-452, II-673–674

Archimède (force d') · I-42, II-425–427

atmosphère · I-258–259, I-280, II-424–426, II-449, II-557–564, II-579, II-599–601

atomes · I-8, I-93–94, I-126, I-159, I-202, II-484–485, II-494, II-514–518, II-576–579

attracteur étrange · II-679–685

Avogadro (nombre) · I-279, II-705

axe de rotation · I-61, I-151, I-202–206, I-215–218, I-260–261, II-399–400, II-407

azote · II-492, II-495

B

bar · II-420

barrage hydraulique · II-593–595

baromètre · II-424–425

bassin d'attraction · II-663

Bernoulli (relation de) · II-433–435

bifurcations

- fourche supercritique · II-669
- de Hopf · II-675

- nœud-col · II-666–667
- transcritique · II-668
- biomasse · II-585, II-596
- Boltzmann · I-137, I-279, II-538–540, II-705

C

- calorie · II-490–491
- capacité thermique · II-490–491
- capillarité · II-629
- Carnot · I-137, II-527–535
- causalité (principe de) · I-13
- Cavendish (expérience) · I-256–258
- centrale
 - hydraulique · II-585, II-593–595
 - marémotrice · II-596
 - nucléaire · II-586–589
 - OTEC · II-590–591
 - solaire · II-597
 - thermique · II-585–586, II-588–590
- centre de masse (gravité) · I-156–157, I-185–189, I-198–201, I-206–207, I-246, II-503
- centripète (voir accélération) · I-56–58
- chaleur (transfert de)
 - définition · II-490
 - spécifique · I-280–281, II-491, II-506–507, II-513, II-517, II-706–707
 - latente de fusion · I-281
 - latente de vaporisation · I-280
- changement de phase
 - congélation · II-492
 - liquéfaction · II-504
- changement de référentiel · I-63–66, II-400
- chaos · II-679–690
- chaudière · II-586–588
- chiffres significatifs · I-15, II-711
- chocs (voir collisions)
- chute libre · I-10, I-52–54, I-99, I-124–125, I-246, I-255, I-258, II-407–408

- cinématique · I-48–51
- cisaillement · I-163–164, II-414, II-416–417, II-422
- Clausius · II-526
- climat · II-557–565, II-600–601
- coefficient
 - de compressibilité · I-162, II-432
 - de conductivité thermique · II-506
 - de frottement
 - cinétique · I-93–95, I-134–135
 - statique · I-93–95, I-134–135
 - de Poisson · I-161–162
- collisions
 - élastiques · I-190–193
 - non élastiques · I-192
- composantes d'un vecteur · I-21
- compression · I-159–165
- condenseur · II-586–587
- conditions initiales · I-4, I-10–11, I-92, I-105, I-202–203, II-657–658, II-683–684
- conduction thermique · II-505–509
- coniques
 - ellipse · I-251–255
 - hyperbole · I-251–255
 - parabole · I-53–54, I-251–255, II-667, II-686, II-689
- conservation
 - énergie · I-124–125, I-135–137, I-205, II-501–503
 - moment cinétique · I-197–198, I-215–216, I-248
 - quantité de mouvement · I-91, I-189–195
- consommation mondiale
 - électricité · II-585, II-598–599
 - énergies fossiles · II-585
- constante
 - Boltzmann · I-279, II-495, II-516
 - gaz parfait · I-279, II-495
 - gravitation universelle · I-256–258, I-279
 - Planck · I-279
 - solaire · I-280, II-556

continuité (équation) · II-457, II-460,
 II-593, II-731, II-735, II-740
 contrainte · I-160–161, I-163–164,
 II-680
 convection thermique · II-450,
 II-511–512, II-597
 conversion
 – d'énergie · II-585
 – d'unités · I-16
 coordonnées
 – cartésiennes · I-21, I-43, I-57,
 I-60, I-62, I-251, I-307
 – polaires · I-61–62, I-248–254
 Copernic · I-86, I-235–236
 Coriolis (force de) · I-25, II-400,
 II-404–407
 corps
 – noir (radiation) · II-555–557
 – rigides · I-149–150, I-203–207,
 II-416
 couche limite · II-430, II-435,
 II-438–439
 Couette (écoulement) · II-443–444
 couple de forces · I-154–155
 croûte terrestre · I-259, I-263, II-415,
 II-511
 cycle
 – fréquence · I-102–103
 – limite · II-675–679
 – moteur thermique · II-527–531

D

décibel · II-462
 déduction (induction) · I-7
 déformation · I-92, I-94, I-104,
 I-159–161, I-164–165, I-191,
 II-417, II-429
 dégradation de l'énergie · II-544–546
 degré de liberté · II-517, II-658
 densité · I-14, I-258–259, I-263,
 I-280–281, II-431–432,
 II-459–460

déplacement
 – circulaire · I-54–57, I-59
 – rectiligne · I-46–48
 – vectoriel · I-49–51
 dérivées · I-27–28
 détente de Joule · II-512, II-519
 deutérium · II-577, II-580
 différentielle · I-28–30, I-32,
 II-547–548
 diffusion
 – thermique · II-606–607,
 II-615–616, II-679
 – viscosité · II-505–509
 dioxyde de carbone · II-557, II-566,
 II-600
 dispersion (des ondes) · II-466–468
 distance · I-12–13, I-22, I-50–51,
 I-62
 droite d'action · I-150–152

E

eau
 – douce · II-510
 – peu profonde · II-458
 – profonde · II-462–465
 – salée · II-511
 échelles (voir *scaling*)
 écoulement
 – atmosphérique · II-446–449
 – Couette · II-443
 – laminaire · II-435
 – Poiseuille-Hagen · II-445
 – turbulent · II-449–454
 effets
 – gyroscopique · I-216–218
 – Marangoni · II-647
 – de serre · II-560
 électron · I-279, II-577–578, II-705
 électron-volt · II-578
 élongation · I-104, I-131, I-150,
 I-159–162, I-164
 émission · II-557–561

énergie

- cinétique · I-120–125, I-127–128, I-131–132, I-134–137
- de cohésion nucléaire · II-579–580
- de surface · II-635–637
- du vivant · II-566–568
- électrique · II-572–575
- interne et première loi · II-582–503
- libre de Gibbs · II-552–553
- libre de Helmholtz · II-549–550
- mécanique · I-124–125, I-131, I-133–137, I-199–201, I-220, I-223, II-551–595, II-673
- moléculaire · I-136–137, II-515–516
- nucléaire · II-576–582
- potentielle · I-124–126, I-128, I-131–134, I-200–201, I-242–246, I-249–250, II-434, II-585, II-593–594
 - élastique · I-131–133
- primaire · II-583–585, II-599
- radiative · II-555–556, II-585
- thermique des mers · II-590

enthalpie · II-503–504, II-554–555

entropie

- changement d' · II-519–522, II-525–527
- définition macroscopique · I-126, I-134–136, II-534
- et deuxième loi · II-522, II-525
- statistique · II-537–541

éoliennes · II-585, II-591

équation de Laplace · II-464

équations d'état

- eau de mer · II-511
- eau pure · II-510
- gaz parfait · II-493–495
- van der Waals · II-498–501

équations de systèmes dynamiques

- logistique · II-665, II-686–689
- Lorenz · II-679–683
- Van der Pol · II-676–677

équations du mouvement · I-87, I-186–187

équilibre

- conditions d' · I-157–158
- instable · I-149, I-170
- mécanique · I-132–133
- stable · I-149, I-328, II-659
- statique · II-638, II-644, II-778
- thermodynamique · II-485, II-561–562

espace des phases · I-107, II-658–662, II-673–675

expansion d'un gaz · II-512

expériences (de)

- Cavendish · I-256–258
- Faraday · II-574
- Foucault · I-216, II-408–410
- Galilée · I-46–47, I-84–85, I-213–214, II-518
- Joule · I-121, II-512–513, II-521–522
- Newton · I-83, I-85–89, I-186–189, I-226, I-235–267
- Pascal · I-2, I-7, II-424
- Rutherford · II-576

extensive (variable) · II-486

extremum (principes d') · II-554

F

fermé (système) · II-485

fission nucléaire · II-581–582

flèche du temps · I-3, I-13, II-518–519

fluide

- compressible/incompressible · II-432–433
- idéal · II-433

flux

- chaleur · II-505
- masse · II-432

fonction

- plusieurs variables · I-126, II-547

force

- capillaire · II-630–632
- centrale · I-240, I-267

- centripète · I-109, I-123, I-127
- cisaillement · I-163
- compression · I-159–162
- concourante · I-154
- conservative · I-126, I-132–133
- Coriolis · II-400–405
- couple de forces · I-154–155, II-574, II-719
- d'un ressort · I-104–105
- dans les fluides · II-419–421
- de marée · I-264–267
- de surface · II-637–638
- de volume · II-428
- élastique · I-131, I-164–165
- électromagnétique · I-93, I-126, II-408, II-574
- extérieure · I-135–137, I-187, II-486
- flottabilité (Archimède) · II-425–426, II-509–511
- frottement solide-fluide · II-419–421
- frottement solide-solide · I-93–96
- gravitation · I-235–267
- intérieure · I-186
- poids · I-9, I-13–14, I-241, II-419, II-425–427
- portance · II-438–442
- pression · I-161, I-163, II-419–421
- tension superficielle · II-629–635
- traînée · II-454
- variable en position · I-121

forme de la Terre · I-259–262

formule de

- composition des vitesses · I-64
- Laplace-Young · II-637–639
- Stirling · II-540
- Torricelli · II-437

Foucault · I-216, II-408–410

Fourier · II-505–508, II-557

fréquence d'oscillation · I-102–103

fusée · I-194–196

fusion

- glace · I-281, II-493, II-504
- nucléaire · II-580–582

G

Galilée · I-65–66, I-84–86

Gay-Lussac · II-493

gaz

- à effet de serre · II-557, II-589
- diatomique · II-517
- monoatomique · II-517
- parfait (idéal) · II-492–495
- réel · II-496–499

générateur électrique · II-573–574

géostrophie · II-448–449

géothermie · II-585, II-590

Gibbs · II-552–555

glucose · II-566–571

goutte · II-637–639, II-642–645

gradient

- adiabatique · II-559
- définition · I-126

gravitation (voir force de)

gravité terrestre · I-9, I-259–262, I-280

gyroscope · I-215–218

H

hélium · I-258–259, II-494, II-556, II-582

Helmholtz · II-549–550

Hertz · I-103

hydroélectricité · II-593–595

hydrogène · I-258–259, II-569–570

hydrostatique (lois de) · II-423–426

I

impulsion · I-190–191

induction (déduction) · I-7

inertiel (repère) · I-85–87, I-91, I-186–187, II-399–403

insectes (propulsion) · II-646–647
 intégrales · I-29–33
 intensive (variable) · II-486
 irréversibilité · I-135, I-202–203,
 II-486, II-522
 isentropique · II-523
 isobare · II-488, II-503, II-552–553
 isolé (système) · I-186–187, II-484–
 485
 isotherme · II-488, II-512, II-514,
 II-521–522, II-536–537
 isotope · II-577, II-579

J

Jacobien · II-673
 Joule · I-121, II-491, II-502,
 II-512–513, II-519–523

K

Kelvin · II-493–494, II-530, II-532

L

Laplace · I-203, II-460, II-464,
 II-573–574, II-630, II-637–641
 levier · I-167
 liquides · II-413, II-417
 loi de Jurin · II-640–641
 loi de la gravitation universelle · I-241
 loi des aires · I-236, I-240–241
 loi de Wien · II-557
 lois de Hooke ou lois de l'élasticité ·
 I-104, I-159
 lois de la mécanique
 – la première loi de Galilée · I-85
 – deuxième loi de Newton · I-86–87
 – troisième loi de Newton · I-90–91
 lois de la thermodynamique
 – loi de Fourier · II-505–507
 – loi de Stefan-Boltzmann · II-557
 – loi zéro · II-489
 – première loi : la conservation
 de l'énergie et l'énergie interne ·
 II-501–503

– deuxième loi : la croissance du
 désordre et l'entropie · II-522,
 II-525–526
 longueur d'onde · II-414, II-455
 luminosité (du soleil) · I-280, II-556

M

machines (voir moteurs thermiques)
 manteau terrestre · I-262–264
 marche des insectes · II-646–647
 marée
 – dynamique · II-457–459
 – statique · I-264–267
 Mariotte · II-493
 masse
 – conservation · II-432
 – détermination de la masse de la
 Terre · I-256–258, I-280, II-706
 – et énergie · II-577
 – volumique · I-14, I-87, II-419,
 II-433
 mesures
 – longueur · I-12–15
 – masse · I-14
 – masse atomique · II-578
 – temps · I-13
 méthane · II-557, II-569–570
 méthode DPCE · I-34–35, II-710
 méthode scientifique · I-2, I-7–8
 module
 – d'un vecteur · I-18, I-22
 – de Young · I-160, I-165
 moment
 – cinétique (angulaire) · I-196–197
 – d'un corps solide · I-204
 – d'un système de particules ·
 I-197–198
 – de force · I-151–153
 – d'inertie · I-204–208
 moteur thermique · II-527–531
 mouillage · II-642–645
 mouvement
 – à deux corps · I-188–189
 – azimuthal · I-61–62

- chaotique · II-679–690
- circulaire uniforme · I-59–60
- de déformation · I-104–105, I-159–164
- de rotation · I-59–61, I-203–205
- des planètes · I-247–256
- de translation · I-17, I-150
- du centre de masse · I-186
- périodique · I-103–105, I-127–130
- radial · I-61–62
- rectiligne · I-45–49
- relatif · I-63–66, II-421

musique · II-459–462

N

neutron · I-279, II-577, II-581

Newton · I-86–91, I-186–188, I-235–242, I-250–255

nombre

- de masse · II-577, II-580
- d’ondes · II-414–415, II-449, II-455–457, II-467–468

nombre sans dimension

- Froude · II-416
- Mach · II-432, II-441
- Reynolds · II-430, II-451–454
- Rossby · II-405, II-416, II-449

noyau atomique · II-576, II-579–582

numéro atomique · II-577

O

océans · I-264–267, I-280–281, II-510, II-555–557, II-565, II-599–600, II-706–707

ondes dans les fluides

- acoustique · II-413, II-415, II-454, II-459–460, II-479–480, II-541
- dispersives - non dispersives · II-458, II-465–466, II-655, II-736, II-776

- marée · I-265–267, II-458, II-479–480, II-735–736, II-753
- progressive · II-458
- vagues · II-462–468

orbites (des planètes) · I-245–256

ordre de grandeur · I-14, I-16

oscillateur harmonique · I-103–107, I-127–130, II-674

OTEC · II-590–591

ouvert (système) · II-485

oxygène · I-245, II-492, II-495, II-517, II-566, II-568

P

particule

- fluide · II-416–418
- taille · I-90, I-157

pendule

- de Foucault · II-410
- de torsion · I-257
- équation · I-127–130

période

- d’une onde · II-455, II-457, II-465
- d’oscillation · I-102–103
- de révolution · I-55, I-114, I-237, I-246, I-254, I-267, I-270–273

phase

- espace (exemples) · I-107, II-657–662, II-674–675, II-682
- oscillation · I-102–103, I-208–209, II-454–468

phénomènes de

- montée capillaire · II-640, II-643–644
- mouillage · II-642–645
- transport · II-505

photoélectrique · II-598

photon · II-556–557

photosynthèse · II-566–569

plan incliné · I-97–99, I-213

Planck · I-14, I-279, II-556–557

planètes · I-236–238, I-258

poids · I-9, I-88, I-94, I-96–98, I-241
 point
 – fixe · I-255, II-659–674, II-677–679, II-681–682, II-684–688
 – triple · II-493–494
 Poiseuille-Hagen (écoulement) · II-445
 pompe à chaleur · II-531–532
 portance · II-438–442
 portrait de phase (exemples) · II-671–672, II-674, II-682
 potentiel
 – force dérivant d'un potentiel · I-126
 – potentiel thermodynamique · II-547–554
 pression
 – hydrostatique · II-423
 – osmotique · II-642
 prévision · I-11, I-202, II-683–684
 principe
 – d'action et réaction · I-90–91, I-186–187, I-239
 – d'inertie · I-84–85
 processus (voir transformation)
 produit de vecteurs
 – scalaire · I-24–25
 – vectoriel · I-25–26
 proton · I-279, II-577, II-706
 puissance · I-124
 pulsation · I-103

Q

quantité de mouvement · I-87, I-185–187, I-190–192, II-515

R

radioactivité
 – défaut de masse · II-579
 – demi-vie · II-579
 rayonnement
 – infrarouge · II-557–561, II-563–565
 – solaire · II-556, II-596–597

réacteur nucléaire · II-585–587
 réaction
 – chimique · II-566, II-569, II-577
 – nucléaire · II-581–582
 – propulsion à · I-194–195
 référentiel
 – inertiel · I-85–87, II-400
 – terrestre · I-86, I-260, II-399–400, II-408
 réfrigérateurs · II-531
 relation de
 – Bernoulli · II-433–435
 – Laplace-Young · II-637–639
 – Stefan-Boltzmann · II-557
 rendement (moteur thermique) · II-530, II-533
 réservoir · II-490
 résonance · I-208–212
 ressort · I-102–105, I-130–131
 résultante des forces · I-149–150
 rétroaction (*feedback*) · II-600
 réversibilité · I-159, I-202, II-486
 rotation · I-59–61, I-260–262, I-280, II-399–411, II-438–439, II-447–450

S

salinité · II-510–511
 scaling · II-414–416
 sensibilité aux conditions initiales (SCI) · I-84, I-203, II-683–684
 sensibilité du climat · II-600
 séparation de couches limites · II-435, II-442
 sismographe · I-208–210
 solaire (conversion d'énergie) · II-597–598
 soleil · I-235–238, I-280, II-556–558, II-585, II-597–598
 son (vitesse) · II-432, II-459–462
 standards · I-13
 Stirling (approximation de) · II-540

système
 – de Lorenz · II-679–683
 – dynamique · II-657
 – fermé - ouvert · II-485
 – isolé · I-186–187, II-484–485
 – thermodynamique · II-486

T

température
 – Celsius · II-493–494
 – critique · II-497–498, II-500
 – d'émission · II-557, II-559–561
 – Kelvin · II-493–494

temps
 – flèche · I-202, II-518
 – mesure · I-13

tension
 – sur un solide · I-160–161
 – superficielle · II-629–632

théorème
 – du calcul différentiel · I-31–32
 – de Carnot · II-534

théorie (cinétique des gaz) · II-513–514, II-517

thermomètre
 – gaz · II-492–494
 – mercure · I-237, I-258, II-491–493

toile d'araignées · II-687

traînée · II-440–442

transformation
 – adiabatique · II-513–514
 – galiléenne · I-65–66
 – irréversible · II-487, II-520–522
 – isotherme · II-521–522
 – réversible · II-520–522

translation · I-65–66, I-110, I-150, II-516–517

transport (phénomènes de) · II-505

travail
 – d'une force · I-120–124
 – fait par un gaz · II-487–488

tritium · II-577

troposphère · II-559

tube
 – capillaire · II-493, II-640–641
 – convergent – divergent · II-435

turbine · II-572, II-575, II-586, II-593–594

turbulence · II-418, II-449–454

U

unités · I-12–14
 – conversion · I-16
 – masse atomique · II-577
 – Système international, SI · I-13

uranium · II-580–582, II-585

V

van der Waals · II-496–500
 vapeur · I-280, II-492, II-496, II-499–500, II-586–587

vecteurs
 – addition - soustraction · I-17–20
 – produit scalaire · I-24–25
 – produit vectoriel · I-25–26

vibrations · I-208, I-215

viscosité cinématique · II-422

vitesse
 – angulaire · I-56, I-59, I-73–74, I-280, II-399–402
 – d'échappement · I-243, I-245, I-258
 – de groupe · II-466–468
 – de la lumière · I-8, I-280, II-705
 – de phase · II-455–459, II-461–462
 – moyenne · I-49, I-51, II-515–516
 – scalaire · I-50–51
 – vectorielle · I-51

volume
 – molaire · II-495
 – spécifique · II-495

W

watt · I-124