وزارة التربيـــــــة والتعليم العالي
مديرية التربية و التعليم / شرق غـــــــزة

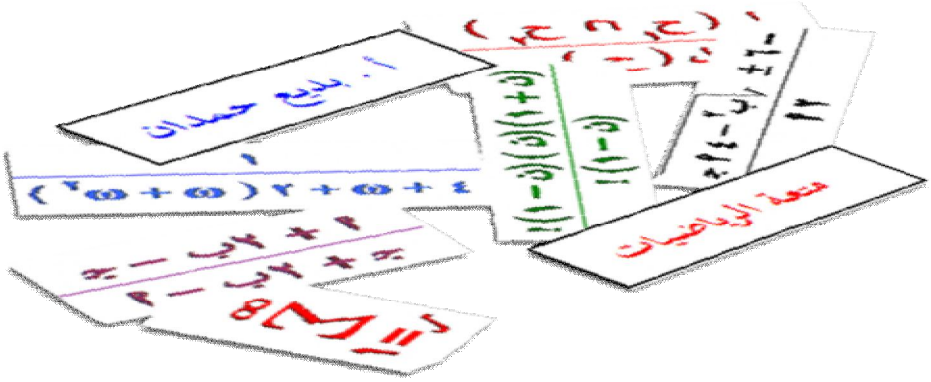
حلول (المادة التدريبية الوزارية) للصف الحادي عشر علمي

(الفصل الثاني)

لمبحث الرياضيات

إعداد وطباعة

أ. بديع أحمد حمدان
(معلم مبحث الرياضيات في مدرسة شهداء الزيتون الثانوية)
ماجستير إحصاء تطبيقي



١٤٣٨ هـ - ٢٠١٧م

تنويه

- هذه المادة مجاناً لكل طالب علم يحق تداولها ورقياً أو إلكترونياً ويمكن طباعتها وبيعها
- لا يحق لأي شخص التعديل عليها وإعادة رفعها دون الرجوع لي .
- أي ملاحظات على المادة أرجو التواصل معي على :

البريد الإلكتروني : bade٣.g١@gmail.com

أو الإتصال على جوال : ٠٥٩٩٦٨٩٠٧٤

أو على فيسبوك

- أرجو ممن يستفيد منها الدعوة لي ولوالدي

المواضيع التي تناولتها المادة

- الأعداد المركبة
- المتتاليات والمتسلسلات
- التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين
- الإحتمال المشروط واستقلال الحوادث
- الأرقام القياسية

طبعة أولى

السؤال الأول : إختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :

١) العدد ت هو عدد غير حقيقي مربعه يساوي :

أ) $\sqrt{-١}$ ب) −١ ج) ١ د) $-\sqrt{-١}$

٢) $ت^{٤ن + ٣}$ حيث ن عدد صحيح يساوي :

أ) ت ب) − ت ج) $ت^{٢}$ د) −١

٣) $\sqrt{-١٦} \times \sqrt{-٢٥}$ =:

أ) ٢٠ ب) −٢٠ ج) ٢٠ت د) −٢٠ت

٤) $\sqrt{-٣٦}$ = :

أ) ٦ت ب) −٦ت ج) ± ٦ت د) $-\sqrt{٦}$ ت

٥) مجموعة حل المعادلة $س^{٢}$ + ١ = ٠ هي :

أ) ت ب) − ت ج) ± ت د) ١

٦) العدد المركب ع = ٥ − $\sqrt{٣}$ ت ينتمي لمجموعة :

أ) الأعداد الحقيقية ب) الأعداد المركبة ج) الأعداد التخيلية د) الأعداد النسبية

٧) إذا كان ٢س + ٨ص ت = −١٠ + ٤ت فإن (س ، ص) = :

أ) (٤ ، −٥) ب) (−٥ ، $\frac{١}{٢}$) ج) (٢ ، ٥) د) (−٥ ، ٢)

٨) (٣ − ٢ت) − (٥ + ت) :

أ) −٢ − ٣ت ب) ٢ − ٣ت ج) −٢ + ٣ت د) ٢ + ٣ت

٩) التحويل الهندسي الذي ينقل العدد ع إلى نظيره الجمعي −ع هو :

أ) إنعكاس في نقطة الأصل ب) إنعكاس في محور السينات ج) دوران حول نقطة الأصل د) أ ، ب معاً

١٠) إذا كان ع = ٣ + ٢ت جذراً للمعادلة $ع^{٢}$ − م ع + ١٣ = ٠ فإن م تساوي :

أ) ١ ب) ٦ ج) ٥ د) ١٣

١١) مرافق العدد ع = − ت − $\sqrt{٣}$:

أ) − ت + $\sqrt{٣}$ ب) ت − $\sqrt{٣}$ ج) ت + $\sqrt{٣}$ د) − ت − $\sqrt{٣}$

١٢) إذا كان ع = س + ت ص عدد مركب فإن $\overline{ع}$ + ع = :

أ) ٢س ب) ٢ص ج) ٢ص ت د) ٢س ت

١٣) إذا كان ع = ٣ + ٤ت فإن $ع^{-١}$ = :

أ) $\frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٢٥}$ ت ب) $\frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥}$ ت ج) $\frac{٣}{٢٥} - \frac{٤}{٥}$ ت د) $\frac{٣}{٢٥} - \frac{٤}{٢٥}$ ت

١٤) إحدى الأعداد التالية جذر تكعيبي للواحد الصحيح :

أ) $-\frac{١}{٢} + \sqrt{\frac{٣}{٢}}$ ت ب) $-\frac{١}{٢} + \sqrt{٣}$ ت ج) $-\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢}$ ت د) $-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

١٥) $\frac{١}{ω + ١}$ = :

أ) ω ب) − ω ج) $ω^{٢}$ د) $-ω^{٢}$

١٦) الصورة القطبية للعدد المركب الذي مقياسه ٥ وسعته الأساسية $\frac{π}{٣}$ هي :

أ) ٥ (جتا $\frac{π}{٣}$ + ت جا $\frac{π}{٣}$) ب) ٥ (جتا $\frac{π}{٣}$ − ت جا $\frac{π}{٣}$)

ج) ٥ (جا $\frac{π}{٣}$ + ت جتا $\frac{π}{٣}$) د) ٥ (جا $\frac{π}{٣}$ − ت جتا $\frac{π}{٣}$)

١٧) إذا كان ع = ١ − $\sqrt{٣}$ ت فإن | ١ − $\sqrt{٣}$ ت | = :

أ) ٤ ب) ٢ ج) ١ + $\sqrt{٣}$ ت د) −١ + $\sqrt{٣}$ ت

١٨) إذا كان ع = ٥ت فإن السعة الأساسية هـ للعدد ع :

أ) صفر ب) ٢ ج) $\frac{π}{٢}$ د) $\frac{٣π}{٢}$

الحل

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
الإجابة	ب	ب	ب	أ	ج	ب	ب	أ	أ
رقم السؤال	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨
الإجابة	ب	ب	أ	د	د	ب	أ	ب	ج

إنتهى

السؤال الثاني : أجب عن الأسئلة الآتية حسب المطلوب :

١ إذا كان قيمة س = ت فأوجد قيمة المقدار $س^٣ + س^٢ - س + ١$.

الحل

∵ س = ت ⇐ المقدار $س^٣ + س^٢ - س + ١ = ت^٣ + ت^٢ - ت + ١$

$= (ت)^٢ \times ت + ت^٢ - ت + ١ = -ت - ١ - ت + ١ = -٢ت$

إنتهى

٢ ضع المقدار $\frac{١ + ت + ٢ت^٢ + ٢ت^٣}{١ - ٥ت + ٣ت^٢ - ٣ت^٣}$ في أبسط صورة

الحل

∵ $ت^٢ = -١$ ، $ت^٣ = -ت$

$\Leftarrow \frac{١ + ت + ٢ت^٢ + ٢ت^٣}{١ - ٥ت + ٣ت^٢ - ٣ت^٣} = \frac{١ + ت + ٢ \times (-١) + ٢ \times (-ت)}{١ - ٥ت + ٣ \times (-١) - ٣ \times (-ت)}$

$= \frac{-١ - ت}{-٢ - ٢ت} = \frac{-١ - ت}{٢ \times (-١ - ت)} = \frac{١}{٢}$

إنتهى

٣ أوجد في ك مجموعة حل المعادلات الآتية :

أ) $س^٢ - ٦س + ٢٥ = ٠$

ب) $س^٢ - ٢س + ٢ = ٠$

جـ) $٤س^٢ - ٤س + ٥ = ٠$

د) $س^٤ - ١٦ = ٠$

الحل

أ) $س^٢ - ٦س + ٢٥ = ٠$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{٦ \pm \sqrt{٦^٢ - (٤ \times ١ \times ٢٥)}}{٢ \times ١} = \frac{٦ \pm \sqrt{٣٦ - ١٠٠}}{٢}$

$= \frac{٦ \pm \sqrt{-٦٤}}{٢} = \frac{٦ \pm ٨ت}{٢} = ٣ \pm ٤ت$

⇐ م . ح = { ٣ + ٤ت ، ٣ - ٤ت }

ب) $س^{٢} - ٢س + ٢ = ٠$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ} = \frac{٢ \pm \sqrt{(-٢)^{٢} - (٤ \times ١ \times ٢)}}{٢ \times ١} = \frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٨}}{٢}$$

$$= \frac{٢ \pm \sqrt{-٤}}{٢} = \frac{٢ \pm ٢ ت}{٢} = ١ \pm ت \quad \Leftarrow \quad م . ح = \{ ١ + ت ، ١ - ت \}$$

جـ) $٤س^{٢} - ٤س + ٥ = ٠$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ} = \frac{٤ \pm \sqrt{(-٤)^{٢} - (٤ \times ٤ \times ٥)}}{٤ \times ٢} = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٨٠}}{٨}$$

$$= \frac{٤ \pm \sqrt{-٦٤}}{٨} = \frac{٤ \pm ٨ ت}{٨} = \frac{١}{٢} \pm ت$$

$$\Leftarrow \quad م . ح = \{ \frac{١}{٢} + ت ، \frac{١}{٢} - ت \}$$

د) $س^{٤} - ١٦ = ٠$

$س^{٤} - ١٦ = ٠ \Leftarrow س^{٢} = \pm \sqrt{١٦} = \pm ٤$

عندما $س^{٢} = ٤ \Leftarrow س = \pm ٢$ ، عندما $س^{٢} = -٤ \Leftarrow س = \pm \sqrt{-٤}$

$\Leftarrow س = \pm ٢ت \Leftarrow م . ح = \{ ٢ ، -٢ ، ٢ ت ، -٢ ت \}$

إنتهى

٤ أوجد قيمتي س ، ص اللتين تحققان المعادلة الآتية : $٢س + ٣س ت + ٣ص - ٣٦ ت = -١٣ + ١٤ص ت$.

الحل

$٢س + ٣س ت + ٣ص - ٣٦ ت = -١٣ + ١٤ص ت$

$\Leftarrow (٢س + ٣ص) + (٣س ت - ٣٦ ت) = -١٣ + ١٤ص ت$

$\Leftarrow (٢س + ٣ص) + (٣س - ٣٦) ت = -١٣ + ١٤ص ت$

$\Leftarrow ٢س + ٣ص = -١٣$ ---------- (١)

، $٣س - ٣٦ = ١٤ص \Leftarrow ٣س - ١٤ص = ٣٦$ ---------- (٢)

بضرب المعادلة (١) في ٣ $\Leftarrow ٦س + ٩ص = -٣٩$ ---------- (٣)

بضرب المعادلة (٢) في -٢ $\Leftarrow -٦س + ٢٨ص = -٧٢$ ---------- (٤)

(٣) + (٤) $\Leftarrow ٣٧ص = -١١١ \Leftarrow ص = -٣$

وبالتعويض عن قيمة ص = -٣ في المعادلة رقم (١) ينتج أن : $٢س - ٩ = -١٣ \Leftarrow س = -٢$

$\Leftarrow م . ح = \{ (-٢ ، -٣) \}$

إنتهى

ب) $س^٢ + ٢س ت - ص^٢ - ت ص - ٢ت = ١$.

الحل

$س^٢ + ٢س ت - ص^٢ - ت ص - ٢ت = ١$

$\Leftarrow (س^٢ - ص^٢) + (٢س ت - ت ص - ٢ت) = ١$

$\Leftarrow (س^٢ - ص^٢) + (٢س - ص - ٢) ت = ١$

$\Leftarrow س^٢ - ص^٢ = ١$ ---------- (١)

، $٢س - ص - ٢ = ٠ \Leftarrow ٢س - ص = ٢$ ---------- (٢)

من المعادلة (٢) $ص = ٢س - ٢$ ---------- (٣)

بالتعويض عن ص في المعادلة رقم (١) $\Leftarrow س^٢ - (٢س - ٢)^٢ = ١$

$\Leftarrow س^٢ - (٤س^٢ - ٨س + ٤) = ١ \Leftarrow س^٢ - ٤س^٢ + ٨س - ٤ = ١$

$\Leftarrow -٣س^٢ + ٨س - ٥ = ٠ \Leftarrow ٣س^٢ - ٨س + ٥ = ٠$

$\Leftarrow (٣س - ٥)(س - ١) = ٠ \Leftarrow س = \frac{٥}{٣}$ أو $س = ١$

عندما $س = \frac{٥}{٣}$ بالتعويض في المعادلة رقم (٣) $\Leftarrow ص = (٢ \times \frac{٥}{٣}) - ٢ \Leftarrow ص = \frac{٤}{٣}$

عندما $س = ١$ بالتعويض في المعادلة رقم (٣) $\Leftarrow ص = (٢ \times ١) - ٢ \Leftarrow ص = ٠$

$\Leftarrow م . ح = \{ (\frac{٥}{٣} ، \frac{٤}{٣}) ، (١ ، ٠) \}$

إنتهى

جـ) $س^٢ - ص^٢ + ت (س + ص) = ٣ (١ + ت)$.

الحل

$س^٢ - ص^٢ + ت (س + ص) = ٣ (١ + ت)$

$\Leftarrow س^٢ - ص^٢ + ت (س + ص) = ٣ + ٣ت \Leftarrow س^٢ - ص^٢ = ٣$ ---------- (١)

، $س + ص = ٣$ ---------- (٢)

من المعادلة (٢) $ص = ٣ - س$ ---------- (٣)

بالتعويض عن ص في المعادلة رقم (١) $\Leftarrow س^٢ - (٣ - س)^٢ = ٣$

$\Leftarrow س^٢ - (٩ - ٦س + س^٢) = ٣ \Leftarrow س^٢ - س^٢ + ٦س - ٩ = ٣$

$\Leftarrow ٦س - ٩ = ٣ \Leftarrow س = ٢$

عندما $س = ٢$ بالتعويض في المعادلة رقم (٣) $\Leftarrow ص = ١ \Leftarrow م . ح = \{ (٢ ، ١) \}$

إنتهى

د) س (٣ + ٢ت) + ص (٢ − ٢ت) = ١ + ٤ت .

الحل

س (٣ + ٢ت) + ص (٢ − ٢ت) = ١ + ٤ت ⇐ (٣س + ٢ص) + (٢س ت − ٢ص ت) = ١ + ٤ت

⇐ (٣س + ٢ص) + (٢س − ٢ص) ت = ١ + ٤ت

⇐ ٣س + ٢ص = ١ ------- ① ، ٢ س − ٢ص = ٤ ------- ②

① + ② ⇐ ٥س = ٥ ⇐ س = ١ وبالتعويض عن قيمة س = ١ في المعادلة رقم ① ينتج أن :

٣ + ٢ص = ١ ⇐ ص = −١ ⇐ م . ح = { (١ ، −١) }

إنتهى

٥ جد ناتج ما يلي :

٥−١) : ٢ − (١ − ٢ت) + (٤ − ٥ت) − (١ − ٣ت) .

الحل

٢ − (١ − ٢ت) + (٤ − ٥ت) − (١ − ٣ت) = ٢ − ١ + ٢ت + ٤ − ٥ت − ١ + ٣ت = ٤

إنتهى

٥−٢) : (٢√٢ − ت) − (٤ − √٣ت) + (٢√٢ + ت) .

الحل

(٢√٢ − ت) − (٤ − √٣ت) + (٢√٢ + ت) = ٢√٢ − ت − ٤ + √٣ت + ٢√٢ + ت

= (٤√٢ − ٤) + √٣ت

إنتهى

٥−٣) : (٥ − ٦ت) + (٣ − ٢ت) − (٤ + ت) − (−٢ − ت)

الحل

(٥ − ٦ت) + (٣ − ٢ت) − (٤ + ت) − (−٢ − ت) = ٥ − ٦ت + ٣ − ٢ت − ٤ − ت + ٢ + ت

= ٦ − ٨ت

إنتهى

٥−٤) : (٢ − ٧ت) (٦ − ت) .

الحل

(٢ − ٧ت) (٦ − ت) = (٢×٦ − (−٧×−١)) + (٢×−١ + (−٧×٦)) ت

= (١٢ − ٧) + (−٢ − ٤٢) ت = ٥ − ٤٤ ت

إنتهى

٥-٥) : $(٣ - ٢ت)^٢ + (٣ + ٢ت)^٢$.

الحل

$(٣ - ٢ت)^٢ = (٣ - ٢ت)(٣ - ٢ت) = (٣\times٣ - (-٢\times-٢)) + (٣\times-٢ + (-٢\times٣))ت$

$= (٩ - ٤) + (-٦ - ٦)ت = ٥ - ١٢ت$

$(٣ + ٢ت)^٢ = (٣ + ٢ت)(٣ + ٢ت) = (٣\times٣ - ٢\times٢) + (٣\times٢ + ٢\times٣)ت$

$= (٩ - ٤) + (٦ + ٦)ت = ٥ + ١٢ت$

$\Leftarrow (٣ - ٢ت)^٢ + (٣ + ٢ت)^٢ = ٥ - ١٢ت + ٥ + ١٢ت = ١٠$

إنتهى

٥-٦) : $(١ - ت^٥)(١ - ت^{١٠})(١ - ت^{١٥})$.

الحل

$ت^٥ = ت^٤ \times ت = ١ \times ت = ت$ ، $ت^{١٠} = ت^٨ \times ت^٢ = (ت^٤)^٢ \times ت^٢ = ١ \times -١ = -١$

$ت^{١٥} = ت^{١٦} \times \frac{١}{ت} = (ت^٤)^٤ \times -ت = ١ \times -ت = -ت$

$\Leftarrow (١ - ت^٥)(١ - ت^{١٠})(١ - ت^{١٥}) = (١ - ت)(١ + ١)(١ + ت) = ٢(١ - ت)(١ + ت)$

$= ٢(١^٢ - ت^٢) = ٢(٢) = ٤$

إنتهى

٥-٧) : $(\sqrt{٨} - \sqrt{-٥٤})(\sqrt{١٨} - \sqrt{-٢٤})$

الحل

$\sqrt{-٥٤} = \sqrt{٩ \times -٦} = ٣\sqrt{٦}ت$

$\sqrt{-٢٤} = \sqrt{٤ \times -٦} = ٢\sqrt{٦}ت$

$\Leftarrow (\sqrt{٨} - \sqrt{-٥٤})(\sqrt{١٨} - \sqrt{-٢٤}) = (\sqrt{٨} - ٣\sqrt{٦}ت)(\sqrt{١٨} - ٢\sqrt{٦}ت)$

$= (\sqrt{٨} \times \sqrt{١٨} - ٦ \times ٦) + (-٢ \times \sqrt{٨} \times \sqrt{٦} - ٣ \times \sqrt{٦} \times \sqrt{١٨})ت$

$= (١٢ - ٣٦) + (-٢ \times \sqrt{٤٨} - ٣ \times \sqrt{١٠٨})ت$

$= (١٢ - ٣٦) + (-٨\sqrt{٣} - ١٨\sqrt{٣})ت$ (وذلك لأن $\sqrt{٤٨} = ٤\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{١٠٨} = ٦\sqrt{٣}$)

$= (١٢ - ٣٦) + (-٢٦\sqrt{٣})ت = -٢٤ - ٢٦\sqrt{٣}ت$

إنتهى

٥-٨) : $(٢ - \frac{١}{ت})^٦$

الحل

$\because \frac{١}{ت} = -ت \Leftarrow (٢ - \frac{١}{ت})^٦ = (٢ + ت)^٦$

$= \binom{٦}{٠} \times (٢)^{٦} \times (ت)^{٠} + \binom{٦}{١} \times (٢)^{٥} \times (ت)^{١}$

$+ \binom{٦}{٢} \times (٢)^{٤} \times (ت)^{٢} + \binom{٦}{٣} \times (٢)^{٣} \times (ت)^{٣} + \binom{٦}{٤} \times (٢)^{٢} \times (ت)^{٤}$

$+ \binom{٦}{٥} \times (٢)^{١} \times (ت)^{٥} + \binom{٦}{٦} \times (٢)^{٠} \times (ت)^{٦}$

$= ١ \times ٦٤ \times ١ + ٦ \times ٣٢ \times ت + ١٥ \times ١٦ \times -١ + ٢٠ \times ٨ \times -ت + ١٥ \times ٤ \times ١$

$+ ٦ \times ٢ \times ت + ١ \times ١ \times -١$

$= ٦٤ + ١٩٢ ت - ٢٤٠ - ١٦٠ ت + ٦٠ + ١٢ ت - ١ = -١١٧ + ٤٤ ت$

حـل آخـر

يمكن حل هذا السؤال بإيجاد المقدار: $(٢ - \frac{١}{ت})^{٦} = (٢ + ت)^{٦} = (٢ + ت)^{٢} \ (٢ + ت)^{٢} \ (٢ + ت)^{٢}$

إنتهى

٥-٩) : $\frac{٤ - ٥ت}{٧ت}$.

الحل

$\frac{٤ - ٥ت}{٧ت} = \frac{(٤ - ٥ت) \times (-٧ت)}{(٧ت) \times (-٧ت)} = \frac{(٠ - ٣٥) + (-٢٨ + ٠) ت}{٤٩}$

$= -\frac{٣٥}{٤٩} - \frac{٢٨}{٤٩} ت = -\frac{٥}{٧} - \frac{٤}{٧} ت$

إنتهى

٥-١٠) : $\frac{(٢ + ت)(٣ + ت)}{(٢ - ت)(٣ - ت)}$.

الحل

$\frac{(٢ + ت)(٣ + ت)}{(٢ - ت)(٣ - ت)} = \frac{(٦ - ١) + (٢ + ٣) ت}{(٦ - ١) + (-٢ - ٣) ت} = \frac{٥ + ٥ت}{٥ - ٥ت}$ (لا حظ قسمة عددين مترافقين)

$= \frac{١ + ت}{١ - ت} = \frac{(١ + ت) \times (١ + ت)}{(١ - ت) \times (١ + ت)} = \frac{(١ - ١) + (١ + ١) ت}{٢} = ت$

إنتهى

٦ إذا كان ٧ت = (س + ٣ت) (ص – ت) – ٩ فأوجد س ، ص .

الحل

٧ت = (س + ٣ت) + (ص – ت) – ٩ ⇐ (س + ٣ت) (ص – ت) = ٩ + ٧ ت

⇐ (س ص + ٣) + (– س + ٣ص) ت = ٩ + ٧ ت

⇐ س ص + ٣ = ٩ ⇐ س ص = ٦ ---------- ①

، ٣ص − س = ٧ -------- ② من المعادلة ① س = $\frac{٦}{ص}$ -------- ③

بالتعويض عن س في المعادلة رقم ② ⇐ ٣ص − $\frac{٦}{ص}$ = ٧

⇐ ٣ص^{٢} − ٦ = ٧ص ⇐ ٣ص^{٢} − ٧ص − ٦ = ٠

⇐ (٣ص + ٢) (ص − ٣) = ٠ ⇐ ص = − $\frac{٢}{٣}$ أو ص = ٣

عندما ص = − $\frac{٢}{٣}$ بالتعويض في المعادلة رقم ③ ⇐ س = −٦ × $\frac{٣}{٢}$ ⇐ س = −٩

عندما ص = ٣ بالتعويض في المعادلة رقم ③ ⇐ س = ٦ ÷ ٣ ⇐ س = ٢

⇐ م . ح = { (−٩ ، − $\frac{٢}{٣}$) ، (٢ ، ٣) }

إنتهى

٧ حلل العدد ١٠ إلى عددين مترافقين .

الحل

٣) ع = ١٠ = ٩ + ١ = ٣^{٢} + (−١)^{٢} = (٣ + ت) (٣ − ت)

إنتهى

٨ إذا كان س = $\frac{٧ - ت}{٢ - ت}$ ، ص = $\frac{١٣ - ت}{٤ + ت}$ ، فأثبت أن س ، ص مترافقين .

الحل

$\frac{٧ - ت}{٢ - ت} = \frac{٧ - ت}{٢ - ت} \times \frac{٢ + ت}{٢ + ت} = \frac{(١٤ + ١) + (٧ - ٢) ت}{٥} = \frac{١٥ + ٥ ت}{٥}$

= ٣ + ت

$\frac{١٣ - ت}{٤ + ت} = \frac{١٣ - ت}{٤ + ت} \times \frac{٤ - ت}{٤ - ت} = \frac{(٥٢ - ١) + (-١٣ - ٤) ت}{١٧} = \frac{٥١ - ١٧ ت}{١٧}$

= ٣ − ت ⇐ إذن العددين مترافقين

إنتهى

٩ إذا كان ع ∈ ℂ وكان ($\overline{ع}$)^{٢} − ع = صفر فأوجد قيمة ع .

الحل

نفرض أن ع = س + ص ت ⇐ $\overline{ع}$ = س − ص ت

⇐ ($\overline{ع}$)^{٢} = (س − ص ت)^{٢} = (س^{٢} − ص^{٢}) − (٢س ص) ت

∵ ($\overline{ع}$)^{٢} − ع = صفر ⇐ (س^{٢} − ص^{٢}) − (٢س ص) ت − (س + ص ت) = ٠

⇐ (س^{٢} − ص^{٢}) − (٢س ص) ت = س + ص ت

⇐ $س^{٢} - ص^{٢} = س$ ---------- ①

، ٢س ص = − ص ⇐ ٢س ص + ص = صفر ⇐ ص (٢س − ١) = صفر

⇐ إما ص = صفر أو س = $-\frac{١}{٢}$ ---------- ②

بالتعويض عن ص = صفر في المعادلة رقم ① ⇐ $س^{٢}$ = س ⇐ س = صفر أو س = ١

⇐ ع = ٠ + (٠) ت أو ع = ١ + (٠) ت

⇐ ع = ٠ أو ع = ١

بالتعويض عن س في المعادلة رقم ① ⇐ $(-\frac{١}{٢})^{٢} - ص^{٢} = -\frac{١}{٢}$

⇐ $ص^{٢} = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٢}$ ⇐ ⇐ $ص^{٢} = \frac{٣}{٤}$ ⇐ $ص = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

⇐ $ع = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت أو $ع = -\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

⇐ م . ح = $\{ ٠ ، ١ ، -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت $\}$

إنتهى

١٠ جد ناتج $\frac{٣ + ٢ت}{٢ - ٥ت}$ على صورة أ + ب ت .

الحل

$$\frac{٣ + ٢ت}{٢ - ٥ت} = \frac{٣ + ٢ت}{٢ - ٥ت} \times \frac{٢ + ٥ت}{٢ + ٥ت} = \frac{(٦ - ١٠) + (١٥ + ٤)ت}{٢٩} = \frac{-٤ + ١٩ت}{٢٩}$$

$$= -\frac{٤}{٢٩} + \frac{١٩}{٢٩} ت$$

إنتهى

١١ إذا كان $ع = \frac{١}{٢ - ت}$ جد النظير الضربي للعدد ع .

الحل

نظير العدد ع = $\frac{١}{ع} = \frac{١}{\frac{١}{٢ - ت}} = ٢ - ت$

إنتهى

١٢ أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب :

أ) ع = ٢ − ٢$\sqrt{٣}$ ت . ب) ع = ٥ + ١٢ ت .

جـ) ع = −٨ + ٦ ت .

الحل

أ) ع = ٢ − ٢$\sqrt{٣}$ ت .

نفرض أن الجذر التربيعي للعدد ع هو س + ص ت

⇐ (س + ص ت)^{٢} = ٢ − ٢$\sqrt{٣}$ ت

⇐ (س^{٢} − ص^{٢}) + (٢س ص) ت = ٢ − ٢$\sqrt{٣}$ ت

⇐ س^{٢} − ص^{٢} = ٢ ---------- ①

، ٢س ص = − ٢$\sqrt{٣}$ ⇐ س ص = − $\sqrt{٣}$ ---------- ②

من المعادلة ② ص = − $\frac{\sqrt{٣}}{س}$ ---------- ③

بالتعويض عن ص في المعادلة رقم ① ⇐ س^{٢} − (− $\frac{\sqrt{٣}}{س}$)^{٢} = ٢

⇐ س^{٢} − $\frac{٣}{س^{٢}}$ = ٢ ⇐ س^{٤} − ٣ = ٢س^{٢}

⇐ س^{٤} − ٢س^{٢} − ٣ = ٠ ⇐ (س^{٢} − ٣) (س^{٢} + ١) = ٠

⇐ س = ± $\sqrt{٣}$ أو س = ± $\sqrt{-١}$ (ونرفض القيمة ± $\sqrt{-١}$ لأن س ، ص ∈ ح)

عندما س = $\sqrt{٣}$ بالتعويض في المعادلة رقم ③ ⇐ ص = −١

عندما س = − $\sqrt{٣}$ بالتعويض في المعادلة رقم ③ ⇐ ص = ١

إذن الجذرين هما $\sqrt{٣}$ − ت ، − $\sqrt{٣}$ + ت

ب) ع = ٥ + ١٢ ت .

نفرض أن الجذر التربيعي للعدد ع هو س + ص ت

⇐ (س + ص ت)^{٢} = ٥ + ١٢ ت

⇐ (س^{٢} − ص^{٢}) + (٢س ص) ت = ٥ + ١٢ ت

⇐ س^{٢} − ص^{٢} = ٥ ---------- ①

، ٢س ص = ١٢ ⇐ س ص = ٦ ---------- ②

من المعادلة ② س = $\frac{٦}{ص}$ ---------- ③

بالتعويض عن س في المعادلة رقم ① ⇐ $\frac{٣٦}{ص^{٢}}$ − ص^{٢} = ٥

⇐ ٣٦ − ص^{٤} = ٥ص^{٢}

⇐ ص^{٤} + ٥ص^{٢} − ٣٦ = ٠ ⇐ (ص^{٢} − ٤)(ص^{٢} + ٩) = ٠

⇐ ص = ± ٢ أو ص = ± $\sqrt{-٩}$ (ونرفض القيمة ± $\sqrt{-٩}$ لأن س ، ص ∈ ح)

عندما ص = ٢ بالتعويض في المعادلة رقم ③ ⇐ س = ٣

عندما ص = − ٢ بالتعويض في المعادلة رقم ③ ⇐ س = −٣

إذن الجذرين هما ٣ + ٢ ت ، − ٣ − ٢ ت

جـ) ع = ع = −٨ + ٦ ت .

نفرض أن الجذر التربيعي للعدد ع هو س + ص ت

⇐ (س + ص ت)^{٢} = ع = −٨ + ٦ ت ⇐ (س^{٢} − ص^{٢}) + (٢س ص) ت = ع = −٨ + ٦ ت .

⇐ س^{٢} − ص^{٢} = −٨ ---------- ①

، ٢س ص = ٦ ⇐ س ص = ٣ ---------- ②

من المعادلة ② س = $\frac{٣}{ص}$ ---------- ③

بالتعويض عن س في المعادلة رقم ① ⇐ $\frac{٩}{ص^{٢}}$ − ص^{٢} = −٨

⇐ ٩ − ص^{٤} = −٨ص^{٢} ⇐ ص^{٤} − ٨ص^{٢} − ٩ = ٠ ⇐ (ص^{٢} − ٩)(ص^{٢} + ١) = ٠

⇐ ص = ± $\sqrt{-١}$ أو ص = ± ٣ (ونرفض القيمة ± $\sqrt{-١}$ لأن س ، ص ∈ ح)

عندما ص = ٣ بالتعويض في المعادلة رقم ③ ⇐ س = ١

عندما ص = − ٣ بالتعويض في المعادلة رقم ③ ⇐ س = −١

إذن الجذرين هما ١ + ٣ ت ، − ١ − ٣ ت

إنتهى

١٣ أثبت أن $\left[\frac{١}{ω٢ + ١} - \frac{١}{ω٢ + ١^{٢}}\right]^{٢} = -\frac{٤}{٣}$.

الحل

$$\left[\frac{١}{ω٢ + ١} - \frac{١}{ω٢ + ١^{٢}}\right]^{٢} = \left[\frac{(ω٢ + ١^{٢}) - (ω٢ + ١)}{(ω٢ + ١)(ω٢ + ١^{٢})}\right]^{٢}$$

$$= \left[\frac{ω٢ + ١^{٢} - ω٢ - ١}{(ω٢ + ١)(ω٢ + ١^{٢})}\right]^{٢} = \left[\frac{ω٢^{٢} - ω٢}{ω٤ + ω٢^{٢} + ω٢ + ١}\right]^{٢}$$

$$= \left[\frac{٢(ω^{٢} - ω)}{ω٤ + ω٢^{٢} + ω٢ + ١}\right]^{٢} = \left[\frac{٢(ω^{٢} - ω)}{٢ + ٥(ω^{٢} + ω)}\right]^{٢} = \left[\frac{٢(ω^{٢} - ω)}{٥ - ٢}\right]^{٢}$$

$$= \frac{[2(\omega - \omega^2)]^2}{9} = \frac{4(\omega^4 + \omega^2 - 2\omega^3)}{9} = \frac{4(\omega + \omega^2 - 2)}{9} = \frac{4(-1-2)}{9}$$

$$= \frac{-12}{9} = -\frac{4}{3}$$

إنتهى

١٤ جد المقياس والسعة للأعداد المركبة الآتية .

١) ع = ٢ت .

٢) ع = −٥ت .

٣) ع = ٢ − ٢ت .

٤) ع = $\sqrt{3}$ − ت .

٥) ع = ٢$\sqrt{3}$ − ت .

٦) ع = ٢$\sqrt{2}$ + ٢$\sqrt{2}$ت .

الحل

١) ع = ٢ت .

المقياس = | ع | = $\sqrt{0^2 + 2^2}$ = $\sqrt{4}$ = ٢

جتا هـ = $\frac{0}{2}$ = ٠ ، جا هـ = $\frac{2}{2}$ = ١ ⇐ السعة هـ = $\frac{\pi}{2}$

٢) ع = −٥ت .

المقياس = | ع | = $\sqrt{0^2 + 5^2}$ = $\sqrt{25}$ = ٥

جتا هـ = $\frac{0}{5}$ = ٠ ، جا هـ = $-\frac{5}{5}$ = −١ ⇐ السعة هـ = $\frac{3\pi}{2}$

٣) ع = ٢ − ٢ت .

المقياس = | ع | = $\sqrt{2^2 + 2^2}$ = $\sqrt{8}$ = ٢$\sqrt{2}$

جتا هـ = $\frac{2}{2\sqrt{2}}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، جا هـ = $-\frac{2}{2\sqrt{2}}$ = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

ولأن جتا هـ مقدار موجب و جا هـ مقدار سالب ⇐ هـ عبارة عن زاوية تقع في الربع الرابع وزاوية إسنادها $\frac{\pi}{4}$

⇐ السعة هـ = ٢π − $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{7\pi}{4}$

٤) ع = $\sqrt{3}$ − ت .

المقياس = | ع | = $\sqrt{4}$ = ٢ ، جتا هـ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، جا هـ = $-\frac{1}{2}$

ولأن جتا هـ مقدار موجب و جا هـ مقدار سالب ⇐ هـ عبارة عن زاوية تقع في الربع الرابع وزاوية إسنادها $\frac{\pi}{6}$

⇐ السعة هـ = ٢π − $\frac{\pi}{6}$ = $\frac{11\pi}{6}$

٥) ع = ٢√٣ − ٢ت

المقياس = | ع | = √(١٢ + ٤) = √١٦ = ٤

جتا هـ = √٣ / ٢ ، جا هـ = − ١ / ٢

ولأن جتا هـ مقدار موجب و جا هـ مقدار سالب ⇐ هـ عبارة عن زاوية تقع في الربع الرابع وزاوية إسنادها $\frac{\pi}{٦}$

⇐ السعة هـ = ٢ π − π / ٦ = ١١ π / ٦

⇐ الصورة القطبية للعدد المركب ع = ٤ (جتا ١١ π / ٦ + حا ١١ π / ٦ ت)

٦) ع = ٢√٢ + ٢√٢ ت .

المقياس = | ع | = √(٨ + ٨) = √١٦ = ٤

جتا هـ = ٢√٢ / ٤ = ١ / √٢ ، جا هـ = ٢√٢ / ٤ = ١ / √٢

ولأن جتا هـ مقدار موجب و جا هـ مقدار موجب ⇐ هـ عبارة عن زاوية تقع في الربع الأول وزاوية إسنادها $\frac{\pi}{٤}$

⇐ السعة هـ = π / ٤

إنتهى

١٥ جد الصورة القطبية للعدد :

١) ع = − ٢√٣ − ٢ت . ٢) ع = −٨ت . ٣) ع = ١ / (− √٣ + ت) .

الحل

١) ع = − ٢√٣ − ٢ت .

المقياس = | ع | = √(١٢ + ٤) = √١٦ = ٤

جتا هـ = − √٣ / ٢ ، جا هـ = − ١ / ٢

ولأن جتا هـ مقدار سالب و جا هـ مقدار سالب ⇐ هـ عبارة عن زاوية تقع في الربع الثالث وزاوية إسنادها $\frac{\pi}{٦}$

⇐ السعة هـ = π + π / ٦ = ٧ π / ٦

⇐ الصورة القطبية للعدد المركب ع = ٤ (جتا ٧ π / ٦ + حا ٧ π / ٦ ت)

٢) ع = – ٨ت . المقياس = | ع | = $\sqrt{٠^٢ + ٨^٢}$ = $\sqrt{٦٤}$ = ٨

جتا هـ = $\frac{٠}{٨}$ = ٠ ، جا هـ = – $\frac{٨}{٨}$ = – ١ ⇐ السعة هـ = $\frac{٣\pi}{٢}$

⇐ الصورة القطبية للعدد المركب ع = ٨ (جتا $\frac{٣\pi}{٢}$ + حا $\frac{٣\pi}{٢}$ ت)

٣) ع = $\frac{١}{-\sqrt{٣} + ت}$ = $\frac{١}{-\sqrt{٣} + ت}$ × $\frac{-\sqrt{٣} - ت}{-\sqrt{٣} - ت}$ = $\frac{-\sqrt{٣} - ت}{٤}$

= – $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ – $\frac{١}{٤}$ ت

المقياس = | ع | = $\sqrt{\frac{٣}{١٦} + \frac{١}{١٦}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٤}}$ = $\frac{١}{٢}$

جتا هـ = – $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ÷ $\frac{١}{٢}$ = – $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جا هـ = – $\frac{١}{٤}$ ÷ $\frac{١}{٢}$ = – $\frac{١}{٢}$

ولأن جتا هـ مقدار سالب و جا هـ مقدار سالب ⇐ هـ عبارة عن زاوية تقع في الربع الثالث وزاوية إسنادها $\frac{\pi}{٦}$

⇐ هـ = π + $\frac{\pi}{٦}$ = $\frac{٧\pi}{٦}$ ⇐ الصورة القطبية للعدد المركب ع = $\frac{١}{٢}$ (جتا $\frac{٧\pi}{٦}$ + حا $\frac{٧\pi}{٦}$ ت)

إنتهى

١٦ جد الصورة الديكارتية للأعداد الآتية .

١) ع = ٥ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$) .

٢) ع = ٣ (جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$) .

٣) ع = جتا ٢١٠ + ت جا ٢١٠ .

٤) ع = ٤$\sqrt{٣}$ (جتا $\frac{٥\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{٥\pi}{٦}$) .

الحل

١) ع = ٥ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$) .

⇐ ع = ٥ ($\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت) ⇐ ع = $\frac{٥}{٢}$ + $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ ت

٢) ع = ٣ (جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$) .

⇐ ع = ٣ (٠ + ت) ⇐ ع = ٣ ت

٣) ع = جتا ٢١٠ + ت جا ٢١٠ .

⇐ ع = – $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ – $\frac{١}{٢}$ ت

٤) ع = ٤ $\sqrt{٣}$ (جتا $\frac{٥\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{٥\pi}{٦}$) .

⇐ ع = ٤ $\sqrt{٣}$ (− $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ت) ⇐ ع = − ٦ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت

إنتهى

١٧ إذا كان (−٣) . جذراً للمعادلة س^{٣} + س^{٢} − س + ١٥ = صفر فأوجد الجذرين الآخرين .

الحل

بما أن (−٣) جذراً للمعادلة س^{٣} + س^{٢} − س + ١٥ = صفر

⇐ (س + ٣) عامل من عوامل كثيرة الحدود س^{٣} + س^{٢} − س + ١٥ وبالقسمة الطويلة ينتج أن :

س^{٣} + س^{٢} − س + ١٥ = (س + ٣) (س^{٢} − ٢س + ٥)

⇐ إما س + ٣ = ٠ ومنها س = − ٣ أو س^{٢} − ٢س + ٥

⇐ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$ = $\frac{٢ \pm \sqrt{(-٢)^{٢} - (٤ \times ١ \times ٥)}}{٢ \times ١}$ = $\frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٢٠}}{٢}$

= $\frac{٢ \pm \sqrt{-١٦}}{٢}$ = $\frac{٢ \pm ٤ ت}{٢}$ = ١ ± ٢ت

⇐ م . ح = { −٣ ، ١ + ٢ت ، ١ − ٢ت }

إنتهى

١٨ حلل الأعداد الآتية إلى عددين مترافقين .

١) ع = س^{٢} + ١ ٢) ع = ٤س^{٢} + ٩ص^{٢} . ٣) ع = ٥ .

الحل

١) ع = س^{٢} + ١ = س^{٢} + (−١)^{٢} = (س + ت) (س − ت)

٢) ع = ٤س^{٢} + ٩ص^{٢} = (٢س)^{٢} + (−٣ص)^{٢} = (٢س + ٣ص ت) (٢س − ٣ص ت)

٣) ع = ٥ = ٤ + ١ = ٢^{٢} + (−١)^{٢} = (٢ + ت) (٢ − ت)

إنتهى

١٩ كون المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية التي أحد جذريها : $\frac{١}{٢}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت .

الحل

أي معادلة تربيعية ذات معاملات حقيقية إما أن يكون لها جذران حقيقيان متساويان أو مختلفان أو أن يكون لها جذران مركبان مترافقان وبما أن أحد جذري هذه المعادلة $\frac{١}{٢}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت فيكون الجذر الآخر $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت .

مجموع الجذرين = $\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت + $\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت = ١

حاصل ضرب الجذرين = ($\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت) ($\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت) = $\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} = \frac{٤}{٤}$ = ١

∵ المعادلة التربيعية بعلومية جذريها يمكن كتابتها على الصورة :

س^{٢} − (مجموع الجذرين) س + (حاصل ضرب الجذرين) = ٠

⇐ المعادلة التربيعية المطلوبه هي : س^{٢} − س + ١

إنتهى

٢٠ إذا كان : (س + ت ص)^{٢} = $\frac{٣٦ - ٢ت}{٣ + ٢ت}$ فأوجد س ، ص .

الحل

= $\frac{٣٦ - ٢ت}{٣ + ٢ت}$ = $\frac{٣٦ - ٢ت}{٣ + ٢ت}$ × $\frac{٣ - ٢ت}{٣ - ٢ت}$ = $\frac{(١٠٨ - ٤) + (-٧٢ - ٦)ت}{١٣}$

= ٨ − ٦ ت

∵ (س + ت ص)^{٢} = $\frac{٣٦ - ٢ت}{٣ + ٢ت}$ ⇐ (س + ت ص)^{٢} = ٨ − ٦ ت

⇐ (س^{٢} − ص^{٢}) + (٢س ص) ت = ٨ − ٦ ت

⇐ س^{٢} − ص^{٢} = ٨ ---------- ①

، ٢س ص = − ٦ ⇐ س ص = −٣ ---------- ②

من المعادلة ② س = − $\frac{٣}{ص}$ ---------- ③

بالتعويض عن س في المعادلة رقم ① ⇐ $\frac{٩}{ص^{٢}}$ − ص^{٢} = ٨

⇐ ٩ − ص^{٤} = ٨ص^{٢}

⇐ ص^{٤} + ٨ص^{٢} − ٩ = ٠ ⇐ (ص^{٢} + ٩) (ص^{٢} − ١) = ٠

⇐ ص = ± $\sqrt{-٩}$ أو ص = ± ١ (ونرفض القيمة ± $\sqrt{-٩}$ لأن س ، ص ∈ ح)

عندما ص = ١ بالتعويض في المعادلة رقم ③ ⇐ س = − ٣

عندما ص = − ١ بالتعويض في المعادلة رقم ③ ⇐ س = ٣

⇐ م . ح = { (−٣ ، ١) ، (٣ ، −١) }

إنتهى

٢١) إذا كان : س + ت ص = $\frac{(١ + ٤\sqrt{٣}ت)^{\frac{١}{٢}}}{١ - ٤\sqrt{٣}ت}$ فأوجد قيم س ، ص الحقيقية .

الحل

أولاً نجد $(١ + ٤\sqrt{٣})^{\frac{١}{٢}}$ أي الجذور التربيعية للعدد المركب $١ + ٤\sqrt{٣}\,ت$

نفرض أن الجذر التربيعي للعدد $١ + ٤\sqrt{٣}\,ت$ هو $س + ص\,ت$

$\Leftarrow (س + ص\,ت)^{٢} = ١ + ٤\sqrt{٣}\,ت$

$\Leftarrow (س^{٢} - ص^{٢}) + (٢س\,ص)\,ت = ١ + ٤\sqrt{٣}\,ت$

$\Leftarrow س^{٢} - ص^{٢} = ١$ ---------- ①

، $٢س\,ص = ٤\sqrt{٣} \Leftarrow س\,ص = ٢\sqrt{٣}$ ---------- ②

من المعادلة ② $ص = \frac{٢\sqrt{٣}}{س}$ ---------- ③

بالتعويض عن ص في المعادلة رقم ① $\Leftarrow س^{٢} - (\frac{٢\sqrt{٣}}{س})^{٢} = ١$

$\Leftarrow س^{٢} - \frac{١٢}{س^{٢}} = ١ \Leftarrow س^{٤} - ١٢ = س^{٢}$

$\Leftarrow س^{٤} - س^{٢} - ١٢ = ٠ \Leftarrow (س^{٢} + ٣)(س^{٢} - ٤) = ٠$

$\Leftarrow س = \pm ٢$ أو $س = \pm\sqrt{-٣}$ (ونرفض القيمة $\pm\sqrt{-٣}$ لأن $س ، ص \in ح$)

عندما $س = ٢$ بالتعويض في المعادلة رقم ③ $\Leftarrow ص = \sqrt{٣}$

عندما $س = -٢$ بالتعويض في المعادلة رقم ③ $\Leftarrow ص = -\sqrt{٣}$

إذن الجذرين هما $٢ + \sqrt{٣}\,ت$ ، $-٢ - \sqrt{٣}\,ت$

$$\Leftarrow \frac{(١ + ٤\sqrt{٣}\,ت)^{\frac{١}{٢}}}{١ - ٤\sqrt{٣}\,ت} = \pm\frac{٢ + \sqrt{٣}\,ت}{١ - ٤\sqrt{٣}\,ت} = \pm\frac{(٢ + \sqrt{٣}\,ت) \times (١ + ٤\sqrt{٣}\,ت)}{(١ - ٤\sqrt{٣}\,ت) \times (١ + ٤\sqrt{٣}\,ت)}$$

$$= \pm\frac{(٢ - ١٢) + (٨\sqrt{٣} + \sqrt{٣})\,ت}{٤٩} = \pm\frac{-١٠ + ٩\sqrt{٣}\,ت}{٤٩} =$$

$$\Leftarrow س = \frac{١٠}{٤٩} ، -\frac{١٠}{٤٩} ، ص = \frac{٩\sqrt{٣}}{٤٩} ، -\frac{٩\sqrt{٣}}{٤٩}$$

إنتهى

٢٢) إذا كان : $س = ٨ - ٦ت$ فأوجد قيم $س^{\frac{٣}{٢}}$.

الحل

نفرض أن الجذر التربيعي للعدد $س = ٨ - ٦ت$ هو العدد المركب $س + ص\,ت$

$\Leftarrow (س + ص\,ت)^{٢} = ٨ - ٦\,ت$.

$\Leftarrow (س^{٢} - ص^{٢}) + (٢س\,ص)\,ت = ٨ - ٦\,ت$.

$\Leftarrow س^{٢} - ص^{٢} = ٨$ ---------- ①

، ٢س ص = −٦ ⇐ س ص = −٣ ---------- ②

من المعادلة ② س = $-\frac{٣}{ص}$ ---------- ③

بالتعويض عن س في المعادلة رقم ① ⇐ $\frac{٩}{ص^{٢}}$ − $ص^{٢}$ = ٨

⇐ ٩ − $ص^{٤}$ = ٨$ص^{٢}$

⇐ $ص^{٤}$ + ٨$ص^{٢}$ − ٩ = ٠ ⇐ ($ص^{٢}$ + ٩)($ص^{٢}$ − ١) = ٠

⇐ ص = ± $\sqrt{-٩}$ أو ص = ± ١ (ونرفض القيمة ± $\sqrt{-٩}$ لأن س ، ص ∈ ح)

عندما ص = ١ بالتعويض في المعادلة رقم ③ ⇐ س = −٣

عندما ص = −١ بالتعويض في المعادلة رقم ③ ⇐ س = ٣

إذن الجذرين هما ٣ − ت ، −٣ + ت

∵ $س^{\frac{٣}{٢}}$ = ($س^{\frac{١}{٢}}$)^{٣} ، $س^{\frac{١}{٢}}$ = ٣ − ت أو −٣ + ت

⇐ $س^{\frac{٣}{٢}}$ = (٣ − ت)^{٣} ، (−٣ + ت)^{٣}

(٣ − ت)^{٣} = (٣ − ت)(٣ − ت)^{٢} = (٣ − ت)(٨ − ٦ ت)

= (٢٤ − ٦) + (−٨ − ١٨) ت = ١٨ − ٢٦ ت

(−٣ + ت)^{٣} = (−٣ + ت)(−٣ + ت)^{٢} = (−٣ + ت)(٨ − ٦ ت)

= (−٢٤ + ٦) + (٨ + ١٨) ت = −١٨ + ٢٦ ت

إنتهى

٢٣) كون المعادلة التربيعية التي جذراها (٢ ω + ٢ $ω^{٢}$ − $ω^{٣}$)^{٣} ، (٢ − ٢ ω − ٢ $ω^{٢}$)^{٣} .

الحل

(٢ ω + ٢ $ω^{٢}$ − $ω^{٣}$)^{٣} = (٢ (ω + $ω^{٢}$) − $ω^{٣}$)^{٣} = (−٢ − ١)^{٣} = (−٣)^{٣} = −٢٧

(٢ − ٢ ω − ٢ $ω^{٢}$)^{٣} = (٢ − ٢ (ω + $ω^{٢}$))^{٣} = (٢ + ٢)^{٣} = (٤)^{٣} = ٦٤

⇐ مجموع الجذرين = −٢٧ + ٦٤ = ٣٧

، حاصل ضرب الجذرين = −٢٧ × ٦٤ = −١٧٢٨

∵ المعادلة التربيعية بعلومية جذريها يمكن كتابتها على الصورة :

$س^{٢}$ − (مجموع الجذرين) س + (حاصل ضرب الجذرين) = ٠

⇐ المعادلة التربيعية المطلوبه هي : $س^{٢}$ − ٣٧ س − ١٧٢٨

إنتهى

السؤال الأول : إختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :

١) $\sqrt{-١٤٤}$ يساوي :

أ) ١٢ ب) −١٢ ج) ١٢ت د) −١٢ت

٢) $ت^{٣٥}$ = :

أ) ت ب) − ت ج) ١ د) −١

٣) مرافق العدد المركب ع = ٣ت − ٥ يساوي :

أ) ٣ت + ٥ ب) −٣ت − ٥ ج) −٣ت + ٥ د) −٣ت

٤) إذا كان ٣س − ٢ت ص = $(٥ − ت)^{٢}$ فإن قيمتي س ، ص على الترتيب هما :

أ) ٨ ، ٥ ب) $\frac{٢٦}{٣}$ ، ٥ ج) ٨ ، −٥ د) ٥ ، ٨

٥) السعة الأساسية للعدد المركب ع = ١ − ت تساوي :

أ) $\frac{\pi}{٤}$ ب) $\frac{٣\pi}{٤}$ ج) $\frac{٧\pi}{٤}$ د) $\frac{٥\pi}{٤}$

٦) $\frac{٥ - ٣\omega^{٢}}{٥\omega - ٣}$ = :

أ) ١ ب) $\omega^{٢}$ ج) ω د) $-\omega^{٢}$

٧) (١١ − ٤ت) + (٧ − ٥ت) + ٣ت = :

أ) ٤ − ٦ت ب) ٤ + ٤ت ج) ١٧ + ٤ت د) ٤ − ٢ت

٨) إذا كان ع = ٢ + ت فإن $ع^{-١}$ = :

أ) ٢ − ت ب) −٢ − ت ج) $\frac{٢}{٥} + \frac{١}{٥}$ ت د) $\frac{٢}{٥} - \frac{١}{٥}$ ت

٩) مجموعة حل المعادلة $س^{٤}$ = ١ حيث س ∈ ح تساوي :

أ) {±١} ب) {±ت} ج) {±١ ، ±ت} د) {١ ، ت}

١٠) الجذرين التربيعيين للعدد ω هما :

أ) $\pm\omega$ ب) $\pm\omega^{٢}$ ج) $\pm\omega$ ت د) ω ، $\omega^{٢}$

الحل

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإجابة الصحيحة	جـ	ب	ب	أ	جـ	ب	ب	د	جـ	ب

إنتهى

السؤال الثاني

أ) إذا كان $ع_١ = ١ + ٢ت$ ، $ع_٢ = ٣ - ٤ت$ ، جد :

١) $\overline{ع_١ + ٢ع_٢}$ ٢) $ع_١ \div ع_٢$

الحل

١) $\overline{ع_١ + ٢ع_٢} = \overline{ع_١} + \overline{٢ع_٢} = (١ - ٢ت) + ٢(٣ + ٤ت)$

$= (١ - ٢ت) + (٦ + ٨ت) = ٧ + ٦ت$

٢) $ع_١ \div ع_٢ = \frac{١ + ٢ت}{٣ - ٤ت} = \frac{١ + ٢ت}{٣ - ٤ت} \times \frac{٣ + ٤ت}{٣ + ٤ت} = \frac{(٣ - ٨) + (٤ + ٦)ت}{٢٥}$

$= -\frac{١}{٥} + \frac{٢}{٥}ت$

إنتهى

ب) إذا كان (−٣) جذراً للمعادلة $س^٣ + س^٢ - س + ١٥ = صفر$ فأوجد الجذرين الآخرين .

الحل

بما أن (−٣) جذراً للمعادلة $س^٣ + س^٢ - س + ١٥ = صفر$

⇐ (س + ٣) عامل من عوامل كثيرة الحدود $س^٣ + س^٢ - س + ١٥$ وبالقسمة الطويلة ينتج أن :

$س^٣ + س^٢ - س + ١٥ = (س + ٣)(س^٢ - ٢س + ٥)$

⇐ إما $س + ٣ = ٠$ ومنها $س = -٣$

أو $س^٢ - ٢س + ٥$

⇐ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{٢ \pm \sqrt{(-٢)^٢ - (٤ \times ١ \times ٥)}}{٢ \times ١} = \frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٢٠}}{٢}$

$= \frac{٢ \pm \sqrt{-١٦}}{٢} = \frac{٢ \pm ٤ت}{٢} = ١ \pm ٢ت$

⇐ م . ح = { −٣ ، ١ + ٢ت ، ١ − ٢ت }

إنتهى

السؤال الثالث

أ) أثبت أن : $\frac{١}{٤ + ٣\omega + ٢\omega^{٢}} + \frac{١}{٥ + ٣\omega + ٤\omega^{٢}} = ١$

الحل

$$\frac{١}{٤ + ٣\omega + ٢\omega^{٢}} + \frac{١}{٥ + ٣\omega + ٤\omega^{٢}}$$

$$= \frac{١}{٤ + \omega + ٢\omega + ٢\omega^{٢}} + \frac{١}{٥ + ٣\omega + ٣\omega^{٢} + \omega^{٢}}$$

$$= \frac{١}{٤ + \omega + ٢(\omega + \omega^{٢})} + \frac{١}{٥ + ٣(\omega + \omega^{٢}) + \omega^{٢}}$$

$$= \frac{١}{٤ + \omega - ٢} + \frac{١}{٥ - ٣ + \omega^{٢}} = \frac{١}{\omega + ٢} + \frac{١}{٢ + \omega^{٢}} = \frac{٢ + \omega + ٢ + \omega^{٢}}{(\omega + ٢)(٢ + \omega^{٢})}$$

$$= \frac{٤ + \omega + \omega^{٢}}{٤ + ٢\omega^{٢} + ٢\omega + \omega^{٢}} = \frac{٤ + (\omega + \omega^{٢})}{٤ + ٢(\omega + \omega^{٢}) + ١} = \frac{٤ - ٢ + ١}{٤ - ١} = \frac{٣}{٣} = ١$$

إنتهى

ب) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب ع = $٢ - ٢\sqrt{٣}$ ت .

الحل

نفرض أن الجذر التربيعي للعدد ع هو س + ص ت

⇐ $(س + ص ت)^{٢} = ٢ - ٢\sqrt{٣}$ ت

⇐ $(س^{٢} - ص^{٢}) + (٢س ص) ت = ٢ - ٢\sqrt{٣}$ ت

⇐ $س^{٢} - ص^{٢} = ٢$ ---------- ①

، $٢س ص = -٢\sqrt{٣}$ ⇐ $س ص = -\sqrt{٣}$ ---------- ②

من المعادلة ② $ص = -\frac{\sqrt{٣}}{س}$ ---------- ③

بالتعويض عن ص في المعادلة رقم ① ⇐ $س^{٢} - (-\frac{\sqrt{٣}}{س})^{٢} = ٢$

⇐ $س^{٢} - \frac{٣}{س^{٢}} = ٢$ ⇐ $س^{٤} - ٣ = ٢س^{٢}$

⇐ $س^{٤} - ٢س^{٢} - ٣ = ٠$ ⇐ $(س^{٢} - ٣)(س^{٢} + ١) = ٠$

⇐ $س = \pm\sqrt{٣}$ أو $س = \pm\sqrt{-١}$ (ونرفض القيمة $\pm\sqrt{-١}$ لأن س ، ص ∈ ح)

عندما س = $\sqrt{٣}$ بالتعويض في المعادلة رقم ③ ⇐ ص = −١

عندما س = − $\sqrt{٣}$ بالتعويض في المعادلة رقم ③ ⇐ ص = ١

إذن الجذرين هما $\sqrt{٣}$ − ت ، − $\sqrt{٣}$ + ت

إنتهى

السؤال الرابع

أ) كون معادلة الدرجة الثانية التي جذراها : $\frac{١}{\omega + ١}$ ، $\frac{١}{\omega^{٢} + ١}$

الحل

$$\frac{١}{\omega + ١} = \frac{١}{-\omega^{٢}} = \frac{-\omega}{\omega^{٣}} = -\omega$$

$$\frac{١}{\omega^{٢} + ١} = \frac{١}{-\omega} = \frac{-\omega^{٢}}{\omega^{٣}} = -\omega^{٢}$$

⇐ مجموع الجذرين = $-\omega + -\omega^{٢}$ = ١ ، حاصل ضرب الجذرين = $-\omega \times -\omega^{٢} = \omega^{٣}$ = ١

∵ المعادلة التربيعية بعلومية جذريها يمكن كتابتها على الصورة :

س^{٢} − (مجموع الجذرين) س + (حاصل ضرب الجذرين) = ٠

⇐ المعادلة التربيعية المطلوبه هي : س^{٢} − س + ١

إنتهى

ب) أكتب العدد المركب ع = ٢ − ٢ت على الصورة القطبية .

الحل

المقياس = | ع | = $\sqrt{٢^{٢} + ٢^{٢}}$ = $\sqrt{٨}$ = ٢ $\sqrt{٢}$

جتا هـ = $\frac{٢}{٢\sqrt{٢}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا هـ = − $\frac{٢}{٢\sqrt{٢}}$ = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ولأن جتا هـ مقدار موجب و جا هـ مقدار سالب ⇐ هـ عبارة عن زاوية تقع في الربع الرابع وزاوية إسنادها $\frac{\pi}{٤}$

⇐ السعة هـ = ٢ π − $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{٧\pi}{٤}$

⇐ الصورة القطبية للعدد المركب ع = ٢ $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٧\pi}{٤}$ + حا $\frac{٧\pi}{٤}$ ت)

إنتهى

السؤال الخامس

أ) جد السعة الأساسية للعدد ع = −٦ (جتا ٢٢٥° − ت جا ٢٢٥°) .

الحل

ع = −٦ (جتا ٢٢٥° − ت جا ٢٢٥°) = −٦ ($-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت)

= $\frac{٦}{\sqrt{٢}}$ − $\frac{٦}{\sqrt{٢}}$ ت

المقياس = | ع | = $\sqrt{١٨ + ١٨}$ = $\sqrt{٣٦}$ = ٦

جتا هـ = $\frac{٦}{٦\sqrt{٢}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا هـ = − $\frac{٦}{٦\sqrt{٢}}$ = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ولأن جتا هـ مقدار موجب و جا هـ مقدار سالب ⇐ هـ عبارة عن زاوية تقع في الربع الرابع وزاوية إسنادها $\frac{\pi}{٤}$

⇐ السعة هـ = ٢ π − $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{٧\pi}{٤}$

⇐ الصورة القطبية للعدد المركب ع = ٦ (جتا $\frac{٧\pi}{٤}$ + حا $\frac{٧\pi}{٤}$ ت)

إنتهى

ب) أثبت أن : ع = $\frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢}$ هو أحد جذور المعادلة ٤ع^{١٥} + ٣ع^{١٦} + ٣ع^{١٧} − ١ = صفر .

الحل

حيث أن $\frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢}$ أحد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح : نفرض أن $\frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢}$ = ω

⇐ ٤ع^{١٥} + ٣ع^{١٦} + ٣ع^{١٧} − ١ = ٤ $\omega^{١٥}$ + ٣ $\omega^{١٦}$ + ٣ $\omega^{١٧}$ − ١

= ٤ $\omega^{١٥}$ + ٣ $\omega^{١٥}$ × ω + ٣ $\omega^{١٥}$ × $\omega^{٢}$ − ١

= ٤ ($\omega^{٣}$)^{٥} + ٣ ($\omega^{٣}$)^{٥} × ω + ٣ ($\omega^{٣}$)^{٥} × $\omega^{٢}$ − ١

= ٤ × ١ + ٣ × ١ × ω + ٣ × ١ × $\omega^{٢}$ − ١ = ٤ + ٣ ω + ٣ $\omega^{٢}$ − ١

= ٣ + ٣ ω + ٣ $\omega^{٢}$ = ٣ (١ + ω + $\omega^{٢}$) = ٣ × ٠ = ٠

⇐ ع = $\frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢}$ هو أحد جذور المعادلة ٤ع^{١٥} + ٣ع^{١٦} + ٣ع^{١٧} − ١

إنتهى

السؤال الأول : إختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :

١) الحد العام للمتتالية : $-\frac{١}{٣}$ ، ١ ، −٣ ، ..... هو :

أ) ٤ن − ٧ ب) $(-\frac{١}{٣})^{ن}$ ج) $-\frac{١}{٣}(-٣)^{ن-١}$ د) $-\frac{١}{٣}$ + ٣(ن − ١)

٢) الحد العام للمتتالية : −٥ ، −١ ، ٣ ، ٧ ، ..... هو :

أ) −٤(ن + ٥) ب) ٤ن − ٩ ج) ن − ٥ د) ٤ن

٣) الحد النوني للمتتالية : ٨ ، ١١ ، ١٤ ، ١٧ ، ..... هو :

أ) ٣ن + ٥ ب) ٢ن + ٧ ج) ٦ن + ٢ د) ٨ن − ٥

٤) الحد العام للمتتالية : −٢ ، ٣ ، ٨ ، ١٣ ، ..... هو :

أ) −٢ + ٥(ن + ١) ب) −٢ + ٥(ن − ١) ج) −٢ + ٥ن د) −٢ − ٥ن

٥) مجموع المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{٥}$ (ر − ١) يساوي :

أ) ١ ب) ٣ ج) ١٠ د) ١١

٦) مجموع المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{٨}$ (٣ر + ٢) يساوي :

أ) ٢٥ ب) ٢٦ ج) ١٢٠ د) ١٢٤

٧) مجموع المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{٥}$ (٢ر − ١) يساوي :

أ) ١٥ ب) ٢٥ ج) ٣٥ د) ٤٥

٨) $\sum_{ر=١}^{٥} \frac{٣}{٤}(-٢)^{ر+١}$ يساوي :

أ) ٣ ، −٦ ، ١٢ ، −٢٤ ، ٤٨ ب) $-\frac{٣}{٢} + ٣ - \frac{٩}{٢} + ٦ - \frac{١٥}{٢}$

ج) ٣ + ٦ + ١٢ + ٢٤ + ٤٨ د) ٣ − ٦ + ١٢ − ٢٤ + ٤٨

٩) الأوساط الحسابية الثلاثة بين العددين ٧ ، ٢٧ هي :

أ) ٢٠ ، ١٦ ، ١٢ ب) ٢١ ، ١٦ ، ١١ ج) ١٩ ، ١٥ ، ١١ د) ١٧ ، ١٢ ، ٢٢

١٠) إذا كانت المتتالية ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ..... فإن $ح_{١٢}$ = :

أ) ٣٦ ب) ٣٩ ج) ٤٢ د) ٤٥

١١) واحدة مما يلي متتالية حسابية :

أ) ٨ ، ٣ ، −٢ ، −٥ ب) ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦

ج) −٢ ، ٠ ، ٢ ، ٤ د) −١ ، −٥ ، −٩ ، −١٢

١٢) في المتتالية : ١٠٠ ، ٩٨ ، ٩٦ ، ..... إذا كان $ح_{ن}$ = ١٠٢ − ٢ن فإن رتبة أول حد سالب هي :

أ) ٥٠ ب) ٥٢ ج) ٥٣ د) ٥١

١٣) عند وضع ٥ أوساط حسابية بين −١٢ ، ١١٤ فإن عدد حدود المتتاية يصبح :

أ) ٧ ب) ٦ ج) ٥ د) ٨

١٤) بدأ رجل عمله في شركة براتب سنوي قدره ٤٨٠٠ دينار وكان يأخذ علاوة سنوية قدرها ١٨٠ دينار فإن راتبه السنوي بعد ١٥ سنة يصبح :

أ) ٧٥٠٠ دينار ب) ٧٣٢٠ دينار ج) ٧٣٠٠ دينار د) ٧٣٥٠ دينار

١٥) في المتتالية الحسابية $ح_{ن}$ الغير ثابتة يكون $ح_{٤} + ح_{١٢} \neq$

أ) $٢ح_{٨}$ ب) $ح_{٢} + ح_{١٤}$ ج) $ح_{٣} + ح_{١٤}$ د) $ح_{١} + ح_{١٥}$

١٦) إذا أدخلت ٤ أوسلط حسابية بين ٥ ، ١٥ فإن الوسط الحسابي الثالث هو :

أ) ٥ ب) ٧ ج) ٩ د) ١١

١٧) في متتالية حسابية إذا كان $ح_{١}$ = ٣ ، $ح_{٧}$ = ١٥ فإن $ح_{٤}$ =

أ) ٩ ب) ١٢ ج) ١٨ د) ٤٥

١٨) في متتالية حسابية إذا كان $ح_{ن} - ٤ = ح_{ن+٢}$ ∀ ن ∈ ص+ فإن أساسها :

أ) −٤ ب) −٢ ج) ٢ د) ٤

١٩) إذا كان $ج_{ن}$ = $٢ن^{٢}$ − ٧ن يمثل مجموع ن حداً الأولى من متتابعة حسابية فإن رتبة الحد الذي قيمته ١٩ هي :

أ) ٦٧ ب) ٨ ج) ٧ د) ٦

٢٠) متتالية حسابية مجموع حدودها الثلاثة الأولى ٢٧ فإن الحد الثاني في هذه المتتالية هو :

أ) ٣ ب) ٦ ج) ٩ د) ٢٧

٢١) إذا كان مجموع ن حداً الأولى من متتابعة حسابية $ج_ن = ن^٢ + ٢ن$ فإن حدها الثاني = :

أ) ١١ ب) ٨ ج) ٥ د) ٣

٢٢) المتتالية ٣ ، ١ ، $\frac{١}{٣}$ ، ..... هي متتالية

أ) حسابية ب) هندسية ج) لا حسابية ولا هندسية د) منتهية

٢٣) $ح_٦$ في المتتالية : ١ ، ٣ ، ٩ ، ..... هو :

أ) $\frac{١}{٧٢٩}$ ب) ٣٤٢ ج) ٢٤٣ د) ٧٢٩

٢٤) الوسط الهندسي الموجب للعددين ٩ ، ٢٥ هو :

أ) ١٧ ب) ١٥ ج) ٣٤ د) ٢٢٥

٢٥) المتتالية : −٣ ، ١ ، ٥ ، .....

أ) حسابية أساسها −٢ ب) حسابية أساسها ٤ ج) هندسية أساسها $-\frac{١}{٣}$ د) هندسية أساسها ٥

٢٦) متتالية هندسية حدودها موجبة فيها $ح_٢ = ٦$ ، $ح_٤ = ٢٤$ فإن $ح_٦$ =

أ) ٣٠ ب) ٦٤ ج) ٩٦ د) ١٩٢

٢٧) متتالية هندسية فيها $ح_٣ = ١٢$ ، $ح_٥ = ٤٨$ فإن أ =

أ) −١٢ ب) ٢ ج) ٣ د) ١٢

٢٨) رتبة أول حد أصغر من الواحد الصحيح في المتتالية الهندسية ١٠٢٤ ، ٥١٢ ، ٢٥٦ ، ١٢٨ ، ..... هي :

أ) ١٠ ب) ١١ ج) ١٢ د) ١٣

٢٩) إذا بدأ موظف براتب شهري ٣٦٠ دينار ويتزايد هذا المرتب كل شهر بمعدل $\frac{١}{٢٠}$ عما كان عليه في الشهر السابق فإن مرتبه بعد ١١ شهر يصبح :

أ) ٢٨٦,٥ دينار ب) ٨٦٥,٥ دينار ج) ٥٨٦,٥ دينار د) ٦٨٥,٥ دينار

٣٠) إذا كانت ٢٤ ، ..... ، ٦ متتالية هندسية أساسها موجب وعدد حدودها فردي فإن حدها الأوسط هو :

أ) ١٥ ب) −١٥ ج) ١٢ د) −١٢

٣١) إذا كونت $\frac{٣}{٤}$ ، ص ، ١٢ متتالية هندسية جميع حدودها موجبة فإن ص = :

أ) ٣ ب) ٤ ج) ٦ د) ٩

٣٢) إبتداء من الحد الخامس مجموع الثمانية حدود للمتتالية ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، .....يساوي :

أ) ٥١٠ ب) ٨١٦٠ ج) ١٢٧٥ د) ٨١٩١

٣٣) إذا كان مجموع ن حداً الأولى من متتالية هندسية $ج_ن = ٢^{ن+٢} - ٤$ فإن $ح_٥$ =

أ) ٣٢ ب) ١٢٨ ج) ١٦ د) ٦٤

٣٤) في متتالية هندسية إذا كان $ح_٢ = ٢$ ، $ح_٥ = ١٦$ ، فإن مجموع الحدود الستة الأولى هو :

أ) ٦٣ ب) ٦٤ ج) ٣١ د) ٣٢

٣٥) مجموع المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{\infty} (\frac{٢}{٣})^{ن-١}$ =

أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) لا يمكن

٣٦) مجموع المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{\infty} (\frac{٣}{٤})^{ن}$ =

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) ٧ ج) ليس لها مجموع د) ٣

الحل

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
الإجابة الصحيحة	ج	ب	أ	ب	ج	د	ب	أ	د	ب	ج	ب
رقم السؤال	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٤
الإجابة الصحيحة	أ	ب	ج	د	أ	ب	ج	ج	ج	ب	ج	ب
رقم السؤال	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	٣١	٣٢	٣٣	٣٤	٣٥	٣٦
الإجابة الصحيحة	ب	ج	ج	ج	ج	ج	أ	ب	د	أ	ج	د

إنتهى

السؤال الثاني : أجب عن الأسئلة الآتية حسب المطلوب :

١ عين المتتالية الحسابية التي فيها $ح_٤ = -٣٣$ ، $ح_٩ = -١٣$ ثم أوجد رتبة أول حد موجب فيها .

الحل

$ح_٤ = -٣٣ \Leftarrow أ + ٣د = -٣٣$ ---------- ①

$ح_٩ = -١٣ \Leftarrow أ + ٨د = -١٣$ ---------- ②

② − ① ⇐ ٥د = ٢٠ ⇐ د = ٤ وبالتعويض عن قيمة د في معادلة رقم ①

⇐ أ + ١٢ = −٣٣ ⇐ أ = −٣٣ − ١٢ ⇐ أ = −٤٥

⇐ المتتالية هي : −٤٥ ، −٤١ ، −٣٧ ، −٣٣ ، .....

لإيجاد رتبة أول حد موجب في المتتالية نجد قيم ن من خلال حل المتباينة $ح_ن > ٠$

$ح_ن > ٠$ ⇐ أ + د(ن − ١) > ٠ ⇐ −٤٥ + ٤ (ن − ١) > ٠ ⇐ −٤٥ + ٤ن − ٤ > ٠

⇐ ٤ن > ٤٩ ⇐ ن > $\frac{٤٩}{٤}$ ⇐ ن > ١٢,٢٥ ⇐ رتبة أول حد موجب في المتتالية هو ١٣

إنتهى

٢ إذا كان مجموع الثلاث حدود الأولى من متتالية حسابية هو ١٥ ومجموع مربعاتها ٨٣ فما هي المتتالية ؟

الحل

نفرض أن الأعداد هي : (أ − د) ، أ ، (أ + د)

مجموعهم = ١٥ ⇐ (أ − د) + أ + (أ + د) = ١٥ ⇐ ٣أ = ١٥ ⇐ أ = ٥

مجموع مربعاتهم = ٨٣ ⇐ $(أ − د)^٢$ ، $أ^٢$ ، $(أ + د)^٢$ = ٨٣

⇐ $أ^٢ - ٢أد + د^٢ + أ^٢ + أ^٢ + ٢أد + د^٢ = ٨٣$ ⇐ $٣أ^٢ + ٢د^٢ = ٨٣$

بالتعويض عن قيمة أ = ٥

⇐ $٧٥ + ٢د^٢ = ٨٣$ ⇐ $٢د^٢ = ٨$ ⇐ $د^٢ = ٤$ ⇐ د = ± ٢

عندما د = ٢

تكون المتتالية : ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ .....

عندما د = −٢

تكون المتتالية : ٧ ، ٥ ، ٣ ، ١ ، −١ ، −٣ .....

حـل آخـر

$ج_{٣} = \frac{٣}{٢}$ [٢أ + (٣ − ١)د] = $\frac{٣}{٢}$ (٢أ + ٢د) = ٣ (أ + د)

مجموع الثلاث حدود الأولى من المتتالية هو ١٥ ⇐ ٣ (أ + د) = ١٥

⇐ أ + د = ٥ ⇐ د = ٥ − أ ---------- (١)

∵ مجموع مربعات الحدود الثلاثة الأولى يساوي ٨٣

⇐ $أ^{٢}$ + $(أ + د)^{٢}$ + $(أ + ٢د)^{٢}$ = ٨٣ ---------- (٢)

وبالتعويض عن قيمة د من معادلة (١) في المعادلة (٢) ينتج أن :

$أ^{٢}$ + $(أ + ٥ − أ)^{٢}$ + $(أ + ١٠ − ٢أ)^{٢}$ = ٨٣ ⇐ $أ^{٢}$ + $(٥)^{٢}$ + $(−أ + ١٠)^{٢}$ = ٨٣

⇐ $أ^{٢}$ + $(٥)^{٢}$ + $(−أ + ١٠)^{٢}$ = ٨٣ ⇐ $أ^{٢}$ + $(٥)^{٢}$ + $أ^{٢}$ − ٢٠أ + ١٠٠ = ٨٣

⇐ $٢أ^{٢}$ − ٢٠أ + ١٢٥ = ٨٣ ⇐ $٢أ^{٢}$ − ٢٠أ + ٤٢ = ٠ ⇐ $أ^{٢}$ − ١٠أ + ٢١ = ٠

⇐ (أ − ٣)(أ − ٧) = ٠ ⇐ إما أ − ٣ = ٠ ومنها أ = ٣ أو أ − ٧ = ٠ ومنها أ = ٧

عندما أ = ٣

من معادلة (١) ⇐ د = ٥ − ٣ ⇐ د = ٢

فتكون المتتالية : ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ .....

عندما أ = ٧

من معادلة (١) ⇐ د = ٥ − ٧ ⇐ د = −٢

فتكون المتتالية : ٧ ، ٥ ، ٣ ، ١ ، −١ ، −٣ .....

إنتهى

٣ إذا كانت س ، ب ، جـ ، ص هي الحدود الأربعة الأولى في متتالية حسابية جميع حدودها موجبة وكان س ص = ٥٢ ، $ب^{٢}$ + $جـ^{٢}$ = ١٤٩ أوجد المتتالية .

الحل

∵ س ، ب ، جـ ، ص هي الحدود الأربعة الأولى في متتالية حسابية

⇐ ٢ب = س + جـ ⇐ س = ٢ب − جـ

كذلك ٢جـ = ص + ب ⇐ ص = ٢جـ − ب

∵ س ص = ٥٢ ⇐ (٢ب − جـ)(٢جـ − ب) = ٥٢

⇐ ٤ب جـ − $٢ب^{٢}$ − $٢جـ^{٢}$ + ب جـ = ٥٢

⇐ ٥ب جـ − $٢ب^{٢}$ − $٢جـ^{٢}$ = ٥٢ ---------- (١)

∵ $ب^{٢}$ + $جـ^{٢}$ = ١٤٩ ⇐ ب = $\sqrt{١٤٩ − جـ^{٢}}$

بالتعويض في (١) عن ب ⇐ ٥ جـ $\sqrt{١٤٩ − جـ^{٢}}$ − ٢(١٤٩ − $جـ^{٢}$) − $٢جـ^{٢}$ = ٥٢

⇐ ٥ جـ $\sqrt{١٤٩ - جـ^٢}$ − ٢٩٨ + ٢جـ^٢ − ٢جـ^٢ = ٥٢

⇐ ٥ جـ $\sqrt{١٤٩ - جـ^٢}$ − ٢٩٨ = ٥٢ ⇐ ٥ جـ $\sqrt{١٤٩ - جـ^٢}$ = ٣٥٠

⇐ جـ $\sqrt{١٤٩ - جـ^٢}$ = ٧٠ ⇐ جـ^٢ (١٤٩ − جـ^٢) = ٤٩٠٠ (وذلك بتربيع الطرفين)

⇐ جـ^٤ − ١٤٩ جـ^٢ + ٤٩٠٠ = ٠ ⇐ (جـ^٢ − ١٠٠)(جـ^٢ − ٤٩) = ٠

⇐ جـ^٢ = ١٠٠ أو جـ^٢ = ٤٩

⇐ جـ = ± ١٠ أو جـ = ± ٧ وحيث أن جـ قيمة موجبة

⇐ جـ = ١٠ أو جـ = ٧

عندما جـ = ١٠

من المعادلة ب = $\sqrt{١٤٩ - جـ^٢}$ ⇐ ب = ± ٧ ⇐ ب = ٧ (لأن ب موجبة)

∵ س = ٢ب − جـ ⇐ س = ١٤ − ١٠ = ٤

∵ ص = ٢جـ − ب ⇐ ص = ٢٠ − ٧ = ١٣

فتكون المتتالية هي : ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، .....

عندما جـ = ٧

من المعادلة ب = $\sqrt{١٤٩ - جـ^٢}$ ⇐ ب = ± ١٠ ⇐ ب = ١٠ (لأن ب موجبة)

∵ س = ٢ب − جـ ⇐ س = ٢٠ − ٧ = ١٣

∵ ص = ٢جـ − ب ⇐ ص = ١٤ − ١٠ = ٤

فتكون المتتالية هي : ١٣ ، ١٠ ، ٧ ، ٤ ، ١ ، .....

إنتهى

٤ متتالية حسابية يزيد حدها الخامس عن حدها الثالث بمقدار ٦ ومجموع حديها الرابع والثامن يساوي ٣٨ أوجد المتتالية وحدها العام .

الحل

ح$_٥$ = ح$_٣$ + ٦ ⇐ أ + ٤د = أ + ٢د + ٦ ⇐ ٢د = ٦ ⇐ د = ٣

ح$_٤$ + ح$_٨$ = ٣٨ ⇐ أ + ٣د + أ + ٧د = ٣٨ ⇐ ٢ أ + ١٠د = ٣٨

⇐ أ + ٥د = ١٩ وبالتعويض عن قيمة د = ٣ ينتج أن : أ + ١٥ = ١٩ ⇐ أ = ٤

فتكون المتتالية : ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٦ .....

الحد العام ح$_ن$ = أ + د(ن − ١) = ٤ + ٣(ن − ١) = ٤ + ٣ن − ٣ = ٣ن + ١

إنتهى

٥ ستة أعداد تكون متتالية حسابية مجموعها ٢١ وحاصل ضرب أكبرها في أصغرها = −١٤٤ فما هي هذه الأعداد ؟

الحل

نفرض أن هذه الأعداد هي : أ ، أ + د ، أ + ٢د ، أ + ٣د ، أ + ٤د ، أ + ٥د

إذا كان أصغر هذه الأعداد هو الحد الأول أ فإن أكبرها الحد السادس هو ل = أ + ٥د

مجموعها ٢١ ⇐ أ + أ + د + أ + ٢د + أ + ٣د + أ + ٤د + أ + ٥د = ٢١

⇐ ٦أ + ١٥د = ٢١ ⇐ ٢أ + ٥د = ٧

⇐ ٥د = ٧ − ٢أ ---------- (١)

وحاصل ضرب أكبرها في أصغرها = −١٤٤

⇐ (أ)(أ + ٥د) = −١٤٤ ---------- (٢)

وبالتعويض عن قيمة ٥د من المعادلة (١) في معادلة (٢) ينتج أن :

(أ)(أ + ٧ − ٢أ) = −١٤٤ ⇐ (أ)(−أ + ٧) = −١٤٤ ⇐ −أ^{٢} + ٧أ = −١٤٤

⇐ أ^{٢} − ٧أ − ١٤٤ = صفر ⇐ (أ + ٩)(أ − ١٦) = صفر ⇐ أ = −٩ أو أ = ١٦

عندما أ = −٩ بالتعويض في (١) ⇐ ٥د = ٢٥ ⇐ د = ٥

وتكون الأعداد : −٩ ، −٤ ، ١ ، ٦ ، ١١ ، ١٦

عندما أ = ١٦ بالتعويض في (١) ⇐ ٥د = −٢٥ ⇐ د = −٥

وتكون الأعداد : ١٦ ، ١١ ، ٦ ، ١ ، −٤ ، −٩

إنتهى

٦ أوجد مجموع ٣٠ حداً الأولى من المتتالية ح$_{ن}$ حيث :

ح$_{ن}$ = { ٢ن − ٣ إذا كانت ن فردية ؛ ٣ن − ٢ إذا كانت ن زوجية }

الحل

ح$_{ن}$ = { −١ ، ٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ..... إذا كانت ن فردية ؛ ٤ ، ١٠ ، ١٦ ، ٢٢ ، ٢٨ ، ..... إذا كانت ن زوجية }

أي أن : ح$_{ن}$ = −١ ، ٤ ، ٣ ، ١٠ ، ٧ ، ١٦ ، ١١ ، ٢٢ ، ١٥ ، ٢٨ ، .....

عندما ن فردية : أ = −١ ، د = ٤

فتكون المتتالية هي : −١ ، ٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، .....

ج$_{١٥}$ (الفردية) = $\frac{١٥}{٢}$ (−٢ + (١٤ × ٤)) = $\frac{١٥}{٢}$ (−٢ + ٥٦) = $\frac{١٥}{٢}$ × ٥٤ = ٤٠٥

عندما ن زوجية : أ = ٤ ، د = ٦

فتكون المتتالية هي : ٤ ، ١٠ ، ١٦ ، ٢٢ ، ٢٨ ، .....

$جـ_{١٥}$ (الزوجية) = $\frac{١٥}{٢}$ (٨ + (١٤ × ٦)) = $\frac{١٥}{٢}$ (٨ + ٨٤) = $\frac{١٥}{٢}$ × ٩٢ = ٦٩٠

مجموع ٣٠ حداً الأولى من المتتالية $ح_{ن}$ = $جـ_{١٥}$ (الفردية) + $جـ_{١٥}$ (الزوجية) = ٤٠٥ + ٦٩٠ = ١٠٩٥

إنتهى

٧ متتالية حسابية فيها : $\frac{جـ_{ن}\ الأولى}{جـ_{٢ن}\ الأولى}$ = $\frac{٣ن - ١}{١٢ن - ٢}$ ، $ح_{٣}^{٢}$ = ١٩٦ أوجد المتتالية وأثبت أن المسألة لها حلين وأوجدهما ثم أوجد مجموع العشرة حدود الأولى في كل منهما .

الحل

$جـ_{ن}$ الأولى = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) × د]

$جـ_{ن}$ الثانية = $\frac{٢ن}{٢}$ [٢ أ + (٢ن − ١) × د] = ن [٢ أ + (٢ن − ١) × د]

⇐ $\frac{جـ_{ن}\ الأولى}{جـ_{٢ن}\ الأولى}$ = $\frac{\frac{ن}{٢}\ [٢ أ + (ن − ١) × د]}{ن\ [٢ أ + (٢ن − ١) × د]}$ = $\frac{[٢ أ + (ن − ١) × د]}{٢ [٢ أ + (٢ن − ١) × د]}$

∵ $\frac{جـ_{ن}\ الأولى}{جـ_{٢ن}\ الأولى}$ = $\frac{٣ن - ١}{١٢ن - ٢}$ ⇐ $\frac{[٢ أ + (ن − ١) × د]}{٢ [٢ أ + (٢ن − ١) × د]}$ = $\frac{٣ن - ١}{١٢ن - ٢}$

⇐ $\frac{[٢ أ + (ن − ١) × د]}{[٢ أ + (٢ن − ١) × د]}$ = $\frac{٦ن - ٢}{١٢ن - ٢}$

من خواص التناسب أنه إذا كان $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{د}{جـ}$ فإن $\frac{أ - ب}{ب}$ = $\frac{د - جـ}{جـ}$

⇐ $\frac{[٢ أ + (ن − ١) × د] - [٢ أ + (٢ن − ١) × د]}{[٢ أ + (٢ن − ١) × د]}$ = $\frac{[٦ن − ٢] - [١٢ن − ٢]}{١٢ن − ٢}$

⇐ $\frac{− ن د}{[٢ أ + (٢ن − ١) × د]}$ = $\frac{− ٣ن}{٦ن − ١}$ ⇐ $\frac{د}{[٢ أ + (٢ن − ١) × د]}$ = $\frac{٣}{٦ن − ١}$

⇐ (٦ن − ١) × د = ٦ أ + (٦ن − ٣) × د ⇐ ٦ أ = (٦ن − ١) × د − (٦ن − ٣) × د

⇐ ٦ أ = ٢ د ⇐ ٢ د = ٦ أ ---------- ①

∵ $ح_{٣}^{٢}$ = ١٩٦ ⇐ (أ + ٢د)^{٢} = ١٩٦ ⇐ (أ + ٦ أ)^{٢} = ١٩٦ ⇐ (٧ أ)^{٢} = ١٩٦

⇐ ٧ أ = ± ١٤ ⇐ أ = ± ٢

عندما أ = ٢ بالتعويض في ① ⇐ ٢ د = ١٢ ⇐ د = ٦

وتكون المتتالية : ٢ ، ٨ ، ١٤ ، ٢٠ ، .....

ويكون مجموع أول ١٠ حدود $جـ_{١٠}$ = ٥ [٤ + (٩ × ٦)] = ٥ × ٥٨ = ٢٩٠

عندما أ = −٢ بالتعويض في ① ⇐ ٢ د = −١٢ ⇐ د = −٦

وتكون المتتالية : −٢ ، −٨ ، −١٤ ، −٢٠ ، .....

ويكون مجموع أول ١٠ حدود $ج_{١٠}$ = ٥ [−٤ + (٩ × −٦)] = ٥ × −٥٨ = −٢٩٠

إنتهى

٨ متتالية حسابية حدها العاشر خمسة أمثال حدها الثاني وحدها الخامس يساوي ١٠ أوجد الحد الأول والأساس وعدد الحدود التي مجموعها إبتداءاً من الحد الأول هو ٣٨٠ .

الحل

حدها العاشر خمسة أمثال حدها الثاني ⇐ $ح_{١٠}$ = ٥$ح_{٢}$ ⇐ أ + ٩ د = ٥ (أ + د)

⇐ أ + ٩ د = ٥ أ + ٥ د ⇐ أ = د

∵ $ح_{٥}$ = ١٠ ⇐ أ + ٤ د = ١٠ وبالتعويض عن قيمة د = أ

⇐ أ + ٤ أ = ١٠ ⇐ أ = ٢ ⇐ د = ٢ (لأن أ = د)

إذن المتتالية: ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، .....

∵ مجموع أول ن من الحدود ٣٨٠

$ج_{ن}$ = ٣٨٠ ⇐ $\frac{ن}{٢}$ (٤ + (ن − ١) × ٢) = ٣٨٠ ⇐ $\frac{ن}{٢}$ (٢ن + ٢) = ٣٨٠

⇐ ن (ن + ١) = ٣٨٠ ⇐ $ن^{٢}$ + ن − ٣٨٠ = صفر ⇐ (ن + ٢٠) (ن + ١٩) = صفر

⇐ ن = −٢٠ (مرفوض) أو ن = ١٩ (مقبول)

إذن الحدود التي مجموعها إبتداءاً من الحد الأول هو ٣٨٠ عددها ١٩ حد

إنتهى

٩ أوجد مجموع الأعداد الصحيحة الواقعة بين ١٠٠ ، ١٥٠ والتي لا تقبل القسمة على ١١ .

الحل

مجموع الأعداد الصحيحة الواقعة بين ١٠٠ ، ١٥٠ هي : ١٠١ ، ١٠٢ ، ١٠٣ ، ١٤٩

وهي متتالية حسابية فيها : أ = ١٠١ ، د = ١ ، ن = ٤٩

مجموعها $ج_{٤٩}$ = $\frac{٤٩}{٢}$ (١٠١ + ١٤٩) = $\frac{٤٩}{٢}$ × ٢٥٠ = ٦١٢٥

مجموع الأعداد الصحيحة الواقعة بين ١٠٠ ، ١٥٠ والتي تقبل القسمة على ١١ هي :

١١٠ ، ١٢١ ، ١٣٢ ، ١٤٣

وهي متتالية حسابية مجموعها = ١١٠ + ١٢١ + ١٣٢ + ١٤٣ = ٥٠٦

فيكون مجموع الأعداد الصحيحة الواقعة بين ١٠٠ ، ١٥٠ والتي لا تقبل القسمة على ١١ يساوي :

مجموع الأعداد من ١٠١ إلى ١٤٩ − مجموع الأعداد الصحيحة الواقعة بين ١٠٠ ، ١٥٠ والتي تقبل القسمة على ١١

= ٦١٢٥ − ٥٠٦ = ٥٦١٩

إنتهى

١٠ متتالية حسابية مجموع الحدود الثاني والرابع والخامس منها يساوي ١٨ ومجموع الثلاثة عشر حداً الأولى منها يساوي ١٣ أوجد هذه المتتالية ثم أوجد أول حد سالب فيها .

الحل

مجموع الحدود الثاني والرابع و الخامس $ح_٢ + ح_٤ + ح_٥ = ١٨$

$\Leftarrow$ (أ + د) + (أ + ٣ د) + (أ + ٤ د) = ١٨ $\Leftarrow$ ٣ أ + ٨ د = ١٨ ---------- ①

$ج_{١٣} = ١٣ \Leftarrow \frac{١٣}{٢}$ (٢ أ + ١٢ د) = ١٣ $\Leftarrow$ أ + ٦ د = ١ ---------- ②

بضرب المعادلة ② في ٣ وطرحها من ① $\Leftarrow$ ٨ د − ١٨ د = ١٥ $\Leftarrow$ د = $-\frac{١٥}{١٠} = -\frac{٣}{٢}$

بالتعويض عن قيمة د في ② $\Leftarrow$ أ + ٦ × ($-\frac{٣}{٢}$) = ١ $\Leftarrow$ أ − ٩ = ١ $\Leftarrow$ أ = ١٠

وبناءاً عليه تصبح المتتالية : ١٠ ، ٨,٥ ، ٧ ، ٥,٥ ، ٤ ، .....

لإيجاد أول حد سالب قي المتتالية نحل المعادلة $ح_ن < ٠$

$ح_ن$ = أ + (ن − ١) × د = ١٠ + (ن − ١) × $-\frac{٣}{٢}$ = ١١,٥ − ١,٥ ن

∵ $ح_ن < ٠ \Leftarrow$ ١١,٥ − ١,٥ ن < ٠ $\Leftarrow$ −١,٥ ن < −١١,٥ $\Leftarrow$ ن > $\frac{-١١,٥}{-١,٥}$ $\Leftarrow$ ن > $\frac{-١١,٥}{-١,٥}$

$\Leftarrow$ ن > ٧,٦٦ (عند القسمة على سالب تقلب إشارة المتباينة) $\Leftarrow$ ن = ٨ رتبة أول حد سالب في المتتالية .

إنتهى

١١ متتالية حسابية تتكون من ٢٥ حداً ، حدها الأوسط يساوي ٣٨ ، مجموع الثلاث حدود الأخيرة منها يساوي ٢١٣ ، أوجد المتتالية ، أوجد مجموعها .

الحل

الحد الأوسط = ٣٨ $\Leftarrow$ $ح_{١٣}$ = ٣٨ $\Leftarrow$ أ + ١٢د = ٣٨ ---------- ①

الثلاث حدود الأخيرة هي : $ح_{٢٣}$ ، $ح_{٢٤}$ ، $ح_{٢٥}$

مجموعها = ٢١٣ $\Leftarrow$ أ + ٢٢د + أ + ٢٣د + أ + ٢٤د = ٢١٣

$\Leftarrow$ ٣ أ + ٦٩د = ٢١٣ $\Leftarrow$ أ + ٢٣د = ٧١ ---------- ②

② − ① $\Leftarrow$ ١١د = ٣٣ $\Leftarrow$ د = ٣ بالتعويض عن قيمة د في ① $\Leftarrow$ أ + ٣٦ = ٣٨ $\Leftarrow$ أ = ٢

إذن المتتالية هي : ٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ١٤ ، ..... ، ٦٨ ، ٧١ ، ٧٤

$ج_ن = \frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) × د] $\Leftarrow$ $ج_{٢٥} = \frac{٢٥}{٢}$ [٤ + (٢٤) × ٣]

= $\frac{٢٥}{٢}$ × ٧٦ = ٩٥٠

إنتهى

١٢ متتالية حسابية حدها الخامس يساوي ٩ ومجموع الحدود السبعة الأولى منها يساوي ٤٩ أوجد المتتالية وإذا كان مجموع حدود هذه المتتالية ٩٠٠ أوجد حدها قبل الأخير .

الحل

$ح_٥ = ٩ \Leftarrow أ + ٤ د = ٩$ ---------- ①

$ج_٧ = ٤٩ \Leftarrow \frac{٧}{٢} (٢ أ + ٦ د) = ٤٩ \Leftarrow ٢ أ + ٦ د = ١٤$

$\Leftarrow أ + ٣ د = ٧$ ---------- ②

① − ② $\Leftarrow د = ٢$

بالتعويض عن قيمة د في ① $\Leftarrow أ + ٨ = ٩ \Leftarrow أ = ١$

وتصبح المتتالية : ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، .....

$\because ج_ن = ٩٠٠ \Leftarrow \frac{ن}{٢} (٢ + (ن − ١) × ٢) = ٩٠٠ \Leftarrow \frac{ن}{٢} × (٢ + ٢ن − ٢) = ٩٠٠$

$\Leftarrow \frac{ن}{٢} × (٢ن) = ٩٠٠ \Leftarrow ن^٢ = ٩٠٠ \Leftarrow ن = ٣٠$

إذن الحد قبل الأخير هو : $ح_{٢٩} = أ + ٢٨ د = ١ + (٢٨ × ٢) = ٥٧$

إنتهى

١٣ كم حداً يلزم أخذها من حدود المتتالية : −٢٠ ، −٢٢,٥ ، −٢٥ ، ..... إبتداء من الحد الأول بحيث يكون مجموع الربع الأول منها إلى مجموع الربع الثالث كنسبة ٢ : ٥ ؟

الحل

نفرض أن عدد حدود المتتالية = ٤ن

$ج_ن$ للربع الأول $= \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن − ١) × د] = \frac{ن}{٢} [−٤٠ + (ن − ١) × −٢,٥]$

$= \frac{ن}{٢} [−٤٠ − ٢,٥ ن + ٢,٥] = \frac{ن}{٢} [−٣٧,٥ − ٢,٥ ن]$

$ج_ن$ للربع الثالث $= \frac{ن}{٢} [٢ ح_{٢ن + ١} + (ن − ١) × −٢,٥]$

$= \frac{ن}{٢} [٢ ح_{٢ن + ١} − ٢,٥ ن + ٢,٥]$ ---------- ①

لكن $ح_{٢ن + ١} = أ + (٢ن + ١ − ١) × د = −٢٠ + (٢ن) × −٢,٥ = = −٢٠ − ٥ن$

وبالتعويض في ① ينتج أن :

$ج_ن$ للربع الثالث $= \frac{ن}{٢} [٢ (−٢٠ − ٥ن) − ٢,٥ ن + ٢,٥]$

$= \frac{ن}{٢} [-٤٠ - ١٠ن - ٢,٥ ن + ٢,٥] = \frac{ن}{٢} [-٣٧,٥ - ١٢,٥ ن]$

∵ النسبة بين مجموع الربع الأول إلى مجموع الربع الثالث كنسبة ٢ : ٥

⇐ $\frac{-٣٧,٥ - ٢,٥ ن}{-٣٧,٥ - ١٢,٥ ن} = \frac{٢}{٥}$ وبالضرب التبادلي

⇐ $-٧٥ ن - ٢٥ ن = -١٨٧,٥ - ١٢,٥ ن$ ⇐ $١٨٧,٥ - ٧٥ = ٢٥ ن - ١٢,٥ ن$

⇐ $١١٢,٥ = ١٢,٥ ن$ ⇐ $ن = ٩$ وبما أن عدد حدود المتتالية المطلوبة = ٤ ن إذن عدد حدود المتتالية المطلوبة = ٤ × ٩ = ٣٦ حداً

إنتهى

١٤ إذا كانت أ ، ٢ب ، ٣جـ ، ٤د كميات موجبة في تتابع هندسي أثبت أن : (أ + ٣جـ) (ب + ٢د) > ١٢ب جـ

الحل

∵ الأعداد في تتابع هندسي

⇐ ٢ب وسط هندسي للعددين أ ، ٣جـ وكذلك ٣جـ وسط هندسي للعددين ٢ب ، ٤د

∵ الوسط الحسابي بين أ ، ٣جـ أكبر من وسطهما الهندسي

⇐ $\frac{أ + ٣ جـ}{٢} > ٢ب$ ⇐ أ + ٣جـ > ٤ب ---------- ①

∵ الوسط الحسابي بين ٢ب ، ٤د أكبر من وسطهما الهندسي

⇐ $\frac{٢ ب + ٤ د}{٢} > ٣جـ$ ⇐ ٢ب + ٤د > ٦جـ

⇐ ب + ٢د > ٣جـ ---------- ②

من ① ، ② ⇐ (أ + ٣جـ) (ب + ٢د) > ١٢ب جـ

إنتهى

١٥ إذا أدخلت خمسة أوساط هندسية بين كميتين وكان مجموع الوسطين الثاني والخامس = ٢٨ ، مجموع الوسطين الأول والرابع = ٨٤ فما هي هذه الأوساط ؟

الحل

نفرض أن الأوساط الخمسة بين الكميتين أ ، ب هي : $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، $س_٤$ ، $س_٥$

⇐ أ ، $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، $س_٤$ ، $س_٥$ ، ب تمثل متتالية هندسية

مجموع الوسطين الثاني والخامس = ٢٨ ⇐ $ح_٣ + ح_٤ = ٢٨$ ⇐ $أ ر^٢ + أ ر^٥ = ٢٨$

⇐ $أ ر^٢ (١ + ر^٣) = ٢٨$ ---------- ①

مجموع الوسطين الأول و الرابع = ٨٤ ⇐ $ح_٢ + ح_٥ = ٨٤$ ⇐ $أ ر + أ ر^٤ = ٨٤$

⇐ $أ ر (١ + ر^٣) = ٨٤$ ---------- ②

② ÷ ① ⇐ $\frac{١}{ر}$ = ٣ ⇐ ر = $\frac{١}{٣}$

بالتعويض عن قيمة ر = $\frac{١}{٣}$ في معادلة ① ينتج أن : أ ($\frac{١}{٣}$)^{٢} (١ + ($\frac{١}{٣}$)^{٣}) = ٢٨

⇐ $\frac{أ}{٩}$ × $\frac{٢٨}{٢٧}$ = ٢٨ ⇐ أ = ٢٤٣

وبناءاً عليه تصبح المتتالية : ٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ١ ، $\frac{١}{٣}$

والأوساط هي : ٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ١

إنتهى

١٦ متتالية هندسية مجموع الثلاث حدود الأولى منها يساوي ٢١ ، ومجموع الثلاث حدود التالية لها يساوي ١٦٨ فما هي المتتالية ؟

الحل

الحدود الثلاثة الأولى هي : أ ، أ ر ، أ ر^{٢}

⇐ أ + أ ر + أ ر^{٢} = ٢١ ⇐ أ (١ + ر + ر^{٢}) = ٢١ ---------- ①

الحدود الثلاثة التالية هي : أ ر^{٢} ، أ ر^{٣} ، أ ر^{٤}

⇐ أ ر^{٣} + أ ر^{٤} + أ ر^{٥} = ١٦٨ ⇐ أ ر^{٣} (١ + ر + ر^{٢}) = ١٦٨ ---------- ②

② ÷ ① ⇐ ر^{٣} = ٨ ⇐ ر = ٢

بالتعويض عن قيمة ر = ٢ في معادلة ① ⇐ أ (١ + ٢ + ٤) = ٢١

⇐ أ = $\frac{٢١}{٧}$ = ٣

⇐ المتتالية ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، .....

حل آخر

مجموع الحدود الثلاثة جـ$_{٣}$ يساوي ٢١

⇐ $\frac{أ (١ - ر^{٣})}{١ - ر}$ = ٢١ ، (ر ≠ ١) ⇐ أ (١ − ر^{٣}) = ٢١ (١ − ر) ---------- ①

مجموع الحدود الثلاثة التالية يساوي ١٦٨ فيكون مجموع الحدود الستة الأولى جـ$_{٦}$ = ٢١ + ١٦٨ = ١٨٩

⇐ $\frac{أ (١ - ر^{٦})}{١ - ر}$ = ١٨٩ ⇐ أ (١ − ر^{٦}) = ١٨٩ (١ − ر) ---------- ② (ر ≠ ١)

② ÷ ① ⇐ $\frac{(١ - ر^{٦})}{(١ - ر^{٣})}$ = ٩ ⇐ ١ − ر^{٦} = ٩ − ٩ ر^{٣} ⇐ ر^{٦} − ٩ ر^{٣} + ٨ = صفر

⇐ $(ر^{٣})^{٢} - ٩ ر^{٣} + ٨ =$ صفر (وهي عبارة عن معادلة تربيعية في المتغير $ر^{٣}$)

⇐ $(ر^{٣} - ٨)(ر^{٣} - ١) =$ صفر

⇐ $(ر^{٣} - ١) =$ صفر ومنها $ر = ١$ (مرفوض لأن $ر \neq ١$)

أو $(ر^{٣} - ٨) =$ صفر ومنها $ر = ٢$

عندما $ر = ٢$ من المعادلة ① ⇐ $أ(١ - ٨) = ٢١$ ⇐ $أ(١ - ٢) = \frac{-٢١}{-٧} = ٣$

وتصبح المتتالية ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، .....

إنتهى

١٧ إذا كان مجموع الست حدود الأولى من متتالية هندسية يساوي ٩ أمثال مجموع الثلاثة حدود الأولى منها ، فإذا كان الحد العاشر منها يساوي ٦٤ فما هي المتتالية ؟

الحل

$ج_{٦} = ٩ ج_{٣}$

⇐ $\frac{أ(١ - ر^{٦})}{١ - ر} = ٩ \times \frac{أ(١ - ر^{٣})}{١ - ر}$ ، $(ر \neq ١)$

⇐ $(١ - ر^{٦}) = ٩ \times (١ - ر^{٣})$

⇐ $(١ - (ر^{٣})^{٢}) = ٩ \times (١ - ر^{٣})$ (لاحظ الطرف الأيمن عبارة عن فرق بين مربعين)

⇐ $(١ - ر^{٣})(١ + ر^{٣}) = ٩ \times (١ - ر^{٣})$

⇐ $(١ + ر^{٣}) = ٩$ ⇐ $ر^{٣} = ٨$ ومنها $ر = ٢$

∵ $ح_{١٠} = ٦٤$ ⇐ $أ ر^{٩} = ٦٤$ وبالتعويض عن قيمة $ر = ٢$ ينتج أن :

$أ \times ٢^{٩} = ٦٤$ ⇐ $أ = \frac{٢^{٦}}{٢^{٩}}$ ⇐ $أ = ٢^{-٣}$ ⇐ $أ = \frac{١}{٨}$

وتصبح المتتالية $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ٦٤ ، .....

حل آخر

$ج_{٦} = ٩ ج_{٣}$

⇐ $\frac{أ(١ - ر^{٦})}{١ - ر} = ٩ \times \frac{أ(١ - ر^{٣})}{١ - ر}$ ، $(ر \neq ١)$

⇐ $(١ - ر^{٦}) = ٩ \times (١ - ر^{٣})$ ⇐ $١ - ر^{٦} = ٩ - ٩ ر^{٣}$ ⇐ $ر^{٦} - ٩ ر^{٣} + ٨ =$ صفر

⇐ $(ر^{٣})^{٢} - ٩ ر^{٣} + ٨ =$ صفر (وهي عبارة عن معادلة تربيعية في المتغير $ر^{٣}$)

⇐ $(ر^{٣} - ٨)(ر^{٣} - ١) =$ صفر

⇐ ($ر^{٣}$ − ١) = صفر ومنها ر = ١ (مرفوض)

أو ($ر^{٣}$ − ٨) = صفر ومنها ر = ٢

∵ $ح_{١٠}$ = ٦٤ ⇐ $أ ر^{٩}$ = ٦٤ وبالتعويض عن قيمة ر = ٢ ينتج أن :

$أ \times ٢^{٩} = ٦٤$ ⇐ $أ = \frac{٢^{٦}}{٢^{٩}}$ ⇐ $أ = ٢^{-٣}$ ⇐ $أ = \frac{١}{٨}$

وتصبح المتتالية $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ٦٤ ، .....

إنتهى

١٨ حول الكسور العشرية الدورية التالية إلى كسور عادية

أ) $٠,\overline{٤}$ ب) $٠,\overline{٢٣}$ ج) $١,\overline{٥٧}$

الحل

أ) $٠,\overline{٤} = ٠,٤ + ٠,٠٤ + ٠,٠٠٤ + ٠,٠٠٠٤ + ... + \infty$

وهي متتالية هندسية حدها الأول ٠,٤ وأساسها ٠,١ فيكون مجموعها إلى ما لا نهاية

$$ج = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{\frac{٤}{١٠}}{١ - \frac{١}{١٠}} = \frac{٤}{١٠} \times \frac{١٠}{٩} = \frac{٤}{٩}$$

ب) $٠,\overline{٢٣} = ٠,٢٣ + ٠,٠٠٢٣ + ٠,٠٠٠٠٢٣ + ... + \infty$

وهي متتالية هندسية حدها الأول ٠,٢٣ وأساسها ٠,٠١ فيكون مجموعها إلى ما لا نهاية

$$ج = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{\frac{٢٣}{١٠٠}}{١ - \frac{١}{١٠٠}} = \frac{٢٣}{١٠٠} \times \frac{١٠٠}{٩٩} = \frac{٢٣}{٩٩}$$

ج) $١,\overline{٥٧} = ١ + (٠,٥٧ + ٠,٠٠٥٧ + ٠,٠٠٠٠٥٧ + ... + \infty)$

والمتتالية (٠,٥٧ + ٠,٠٠٥٧ + ٠,٠٠٠٠٥٧ + ... + ∞) متتالية هندسية حدها الأول ٠,٥٧

وأساسها ٠,٠١ فيكون مجموعها إلى ما لا نهاية

$$ج = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{\frac{٥٧}{١٠٠}}{١ - \frac{١}{١٠٠}} = \frac{٥٧}{١٠٠} \times \frac{١٠٠}{٩٩} = \frac{٥٧}{٩٩}$$

⇐ $١,\overline{٥٧} = ١ + \frac{٥٧}{٩٩} = \frac{١٥٦}{٩٩}$

إنتهى

١٩ الحد الثاني من متتالية هندسية يزيد عن حدها السادس بمقدار ٤٥ ، مجموع الأربعة حدود الأولى من نفس المتتالية يساوي ١٨٠ أوجد المتتالية ثم أوجد مجموعها إلى ما لا نهاية .

الحل

$ح_٢ = ح_٦ + ٤٥ \Leftarrow أ ر = أ ر^٥ + ٤٥ \Leftarrow أ ر - أ ر^٥ + ٤٥$

$\Leftarrow أ ر (١ - ر^٤) = ٤٥$ ---------- ①

مجموع الحدود الأربعة الأولى $جـ_٤$ يساوي ١٨٠

$\Leftarrow \frac{أ (١ - ر^٤)}{١ - ر} = ١٨٠ ، (ر \neq ١)$

$\Leftarrow أ (١ - ر^٤) = ١٨٠ (١ - ر)$ ---------- ②

② ÷ ① $\Leftarrow \frac{١}{ر} = ٤ (١ - ر) \Leftarrow ٤ ر (١ - ر) = ١$

$\Leftarrow ٤ ر^٢ - ٤ ر + ١ = صفر$

$\Leftarrow (٢ ر - ١)^٢ = صفر \Leftarrow ر = \frac{١}{٢}$ و بالتعويض عن قيمة ر في المعادلة رقم ①

$\Leftarrow أ \times \frac{١}{٢} (١ - (\frac{١}{٢})^٤) = ٤٥ \Leftarrow أ \times \frac{١٥}{١٦} = ٩٠ \Leftarrow أ = \frac{٩٠ \times ١٦}{١٥} = ٩٦$

و بناءاً عليه تصبح المتتالية ٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ١٢ ، ٦ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، .....

مجموع المتسلسلة إلى ما لا نهاية

$جـ = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٩٦}{١ - \frac{١}{٢}} = ٩٦ \times ٢ = ١٩٢$

إنتهى

٢٠ مجموع ثلاثة أعداد تكون متتالية هندسية = ٣٥ ، وإذا أضيف إليها ٢ ، ٤ ، ١ على الترتيب كونت الأعداد الناتجة متتالية حسابية ، فما هي الأعداد الثلاثة الأصلية ؟

الحل

نفرض أن الأعداد هي أ ، أ ر ، $أ ر^٢$

مجموعهما يساوي ٣٥ $\Leftarrow أ + أ ر + أ ر^٢ = ٣٥$

$\Leftarrow أ (١ + ر + ر^٢) = ٣٥$ ---------- ①

إذا أضيف للأعداد السابقة ٢ ، ٤ ، ١ على الترتيب تصبح متتالية حسابية أي أن :

أ + ٢ ، أ ر + ٤ ، $أ ر^٢ + ١$ متتالية حسابية

$\Leftarrow (أ ر + ٤) - (أ + ٢) = (أ ر^٢ + ١) - (أ ر + ٤)$

⇐ ٢ + (أ ر − أ) = −٣ + (أ ر^{٢} − أ ر)

⇐ أ ر^{٢} − أ ر − أ ر + أ = ٥ ⇐ أ ر^{٢} − ٢ أ ر + أ = ٥

⇐ أ (ر^{٢} − ٢ ر + ١) = ٥ ---------- ②

① ÷ ② ⇐ $\frac{\text{أ}(١ + \text{ر} + \text{ر}^{٢})}{\text{أ}(\text{ر}^{٢} - ٢\text{ر} + ١)}$ = ٧ ⇐ (١ + ر + ر^{٢}) = ٧ (ر^{٢} − ٢ ر + ١)

⇐ ٦ ر^{٢} − ١٥ ر + ٦ = ٠ ⇐ ٢ ر^{٢} − ٥ ر + ٢ = ٠

⇐ (٢ ر − ١) (ر − ٢) = ٠ ⇐ ر = $\frac{١}{٢}$ أو ر = ٢

عندما ر = $\frac{١}{٢}$ من المعادلة ① ⇐ أ (١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$) = ٣٥ ⇐ أ ($\frac{٧}{٤}$) = ٣٥

⇐ أ = ٢٠ وتصبح المتتالية ٢٠ ، ١٠ ، ٥ ، .....

عندما ر = ٢ من المعادلة ① ⇐ أ (١ + ٢ + ٤) = ٣٥ ⇐ أ = $\frac{٣٥}{٧}$

⇐ أ = ٥ وتصبح المتتالية ٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، .....

حـل آخـر

نفرض أن الأعداد هي أ ، ب ، جـ

مجموعهما يساوي ٣٥ ⇐ أ + ب + جـ = ٣٥ ---------- ①

إذا أضيف للأعداد السابقة ٢ ، ٤ ، ١ على الترتيب تصبح متتالية حسابية أي أن :

أ + ٢ ، ب + ٤ ، جـ + ١ متتالية حسابية

⇐ (ب + ٤) − (أ + ٢) = (جـ + ١) − (ب + ٤) ⇐ ب + ٤ − أ − ٢ = جـ + ١ − ب − ٤

⇐ ٢ ب − أ − جـ = −٥ ---------- ②

② + ① ⇐ ٣ ب = ٣٠ ⇐ ب = ١٠

بالتعويض عن قيمة ب = ١٠ في معادلة ① ينتج أن : أ + ١٠ + جـ = ٣٥

⇐ أ + جـ = ٢٥ ---------- ③

وبما أن أ ، ب ، جـ حدود متتالية هندسية ⇐ ب = $\sqrt{\text{أ جـ}}$ ⇐ ب^{٢} = أ جـ

وحيث أن ب = ١٠ ⇐ أ جـ = ١٠٠ ---------- ④

من المعادلتين ③ ، ④ ينتج أن : أ (٢٥ − أ) = ١٠٠ ⇐ أ^{٢} − ٢٥ أ + ١٠٠ = صفر

⇐ أ = ٥ أو أ = ٢٠

عندما أ = ٥ بالتعويض في ① ⇐ ٥ + ١٠ + جـ = ٣٥ ⇐ جـ = ٢٠ إذن الأعداد هي : ٥ ، ١٠ ، ٢٠

عندما أ = ٢٠ بالتعويض في ① ⇐ ٢٠ + ١٠ + جـ = ٣٥ ⇐ جـ = ٥ إذن الأعداد هي : ٢٠ ، ١٠ ، ٥

إنتهى

٢١ ثلاث أعداد كونت متتالية هندسية مجموعها ٣٥ إذا أضيف إلى العدد الثاني ٦ وإلى العدد الثالث ٧ كونت الأعداد الثلاثة متتالية حسابية ، أوجد هذه الأعداد .

الحل

نفرض أن الأعداد هي أ ، أ ر ، أ $ر^{٢}$

مجموعهما يساوي ٣٥ ⇐ أ + أ ر + أ $ر^{٢}$ = ٣٥

⇐ أ (١ + ر + $ر^{٢}$) = ٣٥ ---------- ①

إذا أضيف إلى العدد الثاني ٦ وإلى العدد الثالث ٧ تصبح متتالية حسابية أي أن :

أ ، أ ر + ٦ ، أ $ر^{٢}$ + ٧ متتالية حسابية

⇐ (أ ر + ٦) − أ = (أ $ر^{٢}$ + ٧) − (أ ر + ٦)

⇐ ٦ + (أ ر − أ) = ١ + (أ $ر^{٢}$ − أ ر)

⇐ أ $ر^{٢}$ − أ ر − أ ر + أ = ٥ ⇐ أ $ر^{٢}$ − ٢ أ ر + أ = ٥

⇐ أ ($ر^{٢}$ − ٢ ر + ١) = ٥ ---------- ②

① ÷ ② ⇐ $\frac{أ (١ + ر + ر^{٢})}{أ (ر^{٢} - ٢ ر + ١)}$ = ٧ ⇐ (١ + ر + $ر^{٢}$) = ٧ ($ر^{٢}$ − ٢ ر + ١)

⇐ ٦ $ر^{٢}$ − ١٥ ر + ٦ = ٠ ⇐ ٢ $ر^{٢}$ − ٥ ر + ٢ = ٠

⇐ (٢ ر − ١) (ر − ٢) = ٠ ⇐ ر = $\frac{١}{٢}$ أو ر = ٢

عندما ر = $\frac{١}{٢}$ من المعادلة ① ⇐ أ (١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$) = ٣٥ ⇐ أ ($\frac{٧}{٤}$) = ٣٥

⇐ أ = ٢٠ وتصبح المتتالية ٢٠ ، ١٠ ، ٥ ، .....

عندما ر = ٢ من المعادلة ① ⇐ أ (١ + ٢ + ٤) = ٣٥ ⇐ أ = $\frac{٣٥}{٧}$

⇐ أ = ٥ وتصبح المتتالية ٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، .....

إنتهى

٢٢ متتالية هندسية : $ح_{ن}$ = $(\frac{٣}{٥})^{ن - ٢}$ ، أوجد هذه المتتالية ثم أوجد كلاً من الوسط الحسابي والهندسي لحديها الثاني والسادس وأوجد مجموعها إلى مالانهاية .

الحل

$ح_{١}$ = $(\frac{٣}{٥})^{١ - ٢}$ = $(\frac{٣}{٥})^{-١}$ = $\frac{٥}{٣}$

$ح_{٢}$ = $(\frac{٣}{٥})^{٢ - ٢}$ = $(\frac{٣}{٥})^{٠}$ = ١

$ح_{٣} = (\frac{٣}{٥})^{٣-٢} = \frac{٣}{٥}$

إذن المتتالية : $\frac{٥}{٣}$ ، ١ ، $\frac{٣}{٥}$ ، .....

$\because$ أ $= \frac{٥}{٣}$ ، ر $= \frac{٣}{٥}$ $\Leftarrow$ $ح_{٦} =$ أ $ر^{٥} = \frac{٥}{٣} \times (\frac{٣}{٥})^{٥} = (\frac{٣}{٥})^{٤} = \frac{٨١}{٦٢٥}$

الوسط الحسابي للحدين الأول والسادس $= \frac{ح_{١} + ح_{٦}}{٢} = \frac{١ + (\frac{٣}{٥})^{٤}}{٢} = \frac{١ + \frac{٨١}{٦٢٥}}{٢}$

$= \frac{٦٢٥ + ٨١}{٦٢٥} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣٥٣}{٦٢٥}$

الوسط الهندسي للحدين الأول والسادس $= \pm \sqrt{ح_{١} \times ح_{٦}} = \pm \sqrt{١ \times (\frac{٣}{٥})^{٤}} = \pm (\frac{٣}{٥})^{٢}$

$= \pm \frac{٩}{٢٥}$

مجموع المتسلسلة إلى ما لا نهاية : جـ $= \frac{أ}{١ - ر} = \frac{\frac{٥}{٣}}{١ - \frac{٣}{٥}} = \frac{\frac{٥}{٣}}{\frac{٢}{٥}} = \frac{٥}{٣} \times \frac{٥}{٢} = \frac{٢٥}{٦}$

إنتهى

٢٣ ثلاث أعداد تكون متتالية هندسية مجموعها ٩٣ فإذا كانت هذه الأعداد هي الحدود الأول والثاني والسابع لمتتالية حسابية أوجد هذه الأعداد .

الحل

حيث أن الأعداد هي الحدود الأول والثاني والسابع لمتتالية حسابية نفرض أن الأعداد هي : أ ، أ + د ، أ + ٦د

مجموعهما يساوي ٩٣ $\Leftarrow$ أ + أ + د + أ + ٦د = ٩٣ $\Leftarrow$ ٣أ + ٧د = ٩٣ ------- ①

$\because$ الأعداد تكون متتالية هندسية $\Leftarrow$ $\frac{أ + د}{أ} = \frac{أ + ٦د}{أ + د}$ $\Leftarrow$ $(أ + د)^{٢} = أ^{٢} + ٦أد$

$\Leftarrow$ $أ^{٢} + ٢أد + د^{٢} = أ^{٢} + ٦أد$ $\Leftarrow$ $د^{٢} - ٤أد = ٠$

$\Leftarrow$ د (د − ٤أ) = ٠ $\Leftarrow$ د − ٤أ = ٠ $\Leftarrow$ د = ٤أ ---------- ②

بالتعويض عن قيمة د = ٤أ في معادلة ① ينتج أن : ٣أ + ٢٨أ = ٩٣ $\Leftarrow$ ٣١أ = ٩٣ $\Leftarrow$ أ = ٣

بالتعويض في ② $\Leftarrow$ د = ٤أ = ٤ × ٣ = ١٢

إذن الأعداد هي : أ = ٣ ، أ + د = ٣ + ١٢ = ١٥ ، أ + ٦د = ٣ + ٧٢ = ٧٥

$\Leftarrow$ المتتالية الهندسية : ٣ ، ١٥ ، ٧٥ ، .....

والمتتالية الحسابية : ٣ ، ١٥ ، ٢٧ ، .....

إنتهى

٢٤ يتناقص إنتاج منجم فحم سنوياً بحيث يكون الإنتاج في سنة ما أقل من ١٥% عن السنة السابقة لها مباشرة فإذا كان إنتاج الفحم في السنة الأولى ٢٤٠٠ طن فأوجد مجموع ما ينتجه المنجم خلال العشرة سنين الأولى وأوجد الحد الأقصى لمجموع إنتاجه .

الحل

إنتاج الفحم في السنة الأولى : $ح_١$ = ٢٤٠٠ طن

إنتاج الفحم في السنة الثانية : $ح_٢$ = ٢٤٠٠ − (٢٤٠٠ × ٠,١٥) = ٢٤٠٠ − ٣٦٠ = ٢٠٤٠ طن

إنتاج الفحم في السنة الثالثة : $ح_٣$ = ٢٠٤٠ − (٢٠٤٠ × ٠,١٥) = ٢٠٤٠ − ٣٠٦ = ١٧٣٤ طن

إنتاج الفحم في السنة الرابعة : $ح_٤$ = ١٧٣٤ − (١٧٣٤ × ٠,١٥) = ١٧٣٤ − ٢٦٠,١ = ١٤٧٣,٩ طن

إذن متتالية إنتاج الفحم هي : ٢٤٠٠ ، ٢٠٤٠ ، ١٧٣٤ ، ١٤٧٣,٩ ، .....

وهي عبارة عن متتالية هندسية حدها الأول أ = ٢٤٠٠ وأساسها ر = $\frac{٨٥}{١٠٠}$

$$ج_{١٠} = \frac{أ\,(١ - ر^{١٠})}{١ - ر} = \frac{٢٤٠٠\,(١ - (\frac{٨٥}{١٠٠})^{١٠})}{١ - \frac{٨٥}{١٠٠}} = ١٦٠٠٠ \times (١ - (\frac{٨٥}{١٠٠})^{١٠})$$

= ١٢٨٥٠,٠١ طن

الحد الأقصى لمجموع إنتاج المنجم من الفحم عبارة عن مجموع المتتالية إلى ما لا نهاية

$$ج = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٢٤٠٠}{\frac{١٥}{١٠٠}} = ٢٤٠٠ \times \frac{١٠٠}{١٥} = ١٦٠٠٠ \text{ طن}$$

إنتهى

٢٥ صهريج ماء سعته $\frac{١}{٢}$ ١٦٨٣ لتر كان فارغاً ثم ملىء على عدة أيام فإذا كان ما صب فيه في اليوم الأول ٥١٢ لتراً وكان ما صب فيه في كل يوم من الأيام التالية يساوي $\frac{٣}{٤}$ ما صب فيه في اليوم السابق مباشرة فاحسب بعد كم يوم إمتلأ الصهريج

الحل

ما صب في اليوم الأول : $ح_١$ = ٥١٢ لتر

ما صب في اليوم الثاني : $ح_٢$ = ٥١٢ × $\frac{٣}{٤}$ = ٣٨٤ لتر

ما صب في اليوم الثالث : $ح_٣$ = ٣٨٤ × $\frac{٣}{٤}$ = ٢٨٨ لتر

ما صب في اليوم الثالث : $ح_٤ = ٢٨٨ \times \frac{٣}{٤} = ٢١٦$ لتر

إذن متتالية الماء المصبوب في الخزان هي : ٥١٢ ، ٣٨٤ ، ٢٨٨ ، ٢١٦ ، .....

وهي عبارة عن متتالية هندسية حدها الأول $أ = ٥١٢$ وأساسها $ر = \frac{٣}{٤}$

يمتلئ الصهريج بع أن يكون ما صب فيه من ماء $= ١٦٨٣\frac{١}{٢}$ أي أن مجموع المتتالية الهندسية $= ١٦٨٣\frac{١}{٢}$

أي أن : $ج_ن = ١٦٨٣\frac{١}{٢}$

$$\Leftarrow \frac{٥١٢ \times [١ - (\frac{٣}{٤})^ن]}{١ - \frac{٣}{٤}} = ١٦٨٣\frac{١}{٢}$$

$$\Leftarrow ٥١٢ \times [١ - (\frac{٣}{٤})^ن] = ١٦٨٣\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٤}$$

$$\Leftarrow ٥١٢ \times [١ - (\frac{٣}{٤})^ن] = \frac{٣٣٦٧}{٨} \Leftarrow ١ - (\frac{٣}{٤})^ن = \frac{٣٣٦٧}{٨} \div ٥١٢ =$$

$$\Leftarrow ١ - (\frac{٣}{٤})^ن = \frac{٣٣٦٧}{٤٠٩٦} \Leftarrow (\frac{٣}{٤})^ن = ١ - \frac{٣٣٦٧}{٤٠٩٦}$$

$$\Leftarrow (٠,٧٥)^ن = ٠,١٨ \Leftarrow لو(٠,٧٥)^ن = لو ٠,١٨ \Leftarrow ن \times لو(٠,٧٥) = لو ٠,١٨$$

$$\Leftarrow ن = لو ٠,١٨ \div لو(٠,٧٥) \Leftarrow ن = ٥,٩٦ \approx ٦$$

$\Leftarrow$ يمتلئ الصهريج بعد ٦ أيام

إنتهى

السؤال الأول

أ) إختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

١) إذا كان ب هو الوسط الحسابي للعددين أ ، جـ فإن $\frac{\text{أ} + ٢\text{ب} - \text{جـ}}{\text{جـ} + ٢\text{ب} - \text{أ}} =$

أ) $\frac{٣\text{أ}}{\text{جـ}}$ ب) $-\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ ج) $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}}$ د) $\sqrt{\text{أ جـ}}$

٢) الحد العام للمتتالية : ١ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، ..... هو :

أ) $\frac{١}{\text{ن}^{٢}}$ ب) $\frac{١}{٢^{\text{ن}}}$ ج) $\frac{١}{٢\text{ن}}$ د) $\frac{١}{\text{ن}}$

٣) مجموع المتسلسلة : ت ، $\text{ت}^{٢}$ ، ..... ، $\text{ت}^{١٢}$ هو :

أ) ت ب) – ت ج) صفر د) ١ – ت

٤) العدد $٠,١\overline{٧}$ يعبر عنه بكسر عادي على الصورة :

أ) $\frac{١٦}{٩٩}$ ب) $\frac{١٦}{٩}$ ج) $\frac{١٦}{٩٠}$ د) $\frac{١٦}{١٩}$

٥) عددان وسطهما الحسابي ٤ ، ووسطهما الهندسي ٤ ، العددان هما :

أ) ٤ ، ٤ ب) ٨ ، ٢ ج) –٤ ، –٤ د) –٨ ، –٢

الحل

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥
الإجابة الصحيحة	جـ	أ	جـ	جـ	أ

إنتهى

ب) أوجد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذها من المتتالية الهندسية ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ..... إبتداءاً من الحد الأول ليكون المجموع أكبر من ٣٠٠ .

الحل

أصغر عدد من الحدود يمكن أخذها من المتتالية إبتداءاً من الحد الأول ليكون المجموع أكبر من ٣٠٠ يمكن الحصول عليه من خلال حل المتباينة :

$جـ_ن > ٣٠٠ \Leftarrow \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر} > ٣٠٠$ ، $\because$ أ = ٣ ، ر = ٢

$\Leftarrow \frac{٣(١ - ٢^ن)}{١ - ٢} > ٣٠٠ \Leftarrow -٣ \times (١ - ٢^ن) > ٣٠٠ \Leftarrow ١ - ٢^ن < -١٠٠$

$\Leftarrow -٢^ن < -١٠١ \Leftarrow ٢^ن > ١٠١ \Leftarrow لو ٢^ن > لو ١٠١$

$\Leftarrow ن لو ٢ > لو ١٠١ \Leftarrow ن > \frac{لو ١٠١}{لو ٢} \Leftarrow ن > ٦,٦٥$

$\Leftarrow$ أصغر عدد من الحدود يمكن أخذها من المتتالية إبتداءاً من الحد الأول ليكون المجموع أكبر من ٣٠٠ هو ن = ٧

إنتهى

جـ) في متتالية هندسية لا نهائية إذا كان مجموع حدودها الفردية الرتبة يساوي ٣٦ ، ومجموع حدودها الزوجية الرتبة يساوي ١٢ ، أوجد المتتالية .

الحل

الحدود الفردية هي : أ ، أ $ر^٢$ ، أ $ر^٤$ ، أ $ر^٦$ ، ..... وهي متتالية حدها الأول أ ، أساسها $ر^٢$

ويكون مجموعها إلى ما لا نهاية :

$جـ = \frac{أ}{١ - ر^٢} = ٣٦$ ---------- ①

الحدود الزوجية هي : أ ر ، أ $ر^٣$ ، أ $ر^٥$ ، أ $ر^٧$ ، ..... وهي متتالية حدها الأول أ ر ، أساسها $ر^٢$

ويكون مجموعها إلى ما لا نهاية :

$جـ = \frac{أ ر}{١ - ر^٢} = ١٢$ ---------- ②

② ÷ ① $\Leftarrow \frac{أ ر}{١ - ر^٢} \times \frac{١ - ر^٢}{أ} = \frac{١}{٣} \Leftarrow ر = \frac{١}{٣}$

بالتعويض عن قيمة ر في ① ينتج أن : $\frac{أ}{\frac{٨}{٩}} = ٣٦ \Leftarrow أ = ٣٦ \times \frac{٩}{٨} = ٣٢$

فتكون حدود المتتالية المطلوبة هي : ٣٢ ، $\frac{٣٢}{٣}$ ، $\frac{٣٢}{٩}$ ، $\frac{٣٢}{٢٧}$ ، .....

إنتهى

السؤال الثاني

أ) ضع إشارة ✓ أو ✗

١ – ( ) الحد العام للمتتالية : $\frac{١}{٥^{٣}}$ ، $\frac{٣}{٥^{٥}}$ ، $\frac{٥}{٥^{٧}}$ ، $\frac{٧}{٥^{٩}}$ ، ..... هو $\frac{٢ن - ١}{٥^{٢ن + ١}}$

٢ – ( ) إذا كان الحد الثالث في متتالية حسابية = ٦ والحد السابع = ١٤ فإن الحد الخامس هو ١٠ .

٣ – ( ) إذا كان الحد الرابع في متتالية هندسية = ١٦ والحد الأول = ٢ فإن الحد السادس = ٣٢ .

٤ – ( ) $\sum_{ر=٥}^{٧} (٩ - ر) = -١١٦٦$.

٥ – ( ) الوسط الهندسي للعددين ٥ ، ٨٠ هو ± ٤٠ .

الحل

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥
الإجابة الصحيحة	✓	✓	✗	✗	✗

إنتهى

ب) مجموع ثلاثة أعداد تكون متتالية هندسية = ٣٥ ، وإذا أضيف إليها ٢ ، ٤ ، ١ على الترتيب كونت الأعداد الناتجة متتالية حسابية ، فما هي الأعداد الثلاثة الأصلية ؟

الحل

نفرض أن الأعداد هي أ ، أ ر ، أ $ر^{٢}$

مجموعهما يساوي ٣٥ ⇐ أ + أ ر + أ $ر^{٢}$ = ٣٥

⇐ أ (١ + ر + $ر^{٢}$) = ٣٥ ---------- ①

إذا أضيف للأعداد السابقة ٢ ، ٤ ، ١ على الترتيب تصبح متتالية حسابية أي أن :

أ + ٢ ، أ ر + ٤ ، أ $ر^{٢}$ + ١ متتالية حسابية

⇐ (أ ر + ٤) – (أ + ٢) = (أ $ر^{٢}$ + ١) – (أ ر + ٤)

⇐ ٢ + (أ ر – أ) = –٣ + (أ $ر^{٢}$ – أ ر)

⇐ أ $ر^{٢}$ – أ ر – أ ر + أ = ٥ ⇐ أ $ر^{٢}$ – ٢ أ ر + أ = ٥

⇐ أ ($ر^{٢}$ – ٢ ر + ١) = ٥ ---------- ②

① ÷ ② ⇐ $\frac{أ (١ + ر + ر^{٢})}{أ (ر^{٢} - ٢ ر + ١)}$ = ٧ ⇐ (١ + ر + $ر^{٢}$) = ٧ ($ر^{٢}$ – ٢ ر + ١)

⇐ ٦ $ر^{٢}$ – ١٥ ر + ٦ = ٠ ⇐ ٢ $ر^{٢}$ – ٥ ر + ٢ = ٠

⇐ (٢ ر – ١) (ر – ٢) = ٠ ⇐ ر = $\frac{١}{٢}$ أو ر = ٢

عندما ر = $\frac{١}{٢}$ من المعادلة ① ⇐ أ (١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$) = ٣٥ ⇐ أ ($\frac{٧}{٤}$) = ٣٥

⇐ أ = ٢٠ وتصبح المتتالية ٢٠ ، ١٠ ، ٥ ، .....

عندما ر = ٢ من المعادلة ① ⇐ أ (١ + ٢ + ٤) = ٣٥ ⇐ أ = $\frac{٣٥}{٧}$

⇐ أ = ٥ وتصبح المتتالية ٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، .....

إنتهى

جـ) متتالية حسابية حدودها أعداد صحيحة ومجموع السبعة عشر حداً الأولى منها ١٧ والفرق بين مربعي الحدين الثالث والخامس منها ١٩٢ ، أوجد المتتالية ثم أوجد قيمة ورتبة أول حد سالب منها .

الحل

مجموع الحدود الثاني والرابع و الخامس $ح_٢ + ح_٤ + ح_٥ = ١٨$

$ج_{١٧} = ١٧$ ⇐ $\frac{١٧}{٢}$ (٢أ + (١٧ − ١) د) = ١٧ ⇐ ٢أ + ١٦د = ٢

⇐ أ + ٨د = ١ ---------- ①

$(ح_٣)^٢ - (ح_٥)^٢ = ١٩٢$ ⇐ $(أ + ٢د)^٢ - (أ + ٤د)^٢ = ١٩٢$

⇐ $(أ^٢ + ٤أد + ٤د^٢) - (أ^٢ + ٨أد + ١٦د^٢) = ١٩٢$

⇐ $أ^٢ + ٤أد + ٤د^٢ - أ^٢ - ٨أد - ١٦د^٢ = ١٩٢$

⇐ $-٤أد - ١٢د^٢ = ١٩٢$ ⇐ $-أد - ٣د^٢ = ٤٨$ ---------- ②

من ① أ = ١ − ٨د وبالتعويض في المعادلة ② ينتج أن :

$-(١ - ٨د) \times د - ٣د^٢ = ٤٨$ ⇐ $-د + ٨د^٢ - ٣د^٢ = ٤٨$ ⇐ $٥د^٢ - د - ٤٨ = صفر$

⇐ $(د - \frac{١٦}{٥})(د + ٣) = صفر$

⇐ د = $\frac{١٦}{٥}$ (مرفوض لأن الحدود أعداد صحيحة وبالتالي الأساس عدد صحيح) أو د = −٣ (مقبول)

بالتعويض عن قيمة د = −٣ في ① ⇐ أ + (٨ × −٣) = ١ ⇐ أ = ٢٥

فتكون المتتالية : ٢٥ ، ٢٢ ، ١٩ ، ١٦ ، ١٣ ، ١٠ ، ٧ ، .....

لإيجاد أول حد سالب في المتتالية نحل المعادلة $ح_ن < ٠$

$ح_ن = أ + (ن - ١) \times د = ٢٥ + (ن - ١) \times -٣ = ٢٥ - ٣ن + ٣ = ٢٨ - ٣ن$

∵ $ح_ن < ٠$ ⇐ ٢٨ − ٣ن < ٠ ⇐ −٣ن < −٢٨ ⇐ ن > $\frac{-٢٨}{-٣}$ ⇐ ن > ٩,٣٣

⇐ ن = ١٠ وهي رتبة أول حد سالب في المتتالية .

إنتهى

السؤال الثالث

أ) كم حداً يلزم أخذها من المتتالية الحسابية ١٥ ، $\frac{٣}{٤}$ ١٣ ، $١٢\frac{١}{٢}$ ، ..... إبتداءاً من الحد الخامس ليكون مجموعها $\frac{١٧٥}{٤}$

الحل

المتتالية حسابية فيها : أ = ١٥ ، د = − ١,٢٥

$ح_٥$ = أ + ٤ د = ١٥ + ٤ (− ١,٢٥) = ١٥ − ٥ = ١٠

⇐ المجموع ابتداءً من الحد الخامس $جـ_ن$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢٠ + (ن − ١) × − ١,٢٥] = $\frac{١٧٥}{٤}$

= ن (٢٠ − ١,٢٥ ن + ١,٢٥) = ٨٧,٥

⇐ ن (٢١,٢٥ − ١,٢٥ ن) = ٨٧,٥ ⇐ ٢١,٢٥ ن − ١,٢٥ $ن^٢$ = ٨٧,٥

⇐ ١,٢٥ $ن^٢$ − ٢١,٢٥ ن + ٨٧,٥ = صفر

وبالقسمة على ١,٢٥ ينتج أن :

$ن^٢$ − ١٧ ن + ٧٠ = صفر ⇐ (ن − ١٠)(ن − ٧) = صفر

⇐ ن = ١٠ أو ن = ٧

إذن ليكون مجموع الحدود ابتداءً من الخامس $\frac{١٧٥}{٤}$ يجب أخذ ٧ حدود أو ١٠ حدود

للتحقق : (التحقق غير مطلوب منك)

مجموع أول ٧ حدود إبتداءً من الحد الخامس

= ١٠ + ٨,٧٥ + ٧,٥ + ٦,٢٥ + ٥ + ٣,٧٥ + ٢,٥ = $\frac{١٧٥}{٤}$

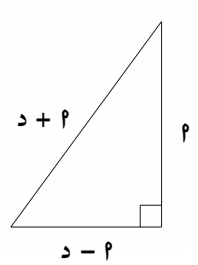
مجموع أول ٧ حدود إبتداءً من الحد الخامس

= ١٠ + ٨,٧٥ + ٧,٥ + ٦,٢٥ + ٥ + ٣,٧٥ + ٢,٥ + ١,٢٥ + ٠ + −١,٢٥ = $\frac{١٧٥}{٤}$

إنتهى

ب) مثلث قائم الزاوية أطوال أضلاعه تشكل متتالية حسابية ومساحته ٥٤ سم^٢ ما أطوال أضلاعه ؟

الحل



نفرض أن أضلاع المثلث هي : أ − د ، أ ، أ + د

∵ مساحة المثلث = ٥٤ سم^٢ ⇐ $\frac{١}{٢}$ × أ × (أ − د) = ٥٤

⇐ أ × (أ − د) = ١٠٨

⇐ $أ^٢$ − أ د = ١٠٨ ---------- ①

وحسب فيثاغورس :

$أ^{٢} + (أ - د)^{٢} = (أ + د)^{٢}$ ⇐ $أ^{٢} + أ^{٢} - ٢ أ د + د^{٢} = أ^{٢} + ٢ أ د + د^{٢}$

⇐ $أ^{٢} - ٤ أ د = ٠$ ---------- ②

بضرب المعادلة ① في −٤ ⇐ $-٤ أ^{٢} + ٤ أ د = -٤٣٢$ ---------- ③

② + ③ ⇐ $-٣ أ^{٢} = -٤٣٢$ ⇐ $أ^{٢} = ١٤٤$

⇐ $أ = \pm ١٢$ (نرفض −١٢ لأن الطول موجب) ⇐ $أ = ١٢$

وبالتعويض في معادلة رقم ① عن أ = ١٢ ⇐ ١٤٤ − ١٢ د = ١٠٨ ⇐ ١٢ د = ١٤٤ − ١٠٨

⇐ ١٢ د = ٣٦ ⇐ د = ٣

وبناءاً عليه تكون أطوال أضلاع المثلث هي :

أ − د = ١٢ − ٣ = ٩ ، أ = ١٢ ، أ + د = ١٢ + ٣ = ١٥

إنتهى

جـ) أثبت صحة العبارة التالية باستخدام الإستقراء الرياضي : $٤^{ن} - ١$ يقبل القسمة على ٣ ∀ ن ∈ ط* .

الحل

عندما ن = ١ ⇐ $٤^{ن} - ١ = ٤^{١} - ١ = ٣$ وهو يقبل القسمة على ٣

نفرض أن العبارة صحيحة عندما ن = ك أي أن : $٤^{ك} - ١$ يقبل القسمة على ٣ ∀ ك ∈ ط*

⇐ $٤^{ك} - ١ = ٣م$ ، م ∈ ص ⇐ $٤^{ك} = ٣م + ١$

⇐ $٤^{ك+١} - ١ = ٤ \times ٤^{ك} - ١ = ٤ \times (٣م + ١) - ١ = ١٢م + ٤ - ١ = ١٢م + ٣ = ٣ (٤م + ١)$

∵ ٤م + ١ ∈ ص ⇐ ٣ (٤م + ١) يقبل القسمة على ٣ وبالتالي فإن العدد $٤^{ك+١} - ١$ يقبل القسمة على ٣ أي أن العبارة صحيحة عندما ن = ك + ١

إنتهى

السؤال الأول : إختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :

١) $ت^{١٥} + ت^{١٦} + ت^{١٧} + ت^{١٨} =$

أ) ت ب) −١ ج) صفر د) − ت

٢) إذا كان ع = $\frac{٣}{\sqrt{٢}} + \frac{٣}{\sqrt{٢}}$ ت فإن السعة هي :

أ) $\frac{\pi}{٤}$ ب) $\frac{\pi}{٢}$ ج) π د) صفر

٣) $\frac{١}{\omega + ١} =$:

أ) ω ب) $-\omega$ ج) ١ د) −١

٤) الحد العام للمتتالية $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٥}$ ، ..... هو :

أ) $\frac{ن}{ن + ٢}$ ب) $\frac{ن}{ن - ١}$ ج) $\frac{ن}{ن - ٢}$ د) $\frac{ن}{ن + ١}$

٥) إذا كان $س \times س^{\frac{١}{٢}} \times س^{\frac{١}{٤}} \times س^{\frac{١}{٨}} \times$ ..... = $س^{م}$ ، س ≠ ٠ فإن م = :

أ) ٢ ب) −٢ ج) $\frac{١}{٢}$ د) $-\frac{١}{٢}$

٦) عددان موجبان وسطهما الحسابي ٥ ، ووسطهما الهندسي ٤ ، العددان هما :

أ) ٢ ، ٤ ب) ٢ ، ٨ ج) ٤ ، ٤ د) ٨ ، ٨

الحل

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦
الإجابة الصحيحة	ج	أ	ب	د	أ	ب

إنتهى

السؤال الثاني

أ) إذا كان العدد المركب يحقق العلاقة ع + | ع | = ٢ + ٨ت فما قيمة | ع |^{٢} ؟

الحل

نفرض أن ع = س + ص ت ⇐ |ع| = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$

∵ ع + |ع| = ٢ + ٨ت ⇐ س + ص ت + $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = ٢ + ٨ت

⇐ س + $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ + ص ت = ٢ + ٨ت

⇐ ص = ٨ ---------- ①

، س + $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = ٢ ⇐ $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = ٢ − س

⇐ $س^٢ + ص^٢ = ٤ - ٤س + س^٢$ ⇐ $ص^٢ = ٤ - ٤س$ ---------- ②

بالتعويض عن ص = ٨ في المعادلة رقم ② ⇐ ٦٤ = ٤ − ٤س ⇐ ٤س = − ٦٠ ⇐ س = − ١٥

⇐ $|ع|^٢ = (\sqrt{س^٢ + ص^٢})^٢ = س^٢ + ص^٢ = (-١٥)^٢ + (٨)^٢ = ٢٢٥ + ٦٤ = ٢٨٩$

إنتهى

ب) جد الجذور التربيعية للعدد ٥ + ١٢ت .

الحل

نفرض أن الجذر التربيعي للعدد ع هو س + ص ت

⇐ $(س + ص ت)^٢ = ٥ + ١٢ت$

⇐ $(س^٢ - ص^٢) + (٢س ص) ت = ٥ + ١٢ت$

⇐ $س^٢ - ص^٢ = ٥$ ---------- ①

، ٢س ص = ١٢ ⇐ س ص = ٦ ---------- ②

من المعادلة ② س = $\frac{٦}{ص}$ ---------- ③

بالتعويض عن س في المعادلة رقم ① ⇐ $\frac{٣٦}{ص^٢} - ص^٢ = ٥$

⇐ $٣٦ - ص^٤ = ٥ص^٢$

⇐ $ص^٤ + ٥ص^٢ - ٣٦ = ٠$ ⇐ $(ص^٢ - ٤)(ص^٢ + ٩) = ٠$

⇐ ص = ± ٢ أو ص = ± $\sqrt{-٩}$ (ونرفض القيمة ± $\sqrt{-٩}$ لأن س ، ص ∈ ح)

عندما ص = ٢ بالتعويض في المعادلة رقم ③ ⇐ س = ٣

عندما ص = − ٢ بالتعويض في المعادلة رقم ③ ⇐ س = −٣

إذن الجذرين هما ٣ + ٢ ت ، − ٣ − ٢ ت

إنتهى

جـ) أثبت أن : $\left[\omega - \frac{١}{\omega} + \frac{١}{\omega + ١} \right]^{٦} = ١$

الحل

$$\left[\omega - \frac{١}{\omega} + \frac{١}{\omega + ١} \right]^{٦} = \left[\omega - \frac{١}{\omega} + \frac{١}{\omega - ٢} \right]^{٦} = \left[\omega - \frac{\omega^{٢}}{\omega^{٣}} - \frac{\omega}{\omega^{٣}} \right]^{٦}$$

$$= \left[\omega - \omega^{٢} - \omega \right]^{٦} = \left[- \omega^{٢} \right]^{٦} = (-١)^{٦} \times (\omega^{٢})^{٦} = (\omega)^{١٢} = (\omega^{٣})^{٤}$$

$$= (١)^{٤} = ١$$

إنتهى

السؤال الثاني

أ) إذا كان مجموع ٢٠ حداً متتالياً من المتسلسلة ١ + ٥ + ٩ + ... هو ١٥٠٠ فما قيمة ورتبة الحد الذي بدأنا به ؟

الحل

نفرض أننا بدأنا بالحد س

$$ج_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢} \left[٢ س + (٢٠ - ١) \times ٤ \right] = ١٠ \left[٢ س + ١٩ \times ٤ \right] = ٢٠ س + ٧٦٠$$

$$\because ج_{٢٠} = ١٥٠٠ \Leftarrow ٢٠ س + ٧٦٠ = ١٥٠٠ \Leftarrow ٢٠ س = ٧٤٠ \Leftarrow س = ٣٧$$

$\Leftarrow$ قيمة الحد الذي بدأنا به = ٣٧

نفرض أن $ح_{ن} = ٣٧ \Leftarrow أ + (ن - ١) \times د = ٣٧ \Leftarrow ١ + (ن - ١) \times ٤ = ٣٧$

$\Leftarrow ١ + ٤ن - ٤ = ٣٧ \Leftarrow ٤ن = ٤٠ \Leftarrow ن = ١٠$

$\Leftarrow$ رتبة الحد الذي بدأنا به هو الحد العاشر $ح_{١٠}$

إنتهى

ب) متسلسلة هندسية حدها الثالث = ١٨ وحدها الخامس = ١٦٢ أوجد مجموع حدودها الثمانية الأولى ، كم حلاً للمسألة ؟

الحل

$ح_{٣} = ١٨ \Leftarrow أ ر^{٢} = ١٨$ ---------- (١)

$ح_{٥} = ١٦٢ \Leftarrow أ ر^{٤} = ١٦٢$ ---------- (٢)

(٢) ÷ (١) $\Leftarrow ر^{٢} = ٩ \Leftarrow ر = \pm ٣$

بالتعويض عن قيمة ر = ±٣ في (١) $\Leftarrow أ \times ٩ = ١٨ \Leftarrow أ = ٢$

عندما ر = ٣ تصبح المتتالية : ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ٥٤ ، ١٦٢ .....

$$ج_{٦} = \frac{٢ \times (١ - ٣^{٦})}{١ - ٣} = \frac{٢ \times (-٧٢٨)}{-٢} = ٧٢٨$$

عندما ر = −٣ تصبح المتتالية : ٢ ، −٦ ، ١٨ ، −٥٤ ، ١٦٢ .....

$$ج_{٦} = \frac{٢ \times [١ - (-٣)^{٦}]}{١ - (-٣)} = \frac{٢ \times (-٧٢٨)}{٤} = -٣٦٤$$

إنتهى

جـ) أثبت باستخدام الإستقراء الرياضي صحة العبارة التالية :

$$١ + ٢ + ٣ + ... + ن = \frac{ن(ن + ١)}{٢} \text{ ، } ن \in ط^*$$

الحل

عندما ن = ١ ⇐ الطرف الأيمن = ن = ١

الطرف الأيسر = $\frac{١ \times (١ + ١)}{٢} = \frac{٢}{٢} = ١$ = الطرف الأيمن ⇐ العبارة صحيحة عندما ن = ١

نفرض أن العبارة صحيحة عندما ن = ك أي أن :

$$١ + ٢ + ٣ + ... + ك = \frac{ك(ك + ١)}{٢} \text{ ، } ك \in ط^*$$

$$⇐ ١ + ٢ + ٣ + ... + ك + (ك + ١) = \frac{ك(ك + ١)}{٢} + (ك + ١) =$$

$$\frac{ك(ك + ١) + ٢(ك + ١)}{٢} = \frac{(ك + ١)(ك + ٢)}{٢}$$ ⇐ العبارة صحيحة عندما ن = ك + ١

$$⇐ \text{العبارة } ١ + ٢ + ٣ + ... + ن = \frac{ن(ن + ١)}{٢} \text{ ، } ن \in ط^* \text{ صحيحة}$$

إنتهى

١ يبين الجدول التالي أسعار وكميات سلعتين في عامي ٢٠٠٥م ، ٢٠٠٩م

السلعة	السعر		الكمية	
	٢٠٠٥	٢٠٠٩	٢٠٠٥	٢٠٠٩
أ	١٢	١٥	٤٥	٤٤
ب	١١	١٦	٤٣	٥٦

باعتبار سنة ٢٠٠٥ هي سنة الأساس جد ما يلي :

أ) الرقم القياسي لسعر السلعة أ في عام ٢٠٠٩ .

ب) الرقم القياسي لكمية السلعة ب في عام ٢٠٠٩

جـ) الرقم القياسي لقيمة الإنفاق على السلعة أ في عام ٢٠٠٩

الحل

أ) الرقم القياسي لسعر السلعة أ في عام ٢٠٠٩ = $\frac{\text{سعر السلعة أ عام ٢٠٠٩}}{\text{سعر السلعة أ عام ٢٠٠٥}} \times ١٠٠\%$

= $\frac{١٥}{١٢} \times ١٠٠\% = ١٢٥\%$

ب) الرقم القياسي لكمية السلعة ب في عام ٢٠٠٩ = $\frac{\text{كمية السلعة ب عام ٢٠٠٩}}{\text{كمية السلعة ب عام ٢٠٠٥}} \times ١٠٠\%$

= $\frac{٥٦}{٤٣} \times ١٠٠\% \approx ١٣٠\%$

جـ)

الرقم القياسي لقيمة الإنفاق على السلعة أ في عام ٢٠٠٩ = $\frac{\text{قيمة الإنفاق على السلعة أ عام ٢٠٠٩}}{\text{قيمة الإنفاق على السلعة أ عام ٢٠٠٥}} \times ١٠٠\%$

= $\frac{\text{سعر السلعة أ} \times \text{كميتها عام ٢٠٠٩}}{\text{سعر السلعة أ} \times \text{كميتها عام ٢٠٠٥}} \times ١٠٠\% = \frac{١٥ \times ٤٤}{١٢ \times ٤٥} \approx ١٢٢\%$

إنتهى

٢ كان متوسط سعر جهاز الراديو عام ١٩٩٠ هو ١٢٠ دينار وكان الرقم القياسي لسعر الجهاز في عام ١٩٩٥ بالنسبة لسعره في عام ١٩٩٠ هو ١٦٠% كم كان سعر الجهاز في عام ١٩٩٥ ؟

الحل

الرقم القياسي لسعر الجهاز = $\frac{ع}{ع_{.}} \times ١٠٠\% = \frac{\text{سعر الجهاز عام ١٩٩٥}}{\text{سعر الجهاز عام ١٩٩٠}} \times ١٠٠\%$

⇐ $١٦٠\% = \frac{\text{سعر الجهاز عام ١٩٩٥}}{١٢٠} \times ١٠٠\%$ ⇐ $\frac{١٦٠}{١٠٠} = \frac{\text{سعر الجهاز عام ١٩٩٥}}{١٢٠} \times \frac{١٠٠}{١٠٠}$

⇐ سعر الجهاز عام ١٩٩٥ = $\frac{١٦٠ \times ١٢٠}{١٠٠}$ = ١٩٢ دينار

إنتهى

٣ كان متوسط سعر سلعة ما في عام ١٩٩٠ هو ١٨٠ دينار وكان الرقم القياسي لسعر السلعة في عام ١٩٩٥ بالنسبة لسعرها في عام ١٩٩٠ هو ١٤٠% كم كان سعر السلعة في العام ١٩٩٥ ؟

الحل

الرقم القياسي لسعر السلعة = $\frac{ع}{ع_{.}} \times ١٠٠\% = \frac{\text{سعر السلعة عام ١٩٩٥}}{\text{سعر السلعة عام ١٩٩٠}} \times ١٠٠\%$

⇐ $١٤٠\% = \frac{\text{سعر السلعة عام ١٩٩٥}}{١٨٠} \times ١٠٠\%$ ⇐ $\frac{١٤٠}{١٠٠} = \frac{\text{سعر السلعة عام ١٩٩٥}}{١٨٠} \times \frac{١٠٠}{١٠٠}$

⇐ سعر السلعة عام ١٩٩٥ = $\frac{١٤٠ \times ١٨٠}{١٠٠}$ = ٢٥٢ دينار

إنتهى

٤ جد الرقم القياسي النسبي البسيط والرقم القياسي التجميعي البسيط لأسعار عام ١٩٩٠ بالنسبة لعام ١٩٨٥ من الجدول الآتي :

السلعة	وحدة القياس	السعر	
		١٩٩٠	١٩٨٥
أ	الطن	٣٠	٥٥
ب	العلبة	٢١٠	٢٠٠
جـ	الدزينة	٩٠	١٠٠
د	اللتر	٧٥	٨٥

الحل

الرقم القياسي النسبي البسيط لأسعار عام ١٩٩٠ بالنسبة لعام ١٩٨٥ = $\frac{\sum \frac{ع}{ع_٠}}{ن} \times ١٠٠\%$

$$= \frac{\frac{٣٠}{٥٥} + \frac{٢١٠}{٢٠٠} + \frac{٩٠}{١٠٠} + \frac{٧٥}{٨٥}}{٤} \times ١٠٠\% = ٨٤,٥\ \%$$

الرقم القياسي التجميعي البسيط لأسعار عام ١٩٩٠ بالنسبة لعام ١٩٨٥ = $\frac{\sum ع}{\sum ع_٠} \times ١٠٠\%$

$$= \frac{٣٠ + ٢١٠ + ٩٠ + ٧٥}{٥٥ + ٢٠٠ + ١٠٠ + ٨٥} \times ١٠٠\% = \frac{٤٠٥}{٤٤٠} \times ١٠٠\% = ٩٢\ \%$$

إنتهى

٥ أوجد الرقم القياسي النسبي البسيط والرقم القياسي التجميعي البسيط لأسعار عام ١٩٩٠ بالنسبة لعام ١٩٨٠ من الجدول الآتي :

السلعة	السعر	
	١٩٩٠	١٩٨٠
أ	٢٤	٢٢
ب	٥٨	٦٠
جـ	٤٢	٢٠
د	٢٥	٣٠

الحل

الرقم القياسي النسبي البسيط لأسعار عام ١٩٩٠ بالنسبة لعام ١٩٨٠ = $\frac{\sum \frac{ع}{ع_٠}}{ن} \times ١٠٠\%$

$$= \frac{\frac{٢٤}{٢٢} + \frac{٥٨}{٦٠} + \frac{٤٢}{٢٠} + \frac{٢٥}{٣٠}}{٤} \times ١٠٠\% = ١٢٤,٧٧\ \%$$

الرقم القياسي التجميعي البسيط لأسعار عام ١٩٩٠ بالنسبة لعام ١٩٨٠ = $\frac{\sum ع}{\sum ع_٠} \times ١٠٠\%$

$$= \frac{٢٤ + ٥٨ + ٤٢ + ٢٥}{٢٢ + ٦٠ + ٢٠ + ٣٠} \times ١٠٠\% = \frac{١٤٩}{١٣٢} \times ١٠٠\% = ١١٢,٨٨\ \%$$

إنتهى

٦ جد الرقم القياسي النسبي البسيط والرقم القياسي التجميعي البسيط لأسعار عام ١٩٩٠ بالنسبة لعام ١٩٨٥ من الجدول الآتي :

السلعة	وحدة القياس	السعر	
		١٩٨٥	١٩٩٠
أ	الطن	٤٠	٥٥
ب	العلبة	٢٠	٣٠
جـ	الدزينة	٨٨	١٠٠
د	اللتر	٤٦	٥٧

الحل

الرقم القياسي النسبي البسيط لأسعار عام ١٩٩٠ بالنسبة لعام ١٩٨٥ = $\frac{\sum \frac{ع}{ع_{.}}}{ن} \times ١٠٠\%$

$= \frac{\frac{٥٥}{٤٠} + \frac{٣٠}{٢٠} + \frac{١٠٠}{٨٨} + \frac{٥٧}{٤٦}}{٤} \times ١٠٠\% = ١٣١,٢٦\%$

الرقم القياسي التجميعي البسيط لأسعار عام ١٩٩٠ بالنسبة لعام ١٩٨٥ = $\frac{\sum ع}{\sum ع_{.}} \times ١٠٠\%$

$= \frac{٥٥ + ٣٠ + ١٠٠ + ٥٧}{٤٠ + ٢٠ + ٨٨ + ٤٦} \times ١٠٠\% = \frac{٢٤٢}{١٩٤} \times ١٠٠\% = ١٢٤,٧٤\%$

إنتهى

٧ جد رقم لاسبير النسبي من الجدول التالي :

السلعة	الرقم القياسي	كميات سنة الأساس
أ	٩٨%	٤
ب	١٠٥%	٥
جـ	١٠٢%	٣

الحل

$$\text{رقم لاسبير النسبي للأسعار} = \frac{\sum \frac{\text{ع}}{\text{ع}_{\circ}} \times \text{و}_{\circ}}{\sum \text{و}_{\circ}} \times ١٠٠\%$$

$$= \frac{(٩٨\% \times ٤) + (١٠٥\% \times ٥) + (١٠٢\% \times ٣)}{٤ + ٥ + ٣} = \frac{٣٩٢\% + ٥٢٥\% + ٣٠٦\%}{١٢}$$

$$= \frac{١٢٢٣\%}{١٢} = ١٠١,٩\ \%$$

إنتهى

٨ جد الرقم القياسي للسلعة جـ في الجدول التالي علماً بأن رقم لاسبير النسبي لجميع السلع = ١٢٠%

السلعة	الرقم القياسي	كميات سنة الأساس
أ	١١٠%	٣
ب	١٠٢%	٢
جـ	س%	٥

الحل

$$\text{رقم لاسبير النسبي للأسعار} = \frac{\sum \frac{\text{ع}}{\text{ع}_{\circ}} \times \text{و}_{\circ}}{\sum \text{و}_{\circ}} \times ١٠٠\%$$

$$= \frac{(١١٠\% \times ٣) + (١٠٢\% \times ٢) + (\text{س}\% \times ٥)}{٣ + ٢ + ٥} = \frac{٣٣٠\% + ٢٠٤\% + ٥\text{س}\%}{١٠}$$

$$= \frac{٥٣٤\% + ٥\text{س}\%}{١٠}$$

$\because$ رقم لاسبير النسبي لجميع السلع = ١٢٠% $\Leftarrow$ $\frac{٥٣٤\% + ٥\text{س}\%}{١٠} = ١٢٠\%$

$\Leftarrow$ ٥٣٤% + ٥س% = ١٢٠٠% $\Leftarrow$ ٥س % = ١٢٠٠ % − ٥٣٤ %

$\Leftarrow$ ٥س % = ٦٦٦% $\Leftarrow$ س% = ١٣٣,٢ %

إنتهى

٩ جد الرقم القياسي للسلعة جـ في الجدول التالي علماً بأن رقم لاسبير النسبي لجميع السلع = ١٢٠%

السلعة	الرقم القياسي	كميات سنة الأساس
أ	١٢٠%	٤
ب	٩٠%	٢
جـ	س%	٤

الحل

$$\text{رقم لاسبير النسبي للأسعار} = \frac{\sum \frac{ع}{ع_0} \times و_0}{\sum و_0} \times ١٠٠\%$$

$$= \frac{(١٢٠\% \times ٤) + (٩٠\% \times ٢) + (س\% \times ٤)}{٤ + ٢ + ٤} = \frac{٤٨٠\% + ١٨٠\% + ٤س\%}{١٠}$$

$$\because \text{ رقم لاسبير النسبي لجميع السلع} = ١٢٠\% \Leftarrow \frac{٤٨٠\% + ١٨٠\% + ٤س\%}{١٠} = ١٢٠\%$$

$$\Leftarrow ٤٨٠\% + ١٨٠\% + ٤س\% = ١٢٠٠\% \Leftarrow ٤س\% = ١٢٠٠\% - ٤٨٠\% - ١٨٠\%$$

$$\Leftarrow ٤س\% = ٥٤٠\% \Leftarrow س\% = ١٣٥\%$$

إنتهى

١٠ تغيرت الأسعار من عام ٢٠٠٠ إلى عام ٢٠٠٥ كالتالي :

زادت أسعار الطعام بمقدار ٣% ونقصت أسعار الملابس بمقدار ٥% وزادت أسعار بمقدار ٢% فإذا كانت الأوزان المرجحة للطعام = ٠,٢٤ وللمواصلات = ٠,٤٥ وللملابس = ٠,٣١ فأوجد رقم لاسبير النسبي لأسعار ٢٠٠٥ بالنسبة لعام ٢٠٠٠

الحل

الرقم القياسي لأسعار الطعام لعام ٢٠٠٥ بالنسبة لعام ٢٠٠٠ = ١٠٣%

الرقم القياسي لأسعار الملابس لعام ٢٠٠٥ بالنسبة لعام ٢٠٠٠ = ٩٥%

الرقم القياسي لأسعار الطعام لعام ٢٠٠٥ بالنسبة لعام ٢٠٠٠ = ١٠٢%

$$\text{رقم لاسبير النسبي للأسعار} = \frac{\sum \frac{ع}{ع_0} \times ١٠٠\% \times و_0}{\sum و_0}$$

$$= \frac{(١٠٣\% \times ٠,٢٤) + (٩٥\% \times ٠,٤٥) + (١٠٢\% \times ٠,٣١)}{٠,٢٤ + ٠,٤٥ + ٠,٣١} = ٩٩,١\%$$

إنتهى

السؤال الأول : إختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :

١) إذا كان الرقم القياسي لسعر صندوق البندورة سنة ٢٠٠٥ بالنسبة لسعرها سنة ٢٠٠٧ هو ١٥٠% وكان سعر صندوق البندورة سنة ٢٠٠٧ هو ٧٥ قرش فإن سعر صندوق البندورة سنة ٢٠٠٥ هو :

أ) ١١٢,٥ قرش ب) ٥٠ قرش ج) ١١٢٥ قرش د) لا يمكن تحديد ذلك

٢) إذا زادت أسعار الطعام من عام ١٩٩٥ إلى عام ١٩٩٦ بمقدار ٤% فإن الرقم القياسي في عام ١٩٩٥ بالنسبة لعام ١٩٩٦ (باتخاذ سنة الأساس ١٩٩٦) هو :

أ) ٩٦% ب) ١٠٤% ج) لا يمكن معرفته د) غير ذلك

٣) حسبت الأرقام القياسية لأسعار سلعة باتخاذ ١٩٩٠ سنة الأساس ، الرقم القياسي لسعر السلعة عام ١٩٩٠ هو :

أ) ١٩٩٠% ب) ١٠٠% ج) ١٧٠% د) لا يمكن معرفته

٤) إذا كان الرقم القياسي لسعر سلعة ما في مدينة غزة بالنسبة للقدس هو ١٣٠% فإن الرقم القياسي لسعر هذه السلعة في القدس بالنسبة إلى غزة هو

أ) ٣٠% ب) ٧٧% ج) ١٧٠% د) لا يمكن معرفته

** إعتمد على البيانات المعطاة في الجدول الأتي للإجابة على الفقرتين ٥ ، ٦ الآتيتين :

السلعة	الأسعار		الكميات	
	١٩٩٠	٢٠٠٠	١٩٩٠	٢٠٠٠
أ	١	٢	١٠٠	١٥٠
ب	٣	٤	٨٠	٧٠

٥) الرقم القياسي التجميعي البسيط لأسعار عام ٢٠٠٠ بالنسبة لعام ١٩٩٠ هو :

أ) ١٥٠% ب) ٦٧% ج) ١٢٥% د) ١١٤%

٦) رقم لاسبير التجميعي لأسعار عام ٢٠٠٠ بالنسبة لعام ١٩٩٠ هو :

أ) ١٤٩% ب) ١٥٣% ج) ١٦٠% د) ١١١%

٧) الرقم القياسي الذي يأخذ الأهمية النسبية لكل سلعة بعين الإعتبار ويعطي أوزاناً للسلع المختلفة وفق معايير محددة هو :

أ) الرقم القياسي المرجح ب) الرقم القياسي البسيط

ج) الرقم القياسي التجميعي البسيط د) الرقم النسبي البسيط

٨) الرقم القياسي لمجموعة من السلع الذي هو الوسط الحسابي للأرقام القياسية لتلك السلع يعرف بـ :

أ) رقم لاسبير النسبي
ب) رقم لاسبير التجميعي
ج) الرقم القياسي التجميعي البسيط
د) الرقم القياسي النسبي البسيط

الحل

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
الإجابة الصحيحة	أ	أ	ب	ب	أ	ب	أ	د

إنتهى

السؤال الثاني

يمثل الجدول التالي أسعار وكميات ٤ سلع

السلعة	٢٠٠٨		٢٠١٠	
	الأسعار	الكميات	الأسعار	الكميات
أ	١٠	٤	١	١٣
ب	٦	١	٢	٥
جـ	١	٢	٥	٤
د	٣	٣	٢	٤

بإتخاذ سنة ٢٠٠٨ كسنة أساس جد كلاً من :

أ) الرقم القياسي النسبي البسيط لأسعار عام ٢٠١٠م
ب) الرقم القياسي التجميعي البسيط لأسعار عام ٢٠١٠م
جـ) رقم لاسبير النسبي البسيط لأسعار عام ٢٠١٠م
د) رقم لاسبير التجميعي البسيط لأسعار عام ٢٠١٠م

الحل

أ) الرقم القياسي النسبي البسيط لأسعار عام ٢٠١٠م $= \frac{\sum \frac{ع}{ع_٠}}{ن} \times ١٠٠\%$

$$= \frac{\frac{١}{١٠} + \frac{٢}{٦} + \frac{٥}{١} + \frac{٢}{٣}}{٤} \times ١٠٠\% = ١٥٢,٥\ \%$$

ب) الرقم القياسي التجميعي البسيط لأسعار عام ٢٠١٠م = $\frac{\sum ع}{\sum ع_{٠}} \times ١٠٠\%$

$= \frac{١ + ٢ + ٥ + ٢}{١٠ + ٦ + ١ + ٣} \times ١٠٠\% = \frac{١٠}{٢٠} \times ١٠٠\% = ٥٠\%$

ج) رقم لاسبير النسبي للأسعار = $\frac{\sum \frac{ع}{ع_{٠}} \times و_{٠}}{\sum و_{٠}} \times ١٠٠\%$

$= \frac{\frac{١}{١٠} \times ٤ + \frac{٢}{٦} \times ١ + \frac{٥}{١} \times ٢ + \frac{٢}{٣} \times ٣}{٤ + ١ + ٢ + ٣} \times ١٠٠\% = ١٢٧,٣٣\%$

د) رقم لاسبير التجميعي البسيط لأسعار عام ٢٠١٠م = $\frac{\sum ع \times و_{٠}}{\sum ع_{٠} \times و_{٠}} \times ١٠٠\%$

$= \frac{(١ \times ٤) + (٢ \times ١) + (٥ \times ٢) + (٢ \times ٣)}{(١٠ \times ٤) + (٦ \times ١) + (١ \times ٢) + (٣ \times ٣)} \times ١٠٠\% = \frac{٢٢}{٥٧} \times ١٠٠\% = ٣٨,٥٩\%$

إنتهى

السؤال الثالث

تغيرت الأسعار من عام ١٩٩٥ إلى عام ١٩٩٦ كما يلي : زادت أسعار الطعام بمقدار ٤% وزادت أسعار المواصلات بمقدار ٨% ونقصت أسعار الملابس بنسبة ٥% فإذا كانت النسبة بين الأوزان المرجحة للطعام والمواصلات والملابس هي ٢ : ٣ : ٤ ، أوجد رقم لاسبير النسبي لأسعار عام ١٩٩٦ بالنسبة لعام ١٩٩٥ .

الحل

الرقم القياسي لسعر الطعام $\frac{ع}{ع_{٠}} = ١٠٤\%$ والوزن النسبي له $و_{٠} = ٢$

الرقم القياسي لسعر المواصلات $\frac{ع}{ع_{٠}} = ١٠٨\%$ والوزن النسبي له = ٣

الرقم القياسي لسعر الملابس $\frac{ع}{ع_{٠}} = ٩٥\%$ والوزن النسبي له = ٤

رقم لاسبير النسبي للأسعار = $\frac{\sum \frac{ع}{ع_{٠}} \times و_{٠}}{\sum و_{٠}} \times ١٠٠\%$

$$= \frac{(١٠٤\% \times ٢) + (١٠٨\% \times ٣) + (٩٥\% \times ٤)}{٢ + ٣ + ٤} = \frac{٢٠٨\% + ٣٢٤\% + ٣٨٠\%}{٩}$$

$$= \frac{٩١٢\%}{٩} = ١٠١,٣\%$$

إنتهى

السؤال الرابع

من الجدول التالي أوجد قيمة س علماً بأن رقم لاسبير النسبي لجميع السلع = ١٠٤%

السلعة	الرقم القياسي	كميات سنة الأساس
أ	١٢٠%	٥
ب	٨٠%	٣
جـ	س%	٢

الحل

$$\text{رقم لاسبير النسبي للأسعار} = \frac{\sum \frac{ع}{ع_٠} \times و_٠}{\sum و_٠} \times ١٠٠\%$$

$$= \frac{(١٢٠\% \times ٥) + (٨٠\% \times ٣) + (س\% \times ٢)}{٥ + ٣ + ٢} = \frac{٦٠٠\% + ٢٤٠\% + ٢س\%}{١٠}$$

∵ رقم لاسبير النسبي لجميع السلع = ١٠٤% ⇐ $\frac{٦٠٠\% + ٢٤٠\% + ٢س\%}{١٠} = ١٠٤\%$

⇐ ٦٠٠% + ٢٤٠% + ٢س% = ١٠٤٠% ⇐ ٢س % = ١٠٤٠ % − ٦٠٠% − ٢٤٠%

⇐ ٢س % = ٢٠٠% ⇐ س% = ١٠٠ %

إنتهى

أولاً : التباديل والتوافيق

١ بكم طريقة يمكن لأربعة أشخاص الجلوس في صف به ٨ مقاعد ؟

الحل

عدد الطرق = ل (٨ ، ٤) = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ = ١٦٨٠ طريقة

إنتهى

٢ كم عدد مكون من رقمين يمكن تكوينه من الأرقام ٢، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ إذا كان :

أ) غير مسموح بتكرار أي رقم .

ب) إذا سمح بالتكرار .

الحل

أ) عدد الطرق = ل (٥ ، ٢) = ٥ × ٤ = ٢٠ طريقة

ب) عدد الطرق = ٥ ^{٢} = ٥ × ٥ = ٢٥ طريقة

إنتهى

٣ لدينا الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ أوجد :

أ) كم عدد رقم آحاده ٤ ويتكون من ٥ أرقام يمكن تكوينه من الأرقام السابقة دون تكرار

ب) كم عدد زوجي من ٣ منازل يمكن تكوينه من الأرقام السابقة دون تكرار

جـ) كم عدداً فردياً يمكن تكوينه من الأرقام السابقة دون تكرار

د) كم عدداً أكبر من ٤٠٠ ويتكون من ٣ أرقام يمكن تكوينه من جميع الأرقام السابقة دون تكرار .

الحل

أ) عدد الأعداد = ١ × ل (٦ ، ٤) = ١ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ١ × ٣٦٠ = ٣٦٠

ب) عدد الأعداد = ٣ × ٦ × ٥ = ٩٠

جـ) عدد الأعداد = ٤ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ = ٢٤

د) عدد الأعداد = ٤ × ٦ × ٥ = ١٢٠

إنتهى

٤ كم مباراة في مسابقة الدوري العام لكرة القدم تتم بين الفرق المشتركة علماً بأن عدد الفرق ١٢ فريقاً

الحل

عدد المباريات = ١٢ × ١١ = ١٣٢ مباراة

إنتهى

٥ أوجد قيمة كلاً من : ل (٧ ، ١) ، ل (٩ ، ٠) ، ٣! ، ٠!

الحل

ل (٧ ، ١) = ٧ ، ل (٩ ، ٠) = ١ ، ٣! = ٣ × ٢ × ١ = ٦ ، ٠! = ١

إنتهى

٦ إذا كان ن! = ٢٤ فأوجد ل (٢ن ، ٣) .

الحل

∵ ن! = ٢٤ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٤! ⇐ ن = ٤ ⇐ ل (٢ن ، ٣) = ل (٨ ، ٣)

= ل (٨ ، ٣) = ٨ × ٧ × ٦ = ٣٣٦

إنتهى

٧ إذا كان ل (٨ ، ر) = ٦٧٢٠ فأوجد (ر + ١)!

الحل

∵ ل (٨ ، ر) = ٦٧٢٠ = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = ل (٨ ، ٥) ⇐ ر = ٥

⇐ (ر + ١)! = (٥ + ١)! = ٦! = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠

إنتهى

٨ أثبت أن : $\frac{(ن + ١)!}{(ن - ١)!}$ = ن^{٢} + ن .

الحل

$\frac{(ن + ١)!}{(ن - ١)!} = \frac{(ن + ١)(ن)(ن - ١)!}{(ن - ١)!}$ = (ن + ١) (ن) = ن^{٢} + ن

إنتهى

٩ إذا كان ($\frac{١}{٢}$ ن)! = ١٢٠ فما قيمة ل (ن ، ٣) ؟

الحل

∵ ($\frac{١}{٢}$ ن)! = ١٢٠ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٥!

⇐ $\frac{١}{٢}$ ن = ٥ ⇐ ن = ١٠ ⇐ ل (ن ، ٣) = ل (١٠ ، ٣) = ١٠ × ٩ × ٨ = ٧٢٠

إنتهى

١٠ إذا كان ل (٦ ، ر) = ٤ ل (٦ ، ر − ١) فأوجد قيمة (ر + ١)! .

الحل

ل (٦ ، ر) = ٤ ل (٦ ، ر − ١)

حسب القاعدة : ل (ن ، ر) = ن (ن − ١) (ن − ٢) ..... (ن − ر + ١)

$\frac{٦!}{(٦ - ر)!} = ٤ \times \frac{٦!}{[٦ - (ر - ١)]!}$

$\Leftarrow \frac{٦!}{(٦ - ر)!} = ٤ \times \frac{٦!}{(٧ - ر)!} \Leftarrow \frac{(٧ - ر)!}{(٦ - ر)!} = ٤ \Leftarrow \frac{(٧ - ر) \times (٦ - ر)!}{(٦ - ر)!} = ٤$

$\Leftarrow ٧ - ر = ٤ \Leftarrow ر = ٣$

$\Leftarrow (ر + ١)! = (٣ + ١)! \Leftarrow ٤! = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٢٤$

إنتهى

١١ إذا كان ل (ن ، ١٥) > ٤ ل (ن ، ١٤) فأوجد أقل قيمة للعدد ن التي تحقق المتباينة .

الحل

$ل(ن ، ١٥) = \frac{ن!}{(ن - ١٥)!}$ ، $ل(ن ، ١٤) = \frac{ن!}{(ن - ١٤)!}$

$ل(ن ، ١٥) > ٤ ل(ن ، ١٤) \Leftarrow \frac{ن!}{(ن - ١٥)!} > ٤ \frac{ن!}{(ن - ١٤)!}$

$\Leftarrow \frac{١}{(ن - ١٥)!} > \frac{٤}{(ن - ١٤)!} \Leftarrow \frac{١}{(ن - ١٥)!} > \frac{٤}{(ن - ١٤)(ن - ١٥)!}$

$\Leftarrow ١ > \frac{٤}{(ن - ١٤)}$ وعند قلب الكسور تقلب إشارة المتباينة

$\Leftarrow ١ < \frac{(ن - ١٤)}{٤} \Leftarrow ٤ < ن - ١٤ \Leftarrow ن > ١٨$

$\Leftarrow$ أقل قيمة للعدد ن التي تحقق المتباينة هى ن = ١٩

حـل آخـر

$ل(ن ، ١٥) > ٤ ل(ن ، ١٤) \Leftarrow \frac{ل(ن ، ١٥)}{ل(ن ، ١٤)} > ٤$

وحسب القاعدة : $ل(ن ، ر) = ن(ن - ١)(ن - ٢) \ldots\ldots\ldots\ldots (ن - ر + ١)$

$\Leftarrow \frac{ن(ن - ١)(ن - ٢) \ldots\ldots\ldots\ldots (ن - ١٥ + ١)}{ن(ن - ١)(ن - ٢) \ldots\ldots\ldots\ldots (ن - ١٤ + ١)} > ٤$

$\Leftarrow \frac{ن(ن - ١)(ن - ٢) \ldots\ldots\ldots\ldots (ن - ١٤)}{ن(ن - ١)(ن - ٢) \ldots\ldots\ldots\ldots (ن - ١٣)} > ٤$

$\Leftarrow ن - ١٤ > ٤ \Leftarrow ن > ١٨$

$\Leftarrow$ أقل قيمة للعدد ن التي تحقق المتباينة هى ن = ١٩

إنتهى

١٢ بكم طريقة يمكن إنتخاب ٣ لجان كل منها تتكون من شخصين من بين ١٠ أشخاص بحيث لا يشترك الشخص في أكثر من لجنة واحدة ؟

الحل

عدد طرق إختيار اللجنة الأولى = $\binom{١٠}{٢} = ٤٥$

عدد طرق إختيار اللجنة الأولى = $\binom{٨}{٢}$ = ٢٨

عدد طرق إختيار اللجنة الأولى = $\binom{٦}{٢}$ = ١٥

عددطرق إختيار اللجان الثلاثة = ٤٥ × ٢٨ × ١٥ = ١٨٩٠٠

إنتهى

١٣ بدون آلة حاسبة أوجد كلاً من : $\binom{٩}{٣}$ ، $\binom{٨}{٠}$ ، $\binom{٤٠}{٤٠}$ ، $\binom{١٠٠}{٩٩}$

الحل

$\binom{٩}{٣} = \frac{ل(٩ ، ٣)}{!٣} = \frac{٩ \times ٨ \times ٧}{٣ \times ٢ \times ١} = \frac{٥٠٤}{٦} = ٨٤$

$\binom{٨}{٠}$ = ١ (من النتيجة $\binom{ن}{٠}$ = ١)

$\binom{٤٠}{٤٠}$ = ١ (من النتيجة $\binom{ن}{ن}$ = ١)

$\binom{١٠٠}{٩٩} = \binom{١٠٠}{١}$ = ١٠٠

إنتهى

١٤ أثبت أن $\binom{٥}{٠} + \binom{٥}{١} + \binom{٥}{٢} + \binom{٥}{٣} + \binom{٥}{٤} + \binom{٥}{٥} = ٢^{٥}$

الحل

$\binom{٥}{٠} + \binom{٥}{١} + \binom{٥}{٢} + \binom{٥}{٣} + \binom{٥}{٤} + \binom{٥}{٥}$

$= \binom{٥}{٠} + \binom{٥}{١} + \binom{٥}{٢} + \binom{٥}{٢} + \binom{٥}{١} + \binom{٥}{٠} = ١ + ٥ + \frac{ل(٥ ، ٢)}{!٢} + \frac{ل(٥ ، ٢)}{!٢} + ٥ + ١$

$= ١ + ٥ + \frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١} + \frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١} + ٥ + ١ = ١ + ٥ + ١٠ + ١٠ + ٥ + ١ = ٣٢ = ٢^{٥}$

إنتهى

١٥ عشرة أساتذة يراد ترشيح ٣ منهم للسفر لحضور مؤتمر علمي في أمريكا و ٣ منهم لحضور مؤتمر أخر يعقد في نفس الوقت في إنجلترا ، بكم طريقة يمكن إختيار البعثتين .

الحل

البعثة التي ستذهب لأمريكا يتم إختيارها بعدد من الطرق = $\binom{١٠}{٣}$

البعثة التي ستذهب لإنجلترا يتم إختيارها بعدد من الطرق = $\binom{٧}{٣}$

إذن عدد طرق إختيار البعثتين = $\binom{١٠}{٣} \times \binom{٧}{٣}$ = ١٢٠ × ٣٥ = ٤٢٠٠ طريقة

إنتهى

١٦ إذا كان $\binom{٧٥}{٤ر} = \binom{٧٥}{٣ر + ٥}$ فأوجد قيمة / قيم ر .

الحل

∵ $\binom{٧٥}{٤ر} = \binom{٧٥}{٣ر + ٥}$

⇐ إما ٤ر = ٣ر + ٥ أو ٤ر + ٣ر + ٥ = ٧٥

عندما ٤ر = ٣ر + ٥

⇐ ٤ر − ٣ر = ٥ ⇐ ر = ٥

عندما ٤ر + ٣ر + ٥ = ٧٥

⇐ ٧ر = ٧٠ ⇐ ر = ١٠

⇐ م . ح = { ٥ ، ١٠ }

إنتهى

١٧ إذا كان $\binom{١١}{٣س} = \binom{١١}{س^٢ - ٧}$ فأوجد قيمة / قيم س .

الحل

∵ $\binom{١١}{٣س} = \binom{١١}{س^٢ - ٧}$

⇐ إما ٣س = س^٢ − ٧ أو ٣س + س^٢ − ٧ = ١١

عندما ٣س = س^٢ − ٧

⇐ س^٢ − ٣س − ٧ = ٠ ⇐ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢}$ = $\frac{-٩ \pm \sqrt{٣٧}}{٢}$

وهذه القيمة لـ س مرفوضة لأنها عدد غير صحيح موجب

عندما ٣س + س^٢ − ٧ = ١١

⇐ س^٢ + ٣س − ١٨ = ٠ ⇐ (س − ٣) (س + ٦) = ٠ ⇐ س = ٣ أو س = −٦

ونرفض س = −٦ ⇐ م . ح = { ٣ }

إنتهى

١٨ إذا كان $\binom{ن}{٩} = \binom{ن}{١١}$ فأوجد قيمة $\binom{ن}{١٨}$

الحل

$\binom{ن}{٩} = \binom{ن}{١١}$

⇐ حسب القاعدة إما ٩ = ١١ وهو غير مقبول أو ن = ٩ + ١١ ⇐ ن = ٢٠

⇐ $\binom{ن}{١٨} = \binom{٢٠}{١٨}$ = ١٩٠

إنتهى

١٩ إذا كان $\binom{ن}{٣}$ = ٣٥ فأوجد قيمة ن

الحل

$\binom{ن}{٣}$ = ٣٥ ⇐ $\frac{ل(ن ، ٣)}{٣!}$ = ٣٥ ⇐ ل (ن ، ٣) = ٣٥ × ٣! ⇐ ل (ن ، ٣) = ٢١٠

∵ ٧ × ٦ × ٥ = ٢١٠ ⇐ ن = ٧

إنتهى

٢٠ إذا كان ل (ن ، ر) = ١٢٠ ، $\binom{ن}{ر}$ = ٢٠ فما قيمة كل من ر ، ن .

الحل

∵ $\binom{ن}{ر}$ = ٢٠ ⇐ $\frac{ل(ن ، ر)}{ر!}$ = ٢٠ ---------- ①

بالتعويض عن قيمة ل(ن ، ر) = ١٢٠ في المعادلة ①

∴ $\frac{١٢٠}{ر!}$ = ٢٠ ⇐ ر! = $\frac{١٢٠}{٢٠}$ = ٦ ∵ ر! = ٦ = ٣×٢×١ ⇐ ر = ٣

لكن ل(ن ، ر) = ١٢٠ وبالتعويض عن قيمة ر ⇐ ل(ن ، ٣) = ١٢٠

وحيث أن ١٢٠ = ٦×٥×٤ وهي حاصل ضرب ٣ أعداد متتالية أكبرها ٦

⇐ ١٢٠= ل(٦ ، ٣) ⇐ ن = ٦

إنتهى

٢١ إذا كان $\binom{ن}{٣}$: $\binom{ن-١}{٤}$ = $\frac{٨}{٥}$ فما قيمة / قيم ن .

الحل

$\binom{ن}{٣}$: $\binom{ن-١}{٤}$ = $\frac{٨}{٥}$ ⇐ $\frac{ل(ن ، ٣)}{٣!}$: $\frac{ل(ن-١ ، ٤)}{٤!}$ = $\frac{٨}{٥}$

⇐ $\frac{٤! \times ل(ن ، ٣)}{٣! \, ل(ن-١ ، ٤)}$ = $\frac{٨}{٥}$ ⇐ $\frac{٤ \times ل(ن ، ٣)}{ل(ن-١ ، ٤)}$ = $\frac{٨}{٥}$

⇐ $\frac{٤ن(ن-١)(ن-٢)}{(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)}$ = $\frac{٨}{٥}$ ⇐ $\frac{٤ن}{(ن-٣)(ن-٤)}$ = $\frac{٨}{٥}$

⇐ ٢٠ن = ٨ (ن − ٣) (ن − ٤) ⇐ ٢٠ن = ٨ (ن^{٢} − ٧ن + ١٢)

⇐ ٥ن = ٢ (ن^{٢} − ٧ن + ١٢) ⇐ ٥ن = ٢ن^{٢} − ١٤ن + ٢٤

⇐ ٢ن^{٢} − ١٩ن + ٢٤ = صفر ⇐ (ن − ٨) (٢ن − ٣) = صفر

⇐ ن = ٨ (مقبول) ، ن = $\frac{٣}{٢}$ (مرفوض) ⇐ م . ح = { ٨ }

إنتهى

٢٢ إذا كان $\binom{١٦}{ر + ٥} = \binom{١٦}{٢ر - ١٠}$ فأوجد قيمة / قيم ر .

الحل

$\because \binom{١٦}{ر + ٥} = \binom{١٦}{٢ر - ١٠}$

⇐ إما ر + ٥ = ٢ر − ١٠ أو ر + ٥ + ٢ر − ١٠ = ١٦

عندما ر + ٥ = ٢ر − ١٠

⇐ ٢ر − ر = ٥ + ١٠ ⇐ ر = ١٥

عندما ر + ٥ + ٢ر − ١٠ = ١٦

⇐ ٣ر = ٢١ ⇐ ر = ٧

⇐ م . ح = { ٧ ، ١٥ }

إنتهى

ثانياً : نظرية ذات الحدين

١ أوجد مفكوك $(س^٢ + ٣ص)^٥$.

الحل

$(س^٢ + ٣ص)^٥ = \binom{٥}{٠} \times (س^٢)^٥ \times (٣ص)^٠ + \binom{٥}{١} \times (س^٢)^٤ \times (٣ص)^١ + \binom{٥}{٢} \times (س^٢)^٣$

$\times (٣ص)^٢ + \binom{٥}{٣} \times (س^٢)^٢ \times (٣ص)^٣ + \binom{٥}{٤} \times (س^٢)^١ \times (٣ص)^٤ + \binom{٥}{٥} \times (س^٢)^٠$

$\times (٣ص)^٥$

$= ١ \times س^{١٠} \times ١ + ٥ \times س^٨ \times ٣ص + ١٠ \times س^٦ \times ٩ص^٢ + ١٠ \times س^٤ \times ٢٧ص^٣$

$+ ٥ \times س^٢ \times ٨١ص^٤ + ١ \times ١ \times ٢٤٣ص^٥$

$= س^{١٠} + ١٥ س^٨ ص + ٩٠ س^٦ ص^٢ + ٢٧٠ س^٤ ص^٣ + ٤٠٥ س^٢ ص^٤ + ٢٤٣ص^٥$

إنتهى

٢ أوجد مفكوك $(\frac{س}{٢} - \frac{٣}{س})^٥$.

الحل

$$\left(\frac{س}{٢} - \frac{٣}{س}\right)^{٥} = \left(\frac{س}{٢} + \left(-\frac{٣}{س}\right)\right)^{٥}$$

$$= \binom{٥}{٠} \times \left(\frac{س}{٢}\right)^{٥} \times \left(-\frac{٣}{س}\right)^{٠} + \binom{٥}{١} \times \left(\frac{س}{٢}\right)^{٤} \times \left(-\frac{٣}{س}\right)^{١} + \binom{٥}{٢} \times \left(\frac{س}{٢}\right)^{٣} \times \left(-\frac{٣}{س}\right)^{٢}$$

$$+ \binom{٥}{٣} \times \left(\frac{س}{٢}\right)^{٢} \times \left(-\frac{٣}{س}\right)^{٣} + \binom{٥}{٤} \times \left(\frac{س}{٢}\right)^{١} \times \left(-\frac{٣}{س}\right)^{٤} + \binom{٥}{٥} \times \left(\frac{س}{٢}\right)^{٠} \times \left(-\frac{٣}{س}\right)^{٥}$$

$$= ١ \times \frac{س^{٥}}{٣٢} \times ١ - ٥ \times \frac{س^{٤}}{١٦} \times \frac{٣}{س} + ١٠ \times \frac{س^{٣}}{٨} \times \frac{٩}{س^{٢}} - ١٠ \times \frac{س^{٢}}{٤} \times \frac{٢٧}{س^{٣}}$$

$$+ ٥ \times \frac{س}{٢} \times \frac{٨١}{س^{٤}} - ١ \times ١ \times \frac{٢٤٣}{س^{٥}}$$

$$= \frac{س^{٥}}{٣٢} - \frac{١٥س^{٣}}{١٦} + \frac{٤٥س}{٤} - \frac{١٣٥}{٢س} + \frac{٤٠٥}{٢س^{٣}} - \frac{٢٤٣}{س^{٥}}$$

إنتهى

٣ باستخدام نظرية ذات الحدين أوجد قيمة $(٠,٩٦)^{٥}$ مقرباً الجواب إلى ٣ أرقام عشرية .

الحل

$$(٠,٩٦)^{٥} = (١ - ٠,٠٤)^{٥}$$

$$= \binom{٥}{٠} \times ١^{٥} \times (-٠,٠٤)^{٠} + \binom{٥}{١} \times ١^{٤} \times (-٠,٠٤)^{١} + \binom{٥}{٢} \times ١^{٣} \times (-٠,٠٤)^{٢}$$

$$+ \binom{٥}{٣} \times ١^{٢} \times (-٠,٠٤)^{٣} + \binom{٥}{٤} \times ١^{١} \times (-٠,٠٤)^{٤} + \binom{٥}{٥} \times ١^{٠} \times (-٠,٠٤)^{٥}$$

$$= ١ \times ١ \times ١ - ٥ \times ١ \times ٠,٠٤ + ١٠ \times ١ \times ٠,٠٠١٦ - ١٠ \times ١ \times ٠,٠٠٠٠٦٤$$

$$+ ٥ \times ١ \times ٠,٠٠٠٠٠٢٥٦ - ١ \times ١ \times ٠,٠٠٠٠٠٠١٠٢٤$$

$$= ١ - ٠,٢ + ٠,٠١٦ - ٠,٠٠٠٦٤ + ٠,٠٠٠٠١٢٨ - ٠,٠٠٠٠٠٠١٠٢٤ = ٠,٨١٥٣٧٢٦٩٧٦$$

إنتهى

٤ أوجد الحد السابع في مفكوك $(٢أ - ب)^{٩}$ حسب قوى ب التنازلية .

الحل

حيث أن عدد الحدود ١٠ حدود فإن الحد السابع في مفكوك $(٢أ - ب)^{٩}$ حسب قوى ب التنازلية هو نفسه الحد الرابع في المفكوك

$$ح_{٤} = ح_{٣+١} = \binom{٩}{٣} \times (٢أ)^{٦} \times (-ب)^{٣} = ٨٤ \times ٢^{٦} \times أ^{٦} \times (-١)^{٣} \times ب^{٣}$$

$$= -٥٣٧٦ أ^{٦} ب^{٣}$$

حل آخر

الحد السابع في مفكوك $(٢أ - ب)^{٩}$ حسب قوى ب التنازلية هو نفسه الحد السابع في المفكوك $(-ب + ٢أ)^{٩}$

$ح_{٧} = ح_{٦+١} = \binom{٩}{٦} \times (-ب)^{٣} \times (٢أ)^{٦} = ٨٤ \times (-١)^{٣} \times ب^{٣} \times ٢^{٦} \times أ^{٦}$

$= -٥٣٧٦ أ^{٦} ب^{٣}$

إنتهى

٥ أوجد الحد الثامن في مفكوك $(٢س + \frac{١}{س})^{١٠}$.

الحل

الحد العام : $ح_{ر+١} = \binom{ن}{ر} \times (\text{الأول})^{ن-ر} \times (\text{الثاني})^{ر}$

$\Leftarrow ح_{٨} = ح_{٧+١} = \binom{١٠}{٧} \times (٢س)^{٣} \times (\frac{١}{س})^{٧} = ١٢٠ \times ٨س^{٣} \times \frac{١}{س^{٧}} = \frac{٩٦٠}{س^{٤}}$

إنتهى

٦ أوجد معامل الحد السادس في مفكوك $(٣س^{٢} + \frac{٢}{٣س})^{١٠}$.

الحل

الحد العام : $ح_{ر+١} = \binom{ن}{ر} \times (\text{الأول})^{ن-ر} \times (\text{الثاني})^{ر}$

$\Leftarrow ح_{٦} = ح_{٥+١} = \binom{١٠}{٥} \times (٣س^{٢})^{٥} \times (\frac{٢}{٣س})^{٥} = ٢٥٢ \times ٢٤٣س^{١٠} \times \frac{٣٢}{٢٤٣س^{٥}}$

$= ٨٠٦٤ س^{٥} \Leftarrow$ معامل الحد السادس $= ٨٠٦٤$

إنتهى

٧ إذا كان $١ + ٧س + \frac{٧ \times ٦}{٢ \times ١} س^{٢} + ... + س^{٧} = ٢١٨٧$ فما قيمة / قيم س .

الحل

الطرف الأيمن $= \binom{٧}{٠} \times ١^{٧} \times (س)^{٠} + \binom{٧}{١} \times ١^{٦} \times (س)^{١} + ... + \binom{٧}{٧} \times ١^{٠} \times (س)^{٧}$

وهو عبارة عن مفكوك المقدار $(١ + س)^{٧}$

$\Leftarrow (١ + س)^{٧} = ٢١٨٧ \Leftarrow ١ + س = \sqrt[٧]{٢١٨٧}$

$\Leftarrow ١ + س = ٣ \Leftarrow س = ٢$

إنتهى

٨ أوجد الحد الأوسط في مفكوك $(٢س + \frac{ص}{٢})^{٨}$.

الحل

رتبة الحد الأوسط في المفكوك هي : $\frac{ن}{٢} + ١ = \frac{٨}{٢} + ١ = ٥$ أي أن الحد الأوسط هو : $ح_{٥}$

∵ الحد العام : $ح_{ر+١} = \binom{ن}{ر} \times (\text{الأول})^{ن-ر} \times (\text{الثاني})^{ر}$

⇐ $ح_{٥} = ح_{٤+١} = \binom{٨}{٤} \times (٢س)^{٤} \times (\frac{ص}{٢})^{٤} = ٧٠ \times ١٦س^{٤} \times \frac{ص^{٤}}{١٦}$

$= ٧٠ س^{٤} ص^{٤}$

إنتهى

٩ أوجد رتبة وقيمة كل من الحدين الأوسطين في مفكوك $(١ + \sqrt{٢} س)^{٩}$.

الحل

رتبة الحدين الأوسطين في المفكوك هما :

$\frac{ن + ١}{٢} = \frac{٩ + ١}{٢} = ٥$ ، $\frac{ن + ٣}{٢} = \frac{٩ + ٣}{٢} = ٦$

⇐ الحدين الأوسطين هما : $ح_{٥}$ ، $ح_{٦}$

∵ الحد العام : $ح_{ر+١} = \binom{ن}{ر} \times (\text{الأول})^{ن-ر} \times (\text{الثاني})^{ر}$

⇐ $ح_{٥} = ح_{٤+١} = \binom{٩}{٤} \times (١)^{٥} \times (\sqrt{٢} س)^{٤} = ١٢٦ \times ١ \times ٤ س^{٤} = ٥٠٤ س^{٤}$

$ح_{٦} = ح_{٥+١} = \binom{٩}{٥} \times (١)^{٤} \times (\sqrt{٢} س)^{٥} = ١٢٦ \times ١ \times ٤ \sqrt{٢} س^{٥} = ٥٠٤ \sqrt{٢} س^{٥}$

إنتهى

١٠ أوجد الحد العاشر من النهاية في مفكوك $(\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{٤}{س})^{١٣}$.

الحل

حيث أن عدد الحدود ١٤ حد فإن الحد العاشر من النهاية هو الحد الخامس من البداية

$ح_{٥} = ح_{٤+١} = \binom{١٣}{٤} \times (\frac{س^{٢}}{٢})^{٩} \times (-\frac{٤}{س})^{٤} = ٧١٥ \times ٢^{-٩} \times س^{١٨} \times (-١)^{٤} \times ٤^{٤} \times \frac{١}{س^{٤}}$

$= ٧١٥ \times ٢^{-٩} \times س^{١٤} \times ٢^{٨} = \frac{٧١٥}{٢} س^{١٤}$

إنتهى

١١ إذا كان الحد الأوسط في مفكوك $(٣ س^{٢} + \frac{٢}{٣س})^{٨}$ يساوي ١٧٩٢٠ فما قيمة / قيم س ؟

الحل

رتبة الحد الأوسط في المفكوك هي : $\frac{ن}{٢} + ١ = \frac{٨}{٢} + ١ = ٥$ أي أن الحد الأوسط هو : $ح_{٥}$

∵ الحد العام : $ح_{ر+١} = \binom{ن}{ر} \times (\text{الأول})^{ن-ر} \times (\text{الثاني})^{ر}$

⇐ $ح_{٥} = ح_{٤+١} = \binom{٨}{٤} \times (٣ س^{٢})^{٤} \times (\frac{٢}{٣س})^{٤} = ٧٠ \times ٨١ س^{٨} \times \frac{١٦}{٨١ س^{٤}}$

$= ١٢٢٠ س^{٤}$

∵ الحد الأوسط في مفكوك يساوي ١٧٩٢٠ ⇐ $١٢٢٠ س^{٤} = ١٧٩٢٠$ ⇐ $س^{٤} = \frac{١٧٩٢٠}{١٢٢٠} = ١٦$

⇐ $س = \pm ٢$

إنتهى

١٢ في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كان معاملا الحدين السادس عشر والسادس والعشرين متساويان فما قيمة ن .

الحل

في المفكوك $(١ + س)^{ن}$

$ح_{ر+١} = \binom{ن}{ر} \times (١)^{ن-ر} \times (س)^{ر}$

∵ معاملا الحدين السادس عشر والسادس والعشرين متساويان

⇐ $\binom{ن}{١٥} \times (١)^{ن-١٥} = \binom{ن}{٢٥} \times (١)^{ن-٢٥}$

⇐ $\binom{ن}{١٥} = \binom{ن}{٢٥}$

⇐ حسب القاعدة إما ١٥ = ٢٥ وهو غير مقبول أو ن = ٢٥ + ١٥ = ٤٠

إنتهى

١٣ أوجد الحد الذي يشتمل على $س^{٨}$ في مفكوك $(٢س^{٢} + \frac{١}{س})^{١٠}$.

الحل

نفرض أن الحد الذي يحتوي على $س^{٨}$ هو $ح_{ر+١}$

$ح_{ر+١} = \binom{١٠}{ر} \times (٢ س^{٢})^{١٠-ر} \times (\frac{١}{س})^{ر}$

$= \binom{١٠}{ر} \times ٢^{١٠-ر} \times س^{٢٠-٢ر-ر} = \binom{١٠}{ر} \times ٢^{١٠-ر} \times س^{٢٠-٣ر}$

$\Leftarrow$ $س^{٢٠ - ٣ر} = س^{٨}$ $\Leftarrow$ $٢٠ - ٣ر = ٨$ $\Leftarrow$ $٣ر = ١٢$ $\Leftarrow$ $ر = ٤$

$\Leftarrow$ $ح_{ر+١} = ح_{٤+١} = ح_{٥}$ $\Leftarrow$ الحد الذي يحتوي على $س^{٨}$ هو الحد الخامس

إنتهى

١٤ أوجد معامل $س^{-٦}$ في مفكوك $(\frac{س}{٣} - \frac{٣}{٢س})^{٨}$.

الحل

نفرض أن الحد الذي يحتوي على $س^{-٦}$ هو $ح_{ر+١}$

$$ح_{ر+١} = \binom{٨}{ر} \times (\frac{س}{٣})^{٨-ر} \times (\frac{٣}{٢س})^{ر}$$

$$= \binom{٨}{ر} \times ٣^{٢ر-٨} \times ٢^{-ر} \times س^{٨-٢ر}$$

$\Leftarrow$ $س^{٨-٢ر} = س^{-٦}$ $\Leftarrow$ $٨ - ٢ر = -٦$ $\Leftarrow$ $٢ر = ١٤$ $\Leftarrow$ $ر = ٧$

$\Leftarrow$ $ح_{ر+١} = ح_{٧+١} = ح_{٨}$ $\Leftarrow$ الحد الذي يحتوي على $س^{-٦}$ هو الحد الثامن

$$\because ح_{ر+١} = \binom{٨}{ر} \times ٣^{٢ر-٨} \times ٢^{-ر} \times س^{٨-٢ر}$$

$$\Leftarrow ح_{٨} = ح_{٧+١} = \binom{٨}{٧} \times ٣^{٦} \times ٢^{-٧} \times س^{-٦}$$

$$= ٨ \times ٣^{٦} \times ٢^{-٧} \times س^{-٦} = ٥٨٣٢ \times \frac{١}{١٢٨} \times س^{-٦} = \frac{٧٢٩}{١٦} س^{-٦}$$

$\Leftarrow$ معامل $س^{-٦} = \frac{٧٢٩}{١٦}$

إنتهى

١٥ أوجد معامل $(\frac{س}{ص})^{٩}$ في مفكوك $(\frac{س}{ص} - \frac{ص}{س})^{١٥}$.

الحل

$$ح_{ر+١} = \binom{١٥}{ر} \times (\frac{س}{ص})^{١٥-ر} \times (-\frac{ص}{س})^{ر}$$

$$= \binom{١٥}{ر} \times (س)^{١٥-ر} \times (ص)^{ر-١٥} \times (-١)^{ر} (ص)^{ر} \times (س)^{-ر}$$

$$= \binom{١٥}{ر} \times (س)^{١٥-٢ر} \times (ص)^{٢ر-١٥} \times (-١)^{ر} = \binom{١٥}{ر} (-١)^{ر} \times (\frac{س}{ص})^{١٥-٢ر}$$

في الحد الذي يحتوي على معامل $(\frac{س}{ص})^{٩}$ يكون : $(\frac{س}{ص})^{١٥-٢ر} = (\frac{س}{ص})^{٩}$

$\Leftarrow$ ١٥ − ٢ ر = ٩ $\Leftarrow$ ٢ ر = ٦ $\Leftarrow$ ر = ٣

$\Leftarrow$ $ح_{ر+١} = ح_{٣+١} = ح_{٤}$ $\Leftarrow$ الحد الذي يحتوي على $(\frac{س}{ص})^{٩}$ هو الحد الرابع

معامل $ح_{٤} = \binom{١٥}{٣} (-١)^{٣} = -٤٥٥$

إنتهى

١٦ أوجد الحد الخالي من س في مفكوك $(٢س - \frac{١}{س^{٢}})^{٩}$.

الحل

$ح_{ر+١} = \binom{٩}{ر} \times (٢س)^{٩-ر} \times (-\frac{١}{س^{٢}})^{ر}$

$= \binom{٩}{ر} \times ٢^{٩-ر} \times س^{٩-ر} \times (-١)^{ر} \times س^{-٢ر}$

$= \binom{٩}{ر} \times ٢^{٩-ر} \times (-١)^{ر} \times س^{٩-٣ر}$

الحد الخالي من س يكون فيه : $س^{٩-٣ر} = س^{٠}$ $\Leftarrow$ ٩ − ٣ر = ٠ $\Leftarrow$ ر = ٣

$\Leftarrow$ $ح_{ر+١} = ح_{٣+١} = ح_{٤}$ $\Leftarrow$ الحد الخالي من س هو الحد الرابع

$ح_{٤} = \binom{٩}{٣} \times ٢^{٦} \times (-١)^{٣} = -٥٣٧٦$

إنتهى

١٧ أثبت أنه لا يوجد حد خالي من س في مفكوك $(٢س^{٣} - \frac{٣}{س})^{٩}$.

الحل

$ح_{ر+١} = \binom{٩}{ر} \times (٢س^{٣})^{٩-ر} \times (-\frac{٣}{س})^{ر}$

$= \binom{٩}{ر} \times (٢)^{٩-ر} \times س^{٢٧-٣ر} \times (-٣)^{ر} \times س^{-ر}$

$= \binom{٩}{ر} \times (٢)^{٩-ر} \times (-٣)^{-ر} \times س^{٢٧-٤ر}$

الحد الخالي من س يكون فيه : $س^{٢٧-٤ر} = س^{٠}$ $\Leftarrow$ ٢٧ − ٤ر = ٠ $\Leftarrow$ ر = $\frac{٢٧}{٤}$

وهذا حل مرفوض لأن القيمة غير صحيحة وبالتالي لا يوجد حد خالي من س في المفكوك .

إنتهى

١٨ إذا كان رتبة الحد الخالي من س في مفكوك $(٢س^{٢} - \frac{٣}{س})^{٢١}$ تساوي رتبة الحد الخالي من س في مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{٢ن}$ فأوجد قيمة ن .

الحل

في المفكوك $(٢س^{٢} - \frac{٣}{س})^{٢١}$:

$$ح_{ر+١} = \binom{٢١}{ر} \times (٢س^{٢})^{٢١-ر} \times (-\frac{٣}{س})^{ر}$$

$$= \binom{٢١}{ر} \times (٢)^{٢١-ر} \times س^{٤٢-٢ر} \times (-٣)^{ر} \times س^{-ر}$$

$$= \binom{٩}{ر} \times (٢)^{٢١-ر} \times (-٣)^{ر} \times س^{٤٢-٣ر}$$

الحد الخالي من س يكون فيه : $س^{٤٢-٣ر} = س^{٠}$ ⇐ $٤٢ - ٣ر = ٠$ ⇐ $ر = ١٤$

⇐ $ح_{ر+١} = ح_{١٤+١} = ح_{١٥}$ ⇐ الحد الخالي من س هو الحد الخامس عشر

في المفكوك $(س + \frac{١}{س})^{٢ن}$:

بما أن رتبة الحد الخالي من س في المفكوكين متساويين ⇐ الحد الخالي في مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{٢ن}$ هو $ح_{١٥}$ ويكون :

$$ح_{١٥} = \binom{٢ن}{١٤} \times (س)^{٢ن-١٤} \times (-\frac{١}{س})^{١٤}$$

$$= \binom{٢ن}{١٤} \times س^{٢ن-١٤} \times ١ \times س^{-١٤} = \binom{٢ن}{ر} \times س^{٢ن-٢٨}$$

الحد الخالي من س يكون فيه : $س^{٢ن-٢٨} = س^{٠}$ ⇐ $٢ن - ٢٨ = ٠$ ⇐ $ن = ١٤$

إنتهى

١٩ أوجد الحد الخالي من س في مفكوك $س^{٨}(س^{٢} - \frac{١}{س})^{١٧}$

الحل

في المفكوك في مفكوك $س^{٨}(س^{٢} - \frac{١}{س})^{١٧}$ يكون :

$$ح_{ر+١} = س^{٨} \times \binom{١٧}{ر} \times (س^{٢})^{١٧-ر} \times (-\frac{١}{س})^{ر}$$

$$= س^{٨} \times \binom{١٧}{ر} \times س^{٣٤-٢ر} \times (-١)^{ر} \times س^{-ر} = \binom{١٧}{ر} \times (-١)^{ر} \times س^{٤٢-٣ر}$$

الحد الخالي من س في المفكوك $س^{٨} (س^{٢} - \frac{١}{س})^{١٧}$ يكون فيه : $س^{٤٢ - ٣ر} = س^{٠}$

$\Leftarrow ٤٢ - ٣ر = ٠ \quad \Leftarrow ر = ١٤$

$\Leftarrow$ الحد الخالي من س في المفكوك $س^{٨} (س^{٢} - \frac{١}{س})^{١٧}$ هو $ح_{ر+١} = ح_{١٤+١} = ح_{١٥}$

$ح_{١٥} = \binom{١٧}{١٤} \times (-١)^{١٤} = ٦٨٠$

إنتهى

٢٠ إذا كانت النسبة بين الحدين السادس والخامس في مفكوك $(١ + ٢س)^{٥}$ هي ١ : ٥ فما قيمة / قيم س ؟

الحل

$ح_{٥} = \binom{٥}{٤} \times (١)^{١} \times (٢س)^{٤} = ٨٠ س^{٤}$

$ح_{٦} = \binom{٥}{٥} \times (١)^{٠} \times (٢س)^{٥} = ٣٢ س^{٥}$

$ح_{٦} : ح_{٥} = \frac{١}{٥} \Leftarrow \frac{٣٢ س^{٥}}{٨٠ س^{٤}} = \frac{١}{٥} \Leftarrow س = \frac{٨٠}{٣٢ \times ٥} = \frac{١}{٢}$

إنتهى

ثالثاً : الإحتمالات

١ صندوق يحتوي على ٢٠ كرة بيضاء اللون و ١٢ كرة حمراء اللون و٨ كرات خضراء اللون ، سحبت كرة واحدة عشوائية من الصندوق إحسب إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة :

أ) بيضاء أو حمراء .

ب) ليست حمراء .

الحل

أ) $ح_{١}$: الكرة المسحوبة بيضاء ، $ل(ح_{١}) = \frac{\text{عدد الكرات البيضاء}}{\text{عدد الكرات الكلي}} = \frac{٢٠}{٤٠} = \frac{١}{٢}$

$ح_{٢}$: الكرة المسحوبة حمراء ، $ل(ح_{٢}) = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد الكرات الكلي}} = \frac{١٢}{٤٠} = \frac{٣}{١٠}$

إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء أو حمراء $= ل(ح_{١}) + ل(ح_{٢}) = \frac{٢٠}{٤٠} + \frac{١٢}{٤٠} = \frac{٣٢}{٤٠} = \frac{٤}{٥}$

ب) إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة ليست حمراء هو إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة إما بيضاء أو خضراء

$ح_١$: الكرة المسحوبة بيضاء ، $ل (ح_١) = \frac{\text{عدد الكرات البيضاء}}{\text{عدد الكرات الكلي}} = \frac{٢٠}{٤٠} = \frac{١}{٢}$

$ح_٢$: الكرة المسحوبة خضراء ، $ل (ح_٢) = \frac{\text{عدد الكرات الخضراء}}{\text{عدد الكرات الكلي}} = \frac{٨}{٤٠} = \frac{١}{٥}$

إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء أو خضراء $= ل (ح_١) + ل (ح_٢) = \frac{٢٠}{٤٠} + \frac{٨}{٤٠} = \frac{٢٨}{٤٠} = \frac{٧}{١٠}$

إنتهى

٢ فصل دراسي به ٥٠ طالباً منهم ٢٥ طالب يدرسون الكيمياء و ٢٠ طالب يدرسون التاريخ و١٥ طالب يدرسون الكيمياء والتاريخ إختير طالب عشوائياً : أوجد إحتمال أن يكون الطالب المختار :

أ) ممن يدرسون الكيمياء أو التاريخ .

ب) ممن لا يدرسون أي من المادتين .

جـ) أن يدرس كيمياء ولا يدرس تاريخ .

د) أن يدرس تاريخ ولا يدرس كيمياء .

الحل

نفرض أن : $ح_١$: الطالب يدرس الكيمياء ، $ح_٢$: الطالب يدرس التاريخ

أ) إحتمال أن يكون الطالب ممن يدرسون الكيمياء أو التاريخ هو $ل (ح_١ \cup ح_٢)$.

$ل (ح_١ \cup ح_٢) = ل (ح_١) + ل (ح_٢) - ل (ح_١ \cap ح_٢)$

$= \frac{٢٥}{٥٠} + \frac{٢٠}{٥٠} - \frac{١٥}{٥٠} = \frac{٣٠}{٥٠} = \frac{٣}{٥}$

ب) إحتمال أن يكون الطالب لا يدرس أي من المادتين هو $ل (\overline{ح_١ \cup ح_٢})$.

$ل (\overline{ح_١ \cup ح_٢}) = ١ - ل (ح_١ \cup ح_٢) = ١ - \frac{٣}{٥} = \frac{٢}{٥}$

جـ) إحتمال أن يكون الطالب يدرس كيمياء ولا يدرس تاريخ هو $ل (ح_١) - ل (ح_١ \cap ح_٢)$.

$ل (ح_١) - ل (ح_١ \cap ح_٢) = \frac{٢٥}{٥٠} - \frac{١٥}{٥٠} = \frac{١٠}{٥٠} = \frac{١}{٥}$

د) إحتمال أن يكون الطالب يدرس تاريخ ولا يدرس كيمياء هو $ل (ح_٢) - ل (ح_١ \cap ح_٢)$.

$ل (ح_٢) - ل (ح_١ \cap ح_٢) = \frac{٢٠}{٥٠} - \frac{١٥}{٥٠} = \frac{٥}{٥٠} = \frac{١}{١٠}$

إنتهى

٣ ألقي حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة . أوجد إحتمال :

أ) أن يكون مجموع العددين قابلاً للقسمة على ٦ .

ب) أن يكون الفرق المطلق بين العددين مساوياً عدداً أولياً .

الحل

أ) ح : مجموع العددين يقبل القسمة على ٦

= { (١ ، ٥) ، (٥ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٦ ، ٦) }

$$ل(ح) = \frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$$

	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	(١ ، ١)	(١ ، ٢)	(١ ، ٣)	(١ ، ٤)	(١ ، ٥)	(١ ، ٦)
٢	(٢ ، ١)	(٢ ، ٢)	(٢ ، ٣)	(٢ ، ٤)	(٢ ، ٥)	(٢ ، ٦)
٣	(٣ ، ١)	(٣ ، ٢)	(٣ ، ٣)	(٣ ، ٤)	(٣ ، ٥)	(٣ ، ٦)
٤	(٤ ، ١)	(٤ ، ٢)	(٤ ، ٣)	(٤ ، ٤)	(٤ ، ٥)	(٤ ، ٦)
٥	(٥ ، ١)	(٥ ، ٢)	(٥ ، ٣)	(٥ ، ٤)	(٥ ، ٥)	(٥ ، ٦)
٦	(٦ ، ١)	(٦ ، ٢)	(٦ ، ٣)	(٦ ، ٤)	(٦ ، ٥)	(٦ ، ٦)

ب) ح : أن يكون الفرق المطلق بين العددين مساوياً عدداً أولياً

= { (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٦) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٥) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٦) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٦ ، ١) ، (٦ ، ٣) ، (٦ ، ٤) }

$$ل(ح) = \frac{١٦}{٣٦} = \frac{٤}{٩}$$

	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	(١ ، ١)	(١ ، ٢)	(١ ، ٣)	(١ ، ٤)	(١ ، ٥)	(١ ، ٦)
٢	(٢ ، ١)	(٢ ، ٢)	(٢ ، ٣)	(٢ ، ٤)	(٢ ، ٥)	(٢ ، ٦)
٣	(٣ ، ١)	(٣ ، ٢)	(٣ ، ٣)	(٣ ، ٤)	(٣ ، ٥)	(٣ ، ٦)
٤	(٤ ، ١)	(٤ ، ٢)	(٤ ، ٣)	(٤ ، ٤)	(٤ ، ٥)	(٤ ، ٦)
٥	(٥ ، ١)	(٥ ، ٢)	(٥ ، ٣)	(٥ ، ٤)	(٥ ، ٥)	(٥ ، ٦)
٦	(٦ ، ١)	(٦ ، ٢)	(٦ ، ٣)	(٦ ، ٤)	(٦ ، ٥)	(٦ ، ٦)

إنتهى

٤ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ، وكان ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$ ، أوجد :

أ) ل ($\overline{أ}$) ب) ل (أ ∪ ب) ج) ل ($\overline{أ}$ ∪ $\overline{ب}$) د) ل (ب ∩ $\overline{أ}$)

الحل

أ) ل ($\overline{أ}$) = ١ − ل (أ) = ١ − $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

ب) ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{٣}{٨}$ − $\frac{١}{٤}$

= $\frac{٤ + ٣ - ٢}{٨}$ = $\frac{٥}{٨}$

ج) ل ($\overline{أ}$ ∪ $\overline{ب}$) = ل ($\overline{أ ∩ ب}$) = ١ − ل (أ ∩ ب) = ١ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٤}$

د) ل (ب ∩ $\overline{أ}$) = ل (ب) – ل (أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٨}$ – $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{٨}$

إنتهى

٥ حقيبة بها ٢٥ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٥ ، سحبت بطاقة واحدة عشوائياًمن الحقيبة . ما إحتمال أن يكون العدد المكتوب على البطاقة المسحوبة :

أ) فردي ويقبل القسمة على ٣ .

ب) فردي أو يقبل القسمة على ٣ .

الحل

$ح_١$: ظهور عدد فردي = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ ، ١٥ ، ١٧ ، ١٩ ، ٢١ ، ٢٣ ، ٢٥ }

$ح_٢$: ظهور عدد يقبل القسمة على ٣ = { ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ٢١ ، ٢٤ }

أ) إحتمال أن يكون العدد فردي ويقبل القسمة على ٣ هو ل ($ح_١$ ∩ $ح_٢$) .

$ح_١$ ∩ $ح_٢$ = { ٣ ، ٩ ، ١٥ ، ٢١ } ⇐ ل ($ح_١$ ∩ $ح_٢$) = $\frac{٤}{٢٥}$

ب) إحتمال أن يكون العدد فردي أو يقبل القسمة على ٣ هو ل ($ح_١$ ∪ $ح_٢$) .

ل ($ح_١$ ∪ $ح_٢$) = ل ($ح_١$) + ل ($ح_٢$) – ل ($ح_١$ ∩ $ح_٢$)

= $\frac{١٣}{٢٥}$ + $\frac{٨}{٢٥}$ – $\frac{٤}{٢٥}$ = $\frac{١٧}{٢٥}$

إنتهى

الإحتمال المشروط

١ في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر ، ما إحتمال ظهور عدد زوجي إذا كان العدد الظاهر أكبر من ٤ ؟

الحل

$ح_١$: ظهور عدد زوجي = { ٢ ، ٤ ، ٦ } $ح_٢$: ظهور عدد أكبر من ٤ = { ٥ ، ٦ }

إحتمال ظهور عدد زوجي إذا كان العدد الظاهر أكبر من ٤ هو ل ($ح_١$ / $ح_٢$) .

ل ($ح_١$ / $ح_٢$) = $\frac{ل (ح_١ ∩ ح_٢)}{ل (ح_٢)}$

$ح_١ \cap ح_٢ = \{٦\} \Leftarrow ل(ح_١ \cap ح_٢) = \frac{١}{٦} \Leftarrow ل(ح_١ / ح_٢) = \frac{\frac{١}{٦}}{\frac{٢}{٦}}$

$= \frac{١}{٦} \times \frac{٦}{٢} = \frac{١}{٢}$

إنتهى

٢ يحتوي صندوق على ٤ كرات بيضاء و ٦ كرات حمراء سحبت كرتان على التوالي دون إرجاع ما إحتمال أن يكون :

أ) الكرة الثانية بيضاء إذا علمت أن الكرة الأولى بيضاء .

ب) الكرة الثانية بيضاء إذا علمت أن الكرة الأولى حمراء .

جـ) الكرة الأولى بيضاء والثانية حمراء .

الحل

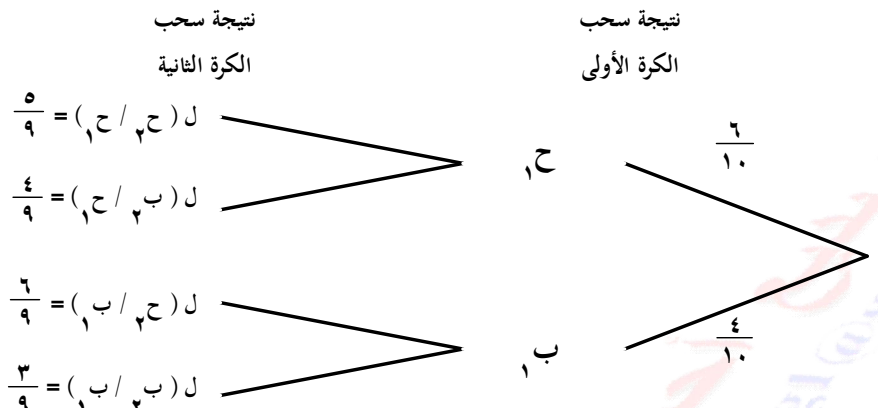
نفرض أن :

$ح_١$: حادث الكرة الأولى حمراء .

$ح_٢$: حادث الكرة الثانية حمراء .

$ب_١$: حادث الكرة الأولى بيضاء .

$ب_٢$: حادث الكرة الثانية بيضاء .



أ) إحتمال أن تكون الكرة الثانية بيضاء إذا علمت أن الكرة الأولى بيضاء هو $ل(ب_٢ / ب_١)$.

$ل(ب_٢ / ب_١) = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

ب) إحتمال أن تكون الكرة الثانية بيضاء إذا علمت أن الكرة الأولى حمراء هو $ل(ب_٢ / ح_١)$.

$ل(ب_٢ / ح_١) = \frac{٤}{٩}$

جـ) إحتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية حمراء هو $ل(ب_١ \cap ح_٢)$.

$ل(ب_١ \cap ح_٢) = ل(ب_١) \times ل(ح_٢ / ب_١) = \frac{٤}{١٠} \times \frac{٦}{٩} = \frac{٢٤}{٩٠} = \frac{١٢}{٤٥}$

إنتهى

٣ إذا كان $ل(ح_١) = ٠,٣$ ، $ل(ح_٢) = ٠,٥$ ، $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ٠,٢$ فأوجد :

أ) $ل(ح_١ / ح_٢)$ ب) $ل(ح_٢ / ح_١)$ جـ) $ل(ح_١ / \overline{ح_٢})$ د) $ل(\overline{ح_١} / \overline{ح_٢})$

الحل

أ) $ل(ح_١ / ح_٢) = \frac{ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_٢)} = ٠,٢ \div ٠,٥ = ٠,٤$

ب) $ل(ح_٢ / ح_١) = \frac{ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_١)} = ٠,٢ \div ٠,٣ = ٠,٦٧$

جـ) $ل(ح_١ / \overline{ح_٢}) = \frac{ل(ح_١ \cap \overline{ح_٢})}{ل(\overline{ح_٢})} = \frac{ل(ح_١) - ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(\overline{ح_٢})}$

$= [٠,٣ - ٠,٢] \div ٠,٥ = ٠,٢$

د) $ل(\overline{ح_١} / \overline{ح_٢}) = \frac{ل(\overline{ح_١} \cap \overline{ح_٢})}{ل(\overline{ح_٢})}$ لكن $ل(\overline{ح_١} \cap \overline{ح_٢}) = ل(\overline{ح_١ \cup ح_٢})$

$= ١ - ل(ح_١ \cup ح_٢) = ١ - [ل(ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)]$

$= ١ - [٠,٣ + ٠,٥ - ٠,٢] = ١ - ٠,٦ = ٠,٤$

$\Leftarrow ل(\overline{ح_١} / \overline{ح_٢}) = ٠,٤ \div ٠,٥ = ٠,٨$ (لاحظ : $ل(\overline{ح_٢}) = ١ - ل(ح_٢) = ٠,٥$)

إنتهى

٤ إذا كان $ل(ح_١) = ٠,٤$ ، $ل(ح_١ \cup ح_٢) = ٠,٦٥$ أوجد $ل(ح_٢)$ في كل من الحالتين :

أ) إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢$ مستقلين

ب) إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢$ متباعدين (منفصلين)

الحل

أ) إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢$ مستقلين فإن :

$ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$

$\Leftarrow ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢) - [ل(ح_١) \times ل(ح_٢)]$

$\Leftarrow ٠,٦٥ = ٠,٤ + ل(ح_٢) - [٠,٤ \times ل(ح_٢)]$

$\Leftarrow ٠,٦٥ - ٠,٤ = ل(ح_٢)[١ - ٠,٤] \Leftarrow ٠,٢٥ = ٠,٦ \times ل(ح_٢)$

$\Leftarrow ل(ح_٢) = ٠,٢٥ \div ٠,٦ = ٠,٤٢$

ب) إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢$ منفصلين فإن :

$ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢) -$ صفر

$\Leftarrow ٠,٦٥ = ٠,٤ + ل(ح_٢) \Leftarrow ل(ح_٢) = ٠,٦٥ - ٠,٤ = ٠,٢٥$

إنتهى

٥ إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢$ حادثين مستقلين في فراغ عيني Ω بحيث إن : $ل(ح_١ \cup ح_٢) = ٠,٨$ ، $ل(\overline{ح_١}) = ٠,٤$

أوجد $ل(ح_١ - ح_٢)$

الحل

$ل(ح_١ - ح_٢) = ل(ح_١ \cap \overline{ح_٢}) = ل(ح_١) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$

إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢$ مستقلين فإن :

$ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١) \times ل(ح_٢)$

$\Leftarrow ل(ح_١ - ح_٢) = ل(ح_١) - ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١) - [ل(ح_١) \times ل(ح_٢)]$

$\Leftarrow ل(ح_١ - ح_٢) = ل(ح_١)[١ - ل(ح_٢)]$

$\Leftarrow ل(ح_١ - ح_٢) = ل(ح_١) \times ل(\overline{ح_٢})$ ---------- ①

$\because ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢) - [ل(ح_١) \times ل(ح_٢)]$

$\Leftarrow ل(ح_١ \cup ح_٢) - ل(ح_١) = ل(ح_٢) - [ل(ح_١) \times ل(ح_٢)]$

$\Leftarrow ل(ح_١ \cup ح_٢) - ل(ح_١) = ل(ح_٢)[١ - ل(ح_١)]$

$\Leftarrow ل(ح_١ \cup ح_٢) - ل(ح_١) = ل(ح_٢) \times ل(\overline{ح_١})$

$\Leftarrow ل(ح_٢) = \dfrac{ل(ح_١ \cup ح_٢) - ل(ح_١)}{ل(\overline{ح_١})} \Leftarrow ل(ح_٢) = [٠,٨ - ٠,٦] \div ٠,٤ = ٠,٥$

$\Leftarrow ل(\overline{ح_٢}) = ١ - ل(ح_٢) = ١ - ٠,٥ = ٠,٥$

بالتعويض عن قيمة $ل(\overline{ح_٢}) = ٠,٥$ في ① ينتج أن :

$ل(ح_١ - ح_٢) = ٠,٦ \times ٠,٥ = ٠,٣$

إنتهى

٦ يصوب صيادان نحو هدف فإذا كان إحتمال إصابة الأول للهدف ٠,٧ وإحتمال إصابة الثاني للهدف ٠,٥ وأطلق كل منهما طلقة على الهدف ، جد إحتمال :

أ) إصابة الأول والثاني الهدف معاً ب) إصابة الهدف ج) إصابة الأول للهدف وعدم إصابة الثاني

الحل

$ح_١$: إصابة الأول للهدف

$ح_٢$: إصابة الثاني للهدف

أ) إحتمال إصابة الأول والثاني الهدف معاً هو : $ل (ح_١ \cap ح_٢)$

∵ الحدثان مستقلان ⇐ $ل (ح_١ \cap ح_٢) = ل (ح_١) \times ل (ح_٢) = ٠,٣٥$

ب) إحتمال إصابة الهدف وهو إحتمال أن يصيبه الأول أو كلاهما ويساوي $ل (ح_١ \cup ح_٢)$

$ل (ح_١ \cup ح_٢) = ل (ح_١) + ل (ح_٢) - ل (ح_١ \cap ح_٢)$

$ل (ح_١ \cup ح_٢) = ٠,٧ + ٠,٥ - ٠,٣٥ = ٠,٨٥$

جـ) إصابة الأول للهدف وعدم إصابة الثاني هو : $ل (ح_١ \cap \overline{ح_٢})$

$ل (ح_١ \cap \overline{ح_٢}) = ل (ح_١) - ل (ح_١ \cap ح_٢) = ٠,٧ - ٠,٣٥ = ٠,٣٥$

إنتهى

٧ إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢$ حادثين في فراغ عيني Ω بحيث إن : $ل (ح_١) = ٠,٥$ ، $ل (ح_٢) = ٠,٦$ ،

$ل (ح_١ \cup ح_٢) = ٠,٨$ فهل $ح_١$ ، $ح_٢$ مستقلين ؟ وضح ذلك .

الحل

$ل (ح_١ \cup ح_٢) = ل (ح_١) + ل (ح_٢) - ل (ح_١ \cap ح_٢)$

⇐ $ل (ح_١ \cap ح_٢) = ل (ح_١) + ل (ح_٢) - ل (ح_١ \cup ح_٢)$

⇐ $ل (ح_١ \cap ح_٢) = ٠,٥ + ٠,٦ - ٠,٨ = ٠,٣$ ---------- ①

$ل (ح_١) \times ل (ح_٢) = ٠,٥ \times ٠,٦ = ٠,٣$ ---------- ②

من ① و ② ∵ $ل (ح_١ \cap ح_٢) = ل (ح_١) \times ل (ح_٢)$

⇐ $ح_١$ ، $ح_٢$ مستقلين

إنتهى

٨ يحتوي صندوق على ١٠ كرات متشابهة تحمل ٥ كرات منها الرقم ٢ وتحمل ٣ كرات منها الرقم ١ وكرتان الرقم ٣ سحبت كرتان على التوالي دون إرجاع : ما إحتمال أن يكون المجموع ٥ ؟

الحل

يكون المجموع على الكرتين ٥ إذا كان العدد على الكرة الأولى ٢ والعدد على الكرة الثانية ٣ أو إذا كان العدد على الكرة الأولى ٣ والعدد على الكرة الثانية ٢ .

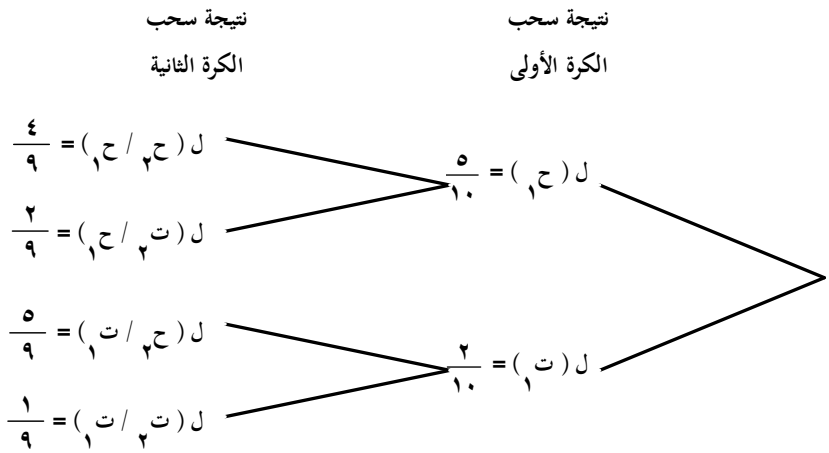
نفرض أن :

$ح_١$: حادث العدد على الكرة الأولى ٢

$ح_٢$: حادث العدد على الكرة الثانية ٢

$ت_١$: حادث العدد على الكرة الأولى ٣

$ت_٢$: حادث العدد على الكرة الثانية ٣



المطلوب :

$ل (ح_١ \cap ت_٢) + ل (ت_١ \cap ح_٢)$

$$ل (ح_١ \cap ت_٢) + ل (ت_١ \cap ح_٢) = ل (ح_١) \times ل (ت_٢ / ح_١) + ل (ت_١) \times ل (ح_٢ / ت_١)$$

$$= \frac{٥}{١٠} \times \frac{٢}{٩} + \frac{٢}{١٠} \times \frac{٥}{٩} = \frac{٢٠}{٩٠} = \frac{٢}{٩}$$

إختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :

١) عدد مرات الدخول والخروج لشخص من محل له ثلاث أبواب على ألا يخرج من الباب الذي دخل منه هو :

أ) ٣ ب) ٦ ج) ٩ د) ١٢

٢) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من رقمين مختلفين باستخدام عناصر المجموعة {١ ، ٣ ، ٤ ، ٦} ؟

أ) ٤ ب) ٦ ج) ١٢ د) ٣٤

٣) الأعداد المكونة من رقمين التي يمكن تكوينها من المجموعة {٢ ، ٤ ، ٥ ، ٧} إذا سمح بتكرار الرقم الواحد في العدد الواحد ، عددها هو :

أ) ٤ ب) ٩ ج) ١٢ د) ١٦

٤) ل (ن ، ٩) =

أ) $\frac{\text{ن!}}{\text{٩!}}$ ب) $\frac{\text{ن!}}{\text{٩! (ن – ٩)!}}$ ج) $\frac{\text{ن!}}{\text{٩ (ن – ٩)!}}$ د) $\frac{\text{ن!}}{\text{(ن – ٩)!}}$

٥) ١٠! × ٣! =

أ) صفر ب) ٣ ج) ٦ د) ٩

٦) إذا كان ل (١٤ ، ر) = ١٤ × ١٣ × ١٢ فإن قيمة ر =

أ) ١٤ ب) ١٣ ج) ١٢ د) ٣

٧) إذا كان ل (ن ، ن) = ٦ فإن قيمة ن هي :

أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٦

٨) بكم طريقة يمكن جلوس ٣ طلاب على ٥ كراسي موضوعة في صف واحد على إستقامة واحدة ؟

أ) ٢٠ ب) ٦٠ ج) ٩٠ د) ١٢٠

٩) إذا كان ن! = ٢٤ فإن ن =

أ) ٦ ب) ٤ ج) ١٢ د) ٨

١٠) $\frac{\text{٥!}}{\text{٣!}}$ =

أ) ١٥ ب) ٢٠ ج) ٢ د) ٦٠

١١) ٥٦ × ٦! =

أ) ٧! ب) ٨! ج) ٩! د) ١٠!

١٢) ٦٠ × ٢! =

أ) ٥!　　ب) ٦!　　ج) ٧!　　د) ٨!

١٣) إذا كان (٢ن – ٣)! = ١ فإن قيمة ن =

أ) صفر　　ب) ١　　ج) ٢　　د) ٣

١٤) إذا كان ل (٧ ، ر) = $\binom{٧}{٦}$ فإن قيمة ر =

أ) ١　　ب) ٢　　ج) ٦　　د) ٧

١٥) إذا كان $\binom{٩}{ر + ١}$ = $\binom{٩}{ر}$ فإن قيمة ر =

أ) صفر　　ب) ٤　　ج) ٥　　د) ٨

١٦) عدد طرق إختيار ٣ طلاب من بين ٨ طلاب يساوي :

أ) $\frac{٨!}{٣!}$　　ب) $\frac{٨!}{٥ \times ٣!}$　　ج) $\frac{٨!}{٥!}$　　د) $\frac{٨!}{٥! \times ٣!}$

١٧) $\binom{٧}{٣}$ × ٣! =

أ) $\frac{٧!}{٣!}$　　ب) ل (٧ ، ٣)　　ج) $\binom{٧}{٣}$ × ٣　　د) ٧ × ٣!

١٨) $\binom{٩}{١}$ + ل (٥ ، ٠) =

أ) ٩　　ب) ١٠　　ج) ٥　　د) ١١

١٩) إذا كان $\binom{ن}{١٦}$ = $\binom{ن}{٤}$ فإن قيمة ن =

أ) ٢٠　　ب) ٤　　ج) ١٢　　د) ٦٤

٢٠) بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة من طالبين من بين ٥ طلاب ؟

أ) ٥　　ب) ٧　　ج) ٨　　د) ١٠

٢١) إذا كان $\binom{ن}{٣}$ = ٣٥ فإن قيمة ن =

أ) ٥　　ب) ٦　　ج) ٧　　د) ٣٢

٢٢) إذا كان $\binom{٧}{٣}$ = $\binom{٧}{ر}$ فإن قيمة ر =

أ) ٣ أو ٤　　ب) ٣ أو ٧　　ج) ٤ أو ٧　　د) ٣ أو ١٠

٢٣) إذا كان $\binom{٥}{ر}$ = ١ فإن قيمة ر =

أ) صفر　　ب) ١　　ج) ٥　　د) صفر أو ٥

٢٤) الحد الأخير في مفكوك $(٣س - ٢ص)^{٧}$ هو :

أ) $س^{٧}$ ب) $ص^{٧}$ ج) $(-٣س)^{٧}$ د) $(-٢ص)^{٧}$

٢٥) عدد حدود مفكوك المقدار $(أ + ٢ب)^{٦}$ هو :

أ) ٥ ب) ٦ ج) ٧ د) ٨

٢٦) معامل الحد الثالث في مفكوك $(أ - ب)^{٤}$ هو :

أ) ٦ ب) ٤ ج) -٤ د) -٦

٢٧) إذا كان $\binom{٧}{٠}(١٢)^{٧}$ هو أحد عوامل مفكوك $(١٢ + ب)^{ن}$ فإن عدد حدود هذا المفكوك يساوي :

أ) ٩ ب) ٨ ج) ٧ د) ٦

٢٨) معامل الحد الرابع في مفكوك $(٢س - ٣)^{٥}$ هو :

أ) ٥ ب) ٧٢٠ ج) -٧٢٠ د) -١٠٨٠

٢٩) الحد الأوسط في مفكوك $(٢ + س)^{٦}$ هو :

أ) $ح_{٥}$ ب) $ح_{٤}$ ج) $ح_{٣}$ د) $ح_{٢}$

٣٠) إذا كان معامل $ح_{٨}$ = معامل $ح_{٢٦}$ في مفكوك $(س + ص)^{ن}$ فإن قيمة ن =

أ) ٣٤ ب) ٣٣ ج) ٣٢ د) ٣١

٣١) إذا كان $ح_{١٣}$ = $ح_{١٤}$ في مفكوك $(١ - س)^{٢٥}$ فإن قيمة س =

أ) ١ ب) -١ ج) ٢٥ د) ١٣

٣٢) إذا إحتوى أحد حدود المفكوك $(أ + ب)^{٢ن}$ على $أ^{٨} ب^{١٢}$ فإن ن تساوي :

أ) ٢٠ ب) ١٠ ج) ١٥ د) ١٢

٣٣) في مفكوك $(س + ص)^{٨}$ يكون معامل $ح_{٣}$ + معامل $ح_{٨}$ = :

أ) ٥٦ ب) ١١٣ ج) ٣٦ د) ٨

٣٤) إذا كان $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ حادثين في فراغ عيني Ω بحيث إن : $ل(ح_{١}) = ٢ ل(ح_{٢}) = ٠,٥$ ،

$ل(ح_{١} \cup ح_{٢}) = ٠,٦$ فإن $ل(ح_{١} \cap \overline{ح_{٢}}) =$:

أ) ٠,٤ ب) ٠,٣٥ ج) ٠,١٥ د) ٠,١

٣٥) إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢$ حادثين في فراغ عيني Ω بحيث إن : ل ($ح_١$) = ٠,٥ ، ل ($ح_٢$) = ٠,٤ ،

ل ($ح_١ \cap ح_٢$) = ٠,٣ فإن ل ($\overline{ح_٢} \cap ح_١$) = :

أ) ٠,٤ ب) ٠,٦ ج) ٠,٥ د) غير ذلك

٣٦) إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢$ حادثين مستقلين وكان ل ($ح_١ \cap ح_٢$) = ٠,١٢ و ل ($ح_١$) = ٣ ل ($ح_٢$) فإن ل ($ح_١$) = :

أ) ٠,٠٦ ب) ٠,٤ ج) ٠,٢ د) ٠,٦

٣٧) قام رجل بزيارة عائلة لها طفلين دخل أحد الطفلين إلى غرفة الضيافة ليصافح الرجل فكان ولداً ،فإن إحتمال أن يكون الطفل الأخر ولداً إذا علم أنه الأصغر = :

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{١}{٣}$ د) $\frac{٣}{٤}$

٣٨) ألقيت قطعتا نقد معاً مرة واحدة فإذا كان الوجه العلوي لإحدى القطعتين صورة فإن إحتمال أن يكون الوجه العلوي للقطعة الأخرى صورة أيضاً هو :

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{١}{٣}$ ج) $\frac{١}{٤}$ د) $\frac{٣}{٤}$

٣٩) إذا كان ل ($ح_١$) = ٠,٣ و ل ($ح_٢$) = ٠,٥ و ل ($ح_١ \cap ح_٢$) = ٠,٧ فإن ل ($ح_١$ / $\overline{ح_٢}$) = :

أ) ٠,١ ب) ٠,٢ ج) ٠,٣ د) ٠,٤

٤٠) يحتوي صندوق على ٦ كرات متماثلة مرقمة ١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٣ سحبت كرتان على التوالي مع الإرجاع ، ما إحتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان تحملان الرقم ٣ ؟

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) $\frac{١}{٩}$ ج) $\frac{١}{١٥}$ د) $\frac{١}{٣٦}$

٤١) إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢$ حادثين مستقلين وكان ل ($ح_١$) = ٠,٤ و ل ($ح_٢$) = ٠,٥ فإن ل ($ح_١ \cap ح_٢$) = :

أ) ٠,٤ ب) ٠,٥ ج) ٠,٢ د) ٠,٩

٤٢) ألقيت قطعة نقد منتظمة ٥ مرات متتالية فإن إحتمال ظهور نفس الوجه في الرميات الخمس يساوي .

أ) $\frac{١}{٣٢}$ ب) $\frac{١}{١٦}$ ج) $\frac{١}{٨}$ د) $\frac{١}{٤}$

٤٣) إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢ \subset \Omega$ بحيث إن : ل ($ح_١$) = ٠,٧ ، ل ($ح_٢$) = ٠,٢٥ ، ل ($ح_١ - ح_٢$) = ٠,٥٥

فإن ل ($ح_١$ / $ح_٢$) = :

أ) ٠,٤ ب) ٠,٦ ج) ٠,٤٥ د) ٠,٣

الحل

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
الإجابة الصحيحة	ب	جـ	د	د	جـ	د	جـ	ب	ب	ب	ب	ب
رقم السؤال	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٤
الإجابة الصحيحة	جـ	أ	ب	د	ب	ب	أ	د	جـ	أ	د	د
رقم السؤال	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	٣١	٣٢	٣٣	٣٤	٣٥	٣٦
الإجابة الصحيحة	جـ	ب	جـ	د	ب	جـ	ب	ب	جـ	ب	د	د
رقم السؤال	٣٧	٣٨	٣٩	٤٠	٤١	٤٢	٤٣					
الإجابة الصحيحة	أ	جـ	د	ب	جـ	ب	ب					

إنتهى

نموذج إختبار للوحدة الثامنة

السؤال الأول : أكمل الفراغ

١ – إذا كان ل (٧ ، ر) = ٨٤٠ فإن قيمة ر = ...

٢ – إذا كان ن! = ٧٢٠ فإن قيمة ن = ...

٣ – عدد أقطار الشكل الثماني يساوي .....

٤ – عدد عناصر فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد وقطعة نقد يساوي .....

٥ – إذا كان ل ($\overline{ح}$) = ٠,٣٥ فإن ل (ح) = ...

٦ – في مفكوك $(س + ٣ص)^{١٠}$ رتبة الحد الأوسط تساوي .....

٧ – إذا كان ل (ن ، ٢) = ٩٠ فإن قيمة ن = ...

٨ – لأي حادثين مستقلين $ح_١$ ، $ح_٢$ يكون ل $(ح_١ \cap ح_٢)$ يساوي .....

٩ – ل (ن ، ر) × (ن – ر)! يساوي .....

١٠ – إذا كان $\binom{ن}{٢}$ = ٣٦ فإن قيمة ن تساوي .....

الحل

١ – إذا كان ل (٧ ، ر) = ٨٤٠ فإن قيمة ر = ٤

٢ – إذا كان ن! = ٧٢٠ فإن قيمة ن = ٦

٣ – عدد أقطار الشكل الثماني يساوي ٢٠

٤ – عدد عناصر فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد وقطعة نقد يساوي ١٢

٥ – إذا كان ل ($\overline{ح}$) = ٠,٣٥ فإن ل (ح) = ٠,٦٥

٦ – في مفكوك $(س + ٣ص)^{١٠}$ رتبة الحد الأوسط تساوي ٦

٧ – إذا كان ل (ن ، ٢) = ٩٠ فإن قيمة ن = ١٠

٨ – لأي حادثين مستقلين $ح_١$ ، $ح_٢$ يكون ل $(ح_١ \cap ح_٢)$ يساوي ل $(ح_١)$ × ل $(ح_٢)$

٩ – ل (ن ، ر) × (ن – ر)! يساوي ن!

١٠ – إذا كان $\binom{ن}{٢}$ = ٣٦ فإن قيمة ن تساوي ٩

إنتهى

السؤال الثاني

أ) حل المعادلة : $\binom{٢٥}{٢ر - ٣} = \binom{٢٥}{ر - ٢}$.

الحل

∵ $\binom{٢٥}{٢ر - ٣} = \binom{٢٥}{ر - ٢}$

⇐ إما ٢ ر – ٣ = ر – ٢ أو ٢ ر – ٣ + ر – ٢ = ٢٥

عندما ٢ ر – ٣ = ر – ٢ ⇐ ٢ر – ر = ٣ – ٢ ⇐ ر = ١ (مرفوض)

عندما ٢ ر – ٣ + ر – ٢ = ٢٥ ⇐ ٣ر = ٣٠ ⇐ ر = ١٠

⇐ م . ح = { ١٠ }

إنتهى

ب) إذا كان $\binom{ن}{٧}$ ، $\binom{ن - ١}{٦}$ ، $\binom{ن - ١}{٥}$ في توالٍ هندسي أوجد قيم ن .

الحل

∵ القيم في توال هندسي ⇐ $\binom{ن - ١}{٦} \div \binom{ن}{٧} = \binom{ن - ١}{٥} \div \binom{ن - ١}{٦}$

⇐ $\frac{ل(ن - ١ ، ٦)}{٦!} \div \frac{ل(ن ، ٧)}{٧!} = \frac{ل(ن - ١ ، ٥)}{٥!} \div \frac{ل(ن - ١ ، ٦)}{٦!}$

⇐ $\frac{ل(ن - ١ ، ٦)}{٦!} \div \frac{ن \times ل(ن - ١ ، ٦)}{٧ \times ٦!} = \frac{ل(ن - ١ ، ٥)}{٥!} \div \frac{ل(ن - ١ ، ٥) \times (ن - ٦)}{٦ \times ٥!}$

$$\Leftarrow \frac{\text{ل}(\text{ن} - ١ ، ٦)}{٦!} \times \frac{٧ \times ٦!}{\text{ن} \times \text{ل}(\text{ن} - ١ ، ٦)} = \frac{\text{ل}(\text{ن} - ١ ، ٥)}{٥!} \times \frac{٦ \times ٥!}{\text{ل}(\text{ن} - ١ ، ٥) \times (\text{ن} - ٦)}$$

$$\Leftarrow \frac{٧}{\text{ن}} = \frac{٦}{(\text{ن} - ٦)} \Leftarrow ٧(\text{ن} - ٦) = ٦\text{ن} \Leftarrow ٧\text{ن} - ٤٢ = ٦\text{ن} \Leftarrow \text{ن} = ٤٢$$

إنتهى

ج) في مفكوك $\left(\frac{١}{\text{س}^{٣}} + ٢\text{س}^{٣}\right)^{٨}$ ، س ≠ ٠ أوجد الحد الأوسط ، هل يوجد حد خالي من س .

الحل

رتبة الحد الأوسط في المفكوك هي : $\frac{\text{ن}}{٢} + ١ = \frac{٨}{٢} + ١ = ٥$ أي أن الحد الأوسط هو : $\text{ح}_{٥}$

∵ الحد العام : $\text{ح}_{\text{ر}+١} = \binom{\text{ن}}{\text{ر}} \times (\text{الأول})^{\text{ن}-\text{ر}} \times (\text{الثاني})^{\text{ر}}$

$$\Leftarrow \text{ح}_{٥} = \text{ح}_{٤+١} = \binom{٨}{٤} \times \left(\frac{١}{\text{س}^{٣}}\right)^{٤} \times (٢\text{س}^{٣})^{٤} = ٧٠ \times \frac{١}{\text{س}^{١٢}} \times ١٦\text{س}^{١٢} = ١١٢٠$$

نلاحظ أنه يوجد حد خالي من س وهو الحد الخامس $\text{ح}_{٥}$.

إنتهى

السؤال الثالث

أ) أوجد مفكوك $\left(٣\text{س} - \frac{١}{٣}\right)^{٥}$ بإستخدام نظرية ذات الحدين .

الحل

$$\left(٣\text{س} - \frac{١}{٣}\right)^{٥} = \left(٣\text{س} + \left(-\frac{١}{٣}\right)\right)^{٥}$$

$$= \binom{٥}{٠} \times (٣\text{س})^{٥} \times \left(-\frac{١}{٣}\right)^{٠} + \binom{٥}{١} \times (٣\text{س})^{٤} \times \left(-\frac{١}{٣}\right)^{١} + \binom{٥}{٢} \times (٣\text{س})^{٣} \times \left(-\frac{١}{٣}\right)^{٢}$$

$$+ \binom{٥}{٣} \times (٣\text{س})^{٢} \times \left(-\frac{١}{٣}\right)^{٣} + \binom{٥}{٤} \times (٣\text{س})^{١} \times \left(-\frac{١}{٣}\right)^{٤} + \binom{٥}{٥} \times (٣\text{س})^{٠} \times \left(-\frac{١}{٣}\right)^{٥}$$

$$= ١ \times ٢٤٣\text{س}^{٥} \times ١ - ٥ \times ٢٧\text{س}^{٤} + ١٠ \times ٣\text{س}^{٣} - ١٠ \times \frac{١}{٣}\text{س}^{٢} + ٥ \times \frac{١}{٢٧}\text{س}$$

$$- ١ \times ١ \times \frac{١}{٢٤٣}$$

$$= ٢٤٣\text{س}^{٥} - ١٣٥\text{س}^{٤} + ٣٠\text{س}^{٣} - \frac{١٠}{٣}\text{س}^{٢} + \frac{٥}{٢٧}\text{س} - \frac{١}{٢٤٣}$$

إنتهى

ب) إذا كان ل ($ح_1$) = ٠,٦٢ و ل ($ح_2$) = ٠,٣٥ و ل ($ح_1 \cap ح_2$) = ٠,٤٠ أوجد ل ($\overline{ح_1 \cup ح_2}$) ، إحتمال (وقوع $ح_1$ و عدم وقوع $ح_2$) :

الحل

ل ($ح_1 \cup ح_2$) = ل ($ح_1$) + ل ($ح_2$) − ل ($ح_1 \cap ح_2$) = ٠,٦٢ + ٠,٣٥ − ٠,٤ = ٠,٥٧

ل ($\overline{ح_1 \cup ح_2}$) = ١ − ل ($ح_1 \cup ح_2$) = ١ − ٠,٥٧ = ٠,٤٣

إحتمال وقوع $ح_1$ وعدم وقوع $ح_2$ هو ل ($ح_1$) − ل ($ح_1 \cap ح_2$) .

ل ($ح_1$) − ل ($ح_1 \cap ح_2$) = ٠,٦٢ − ٠,٤ = ٠,٢٢

إنتهى

جـ) إذا كان ل (ن ، ر) = ١٢٠ × $\binom{ن}{ن - ر}$ فأوجد قيمة ر .

الحل

إذا كان ل (ن ، ر) = ١٢٠ × $\binom{ن}{ن - ر}$ فأوجد قيمة ر .

∵ $\binom{ن}{ن - ر} = \binom{ن}{ر}$ ⇐ ل (ن ، ر) = ١٢٠ × $\binom{ن}{ر}$

⇐ ل (ن ، ر) = ١٢٠ × $\frac{ل (ن ، ر)}{ر!}$ ⇐ ر! = ١٢٠

∵ ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ = ٦! = ر!

⇐ ر = ٦

إنتهى

السؤال الرابع

أ) $ح_1$ ، $ح_2$ ⊂ Ω بحيث إن : ل ($ح_1$) = ٠,٦٦ ، ل ($ح_2$) = ٠,٥٢ ، ل ($ح_2$ / $ح_1$) = ٠,٨٠ أوجد : ل ($ح_1 \cap ح_2$) ، ل ($\overline{ح_2}$ / $ح_1$)

الحل

∵ ل ($ح_2$ / $ح_1$) = $\frac{ل (ح_1 \cap ح_2)}{ل (ح_1)}$ ⇐ ل ($ح_1 \cap ح_2$) = ل ($ح_2$ / $ح_1$) × ل ($ح_1$)

= ٠,٨ × ٠,٦٦ = ٠,٥٢٨

$$ل(\overline{ح_٢} / ح_١) = \frac{ل(ح_١ \cap \overline{ح_٢})}{ل(ح_١)} = \frac{ل(ح_١) - ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_١)}$$

$$= (٠,٦٦ - ٠,٥٢٨) \div ٠,٦٦ = ٠,٢$$

إنتهى

ب) $ح_١$ ، $ح_٢ \subset \Omega$ بحيث إن : $ل(ح_١) = \frac{١}{٢}$ ، $ل(ح_١ \cup ح_٢) = \frac{٢}{٣}$ ، $ل(ح_١ - ح_٢) = \frac{١}{٣}$

بين إذا ما كان $ح_١$ ، $ح_٢$ مستقلان أم منفصلان .

الحل

$$ل(ح_١ - ح_٢) = ل(ح_١) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$$

$$\Leftarrow \quad ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١) - ل(ح_١ - ح_٢) = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦} \quad ----- \quad ①$$

$$\because \quad ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$$

$$\Leftarrow \quad ل(ح_٢) = ل(ح_١ \cup ح_٢) - ل(ح_١) + ل(ح_١ \cap ح_٢)$$

$$\Leftarrow \quad ل(ح_٢) = \frac{٢}{٣} - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٦} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$$

$$ل(ح_١) \times ل(ح_٢) = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦} \quad ---------- \quad ②$$

من ① و ② $\because \quad ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١) \times ل(ح_٢)$

$\Leftarrow$ $ح_١$ ، $ح_٢$ مستقلين

إنتهى

جـ) إذا كان معامل $ح_٨$ = معامل $ح_{٢٦}$ في مفكوك $(س + ص)^ن$ أوجد قيمة ن .

الحل

في المفكوك $(س + ص)^ن$:

$$ح_٨ = \binom{ن}{٧} \times (س)^{ن - ٧} \times (ص)^٧$$

$$ح_{٢٦} = \binom{ن}{٢٥} \times (س)^{ن - ٢٥} \times (ص)^{٢٥}$$

$\because$ معامل $ح_٨$ = معامل $ح_{٢٦}$ $\Leftarrow \binom{ن}{٧} = \binom{ن}{٢٥} \Leftarrow$ ن = ٧ + ٢٥ = ٣٢

إنتهى

السؤال الخامس

أ) صندوق يحتوي على على ٥ كرات بيضاء و٣ سوداء ، سحبت كرتان على التوالي بدون إرجاع أوجد إحتمال :

١) كلتاهما بيضاء . ٢) إحداهما بيضاء والأخرى سوداء .

الحل

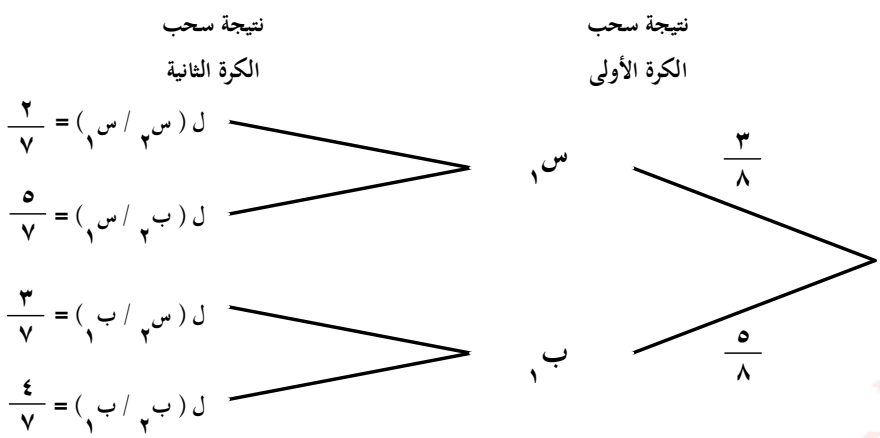
نفرض أن :

$س_١$: حادث الكرة الأولى سوداء .

$س_٢$: حادث الكرة الثانية سوداء .

$ب_١$: حادث الكرة الأولى بيضاء .

$ب_٢$: حادث الكرة الثانية بيضاء .



١) إحتمال أن تكون الكرة كلتاهما بيضاء يعني أن الأولى بيضاء والثانية بيضاء ويساوي : $ل (ب_١ \cap ب_٢)$.

$$ل (ب_١ \cap ب_٢) = ل (ب_١) \times ل (ب_٢ / ب_١) = \frac{٥}{٨} \times \frac{٤}{٧} = \frac{٥}{١٤}$$

٢) إحتمال أن تكون إحداهما بيضاء والأخرى سوداء يعني أن تكون الأولى بيضاء والثانية سوداء أو أن تكون الأولى سوداء والثانية بيضاء ويساوي : $ل (ب_١ \cap س_٢) + ل (س_١ \cap ب_٢)$

$$ل (ب_١ \cap س_٢) + ل (س_١ \cap ب_٢) = ل (ب_١) \times ل (س_٢ / ب_١) + ل (س_١) \times ل (ب_٢ / س_١)$$

$$= \frac{٥}{٨} \times \frac{٣}{٧} + \frac{٣}{٨} \times \frac{٥}{٧} = \frac{١٥}{٥٦} + \frac{١٥}{٥٦} = \frac{٣٠}{٥٦} = \frac{١٥}{٢٨}$$

إنتهى

ب) إذا كان ل (س + ص ، ٥) = ٦٧٢٠ و (س – ص)! = ٧٢٠ فما قيمة كل من س ، ص .

الحل

∵ ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = ل (٨ ، ٥) = ٦٧٢٠ = ل (س + ص ، ٥)

⇐ س + ص = ٨ ---------- ①

∵ ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠ = ٦! = (س – ص)! ⇐ س – ص = ٦ ------ ②

② + ① ⇐ ٢س = ١٤ ⇐ س = ٧ وبالتعويض عن قيمة س = ٧ في معادلة ①

⇐ ٧ + ص = ٨ ⇐ ص = ١ ⇐ س = ٧ ، ص = ١

إنتهى

جـ) أثبت أن : $\sum_{ر=٠}^{٣} \binom{٣}{ر} \times \binom{٥}{٣-ر} = ٥٦$

الحل

$$\sum_{ر=٠}^{٣} \binom{٣}{ر} \times \binom{٥}{٣-ر} = \binom{٣}{٠} \times \binom{٥}{٣} + \binom{٣}{١} \times \binom{٥}{٢} + \binom{٣}{٢} \times \binom{٥}{١}$$

$$+ \binom{٣}{٣} \times \binom{٥}{٠} = ١ \times ١٠ + ٣ \times ١٠ + ٣ \times ٥ + ١ \times ١$$

$$= ١٠ + ٣٠ + ١٥ + ١ = ٥٦$$

إنتهى

السؤال الأول : إختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين :

١) النظير الضربي للعدد المركب ٥ – ١٢ت يساوي :

أ) $\frac{١٦٩}{١٢٥ + ت}$ ب) $\frac{١٦٩}{٥} - \frac{١٦٩}{١٢ت}$ ج) $\frac{٥}{١٦٩} - \frac{١٢}{١٦٩ت}$ د) $\frac{٥}{١٦٩} + \frac{١٢}{١٦٩ت}$

٢) إذا كان ٣س – ١٢ص ت = ٦ + ١٢ت فإن (س ، ص) = :

أ) (٢ ، ١) ب) (–٢ ، ١) ج) (٢ ، –١) د) (–٢ ، –١)

٣) العدد $٠,١\overline{٧}$ يعبر عنه بكسر عادي على الصورة :

أ) $\frac{١٦}{٩٩}$ أ) $\frac{١٦}{٩}$ أ) $\frac{١٦}{٩٠}$ أ) $\frac{١٧}{١٠٠}$

٤) رتبة الحد الذي قيمته – ٥١٢ في المتتالية –٨ ، ١٦ ، –٣٢ ، ..... هي :

أ) ٨ ب) ٧ ج) ٦ د) –٨

٥) $\sum_{ر=٢}^{٦} (ر - ٢) =$

أ) ١٥ ب) ١٠ ج) ٢٠ د) ٩

٦) إذا إنخفضت أسعار البنزين من عام ٢٠٠٧ إلى عام ٢٠٠٨ بنسبة ٨٠% فإن الرقم القياسي لسعر البنزين في عام ٢٠٠٨ بالنسبة لعام ٢٠٠٧ هو :

أ) لا يمكن معرفته ب) ١٨٠% ج) ٢٠% د) ١٢٠%

٧) كم كلمة مكونة من حرفين يمكن تكوينها من حروف كلمة " القدس " بدون تكرار ؟

أ) ١٠ ب) ١٢٠ ج) ٥ د) ٢٠

٨) الحد الأوسط في مفكوك $(٢س + ١)^{٦}$ يساوي :

أ) $١٢٠س^{٣}$ ب) $١٦٠س^{٣}$ ج) $١٢٠س^{٢}$ د) $١٦٠س^{٢}$

٩) إذا كان ن! = (ن – ١)! فإن ن = :

أ) ١ ب) صفر ج) ٠,٥ د) غير ذلك

١٠) حقيبة تحتوي على ٢٠ كرة مرقمة من ١ إلي ٢٠ سحبت كرة واحدة عشوائياً ، ما إحتمال أن تحمل الكرة رقماً زوجياً ويقبل القسمة على ٥ ؟

أ) ٠,٢ ب) ٠,٥ ج) ٠,٦ د) ٠,١

الحل

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإجابة الصحيحة	د	ج	ب	ب	ب	ج	د	ب	أ	د

إنتهى

السؤال الثاني

أ) جد الجذور التربيعية للعدد المركب −١٥ − ٨ت .

الحل

ع = − ١٥ − ٨ت .

نفرض أن الجذر التربيعي للعدد ع هو س + ص ت

⇐ (س + ص ت)^{٢} = ع = − ١٥ − ٨ت .

⇐ (س^{٢} − ص^{٢}) + (٢س ص) ت = − ١٥ − ٨ت.

⇐ س^{٢} − ص^{٢} = − ١٥ ---------- ①

، ٢س ص = −٨ ⇐ س ص = −٤ ---------- ②

من المعادلة ② س = − $\frac{٤}{ص}$ ---------- ③

بالتعويض عن س في المعادلة رقم ① ⇐ $\frac{١٦}{ص^{٢}}$ − ص^{٢} = − ١٥

⇐ ١٦ − ص^{٤} = − ١٥ص^{٢}

⇐ ص^{٤} − ١٥ص^{٢} − ١٦ = ٠ ⇐ (ص^{٢} + ١) (ص^{٢} − ١٦) = ٠

⇐ ص = ± $\sqrt{-١}$ أو ص = ± ٤ (ونرفض القيمة ± $\sqrt{-١}$ لأن س ، ص ∈ ح)

عندما ص = ٤ بالتعويض في المعادلة رقم ③ ⇐ س = −١

عندما ص = − ٤ بالتعويض في المعادلة رقم ③ ⇐ س = ١

إذن الجذرين هما −١ + ٤ ت ، ١ − ٤ ت

إنتهى

ب) متسلسلة حسابية مجموع أول تسعة حدود فيها ١٥٣ ، ومجموع أول ثلاثة عشر حداً = ٣٢٥ ، جد الحد الخامس عشر فيها .

الحل

مجموع أول تسعة حدود فيها ١٥٣

⇐ $ج_{٩}$ = ١٥٣ ⇐ $\frac{٩}{٢}$ (٢ أ + ٨ د) = ١٥٣ ⇐ ٩ أ + ٣٦ د = ١٥٣

⇐ أ + ٤ د = ١٧ ---------- (١)

ومجموع أول ثلاثة عشر حداً = ٣٢٥

⇐ $ج_{١٣}$ = ٣٢٥ ⇐ $\frac{١٣}{٢}$ (٢ أ + ١٢ د) = ٣٢٥ ⇐ ١٣ أ + ٧٨ د = ٣٢٥

⇐ أ + ٦ د = ٢٥ ---------- (٢)

بطرح المعادلة (١) من (٢) ⇐ ٢ د = ٨ ⇐ د = ٤

بالتعويض عن قيمة د في (٢) ⇐ أ + ١٦ = ١٧ ⇐ أ = ١

وبناءاً عليه تصبح المتتالية : ١ ، ٥ ، ٩ ، ١٣ ، ١٧ ، .....

$ح_{١٥}$ = أ + ١٤ د = ١ + ٥٦ = ٥٧

إنتهى

جـ) إذا كان ل (س + ص ، ٢) = ١١٠ ، $\binom{ص - ٣}{٣}$ = ٣٥ فما قيمة كل من س ، ص .

الحل

∵ ١١ × ١٠ = ل (١١ ، ٢) = ١١٠ = ل (س + ص ، ٢)

⇐ س + ص = ١١ ---------- (١)

∵ $\binom{ص - ٣}{٣}$ = ٣٥ ⇐ $\frac{ل (ص - ٣ ، ٣)}{٣!}$ = ٣٥ ⇐ ل (ص − ٣ ، ٣) = ٢١٠

⇐ ل (ص − ٣ ، ٣) = ٢١٠

∵ ٧ × ٦ × ٥ = ل (٧ ، ٣) = ٢١٠ = ل (ص − ٣ ، ٣)

⇐ ص − ٣ = ٧ ---------- (٢)

وبضرب معادلة رقم (٢) في −١ وجمعها مع معادلة (١) ينتج أن :

⇐ س + ٣ = ٤ ⇐ س = ١

وبالتعويض عن قيمة س = ١ في معادلة (١) ⇐ ١ + ص = ١١ ⇐ ص = ١٠

⇐ س = ١ ، ص = ١٠

إنتهى

السؤال الثالث

أ) إستخدم مبدأ الإستقراء الرياضي لإثبات أن : ٦ + ١٢ + ١٨ + ... + ٦ ن = ٣ ن (ن + ١)

الحل

عندما ن = ١ ⇐ الطرف الأيمن = ٦ × ١ = ٦

الطرف الأيسر = ٣ × ١ × (١ + ١) = ٣ × ٢ = ٦ = الطرف الأيمن ⇐ العبارة صحيحة عندما ن = ١

نفرض أن العبارة صحيحة عندما ن = ك أي أن :

٦ + ١٢ + ١٨ + ... + ٦ ك = ٣ ك (ك + ١)

نريد إثبات صحة العبارة عندما ن = ك + ١ أي نريد إثبات أن :

٦ + ١٢ + ١٨ + ... + ٦ ك + ٦ (ك + ١) = ٣ (ك + ١) (ك + ٢)

٦ + ١٢ + ١٨ + ... + ٦ ك + ٦ (ك + ١) = ٣ ك (ك + ١) + ٦ (ك + ١)

= ٣ (ك + ١) (ك + ٢) (وذلك بأخذ (ك + ١) كعامل مشترك)

⇐ العبارة صحيحة عندما ن = ك + ١ ⇐ ٦ + ١٢ + ١٨ + ... + ٦ ك = ٣ ك (ك + ١) صحيحة

إنتهى

ب) أثبت أن $(٢ + ٥\omega + ٢\omega^{٢})^{٦} = ٧٢٩$.

الحل

$[٢ + ٥\omega + ٢\omega^{٢}]^{٦} = [٢ + ٢\omega + ٣\omega + ٢\omega^{٢}]^{٦} = [٢ + ٢\omega + ٢\omega^{٢} + ٣\omega]^{٦}$

$= [٢(١ + \omega + \omega^{٢}) + ٣\omega]^{٦} = [٠ + ٣\omega]^{٦} = (٣)^{٦} \times (\omega)^{٦} = ٧٢٩ \times (\omega^{٣})^{٢}$

$= ٧٢٩ \times (١)^{٢} = ٧٢٩$

إنتهى

ج) جد الصورة المثلثية للعدد $ع = \frac{١}{٢}(-١ + \sqrt{٣}\, ت)$.

الحل

$ع = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$. المقياس = $|ع| = \sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}} = \sqrt{\frac{٤}{٤}} = \sqrt{١} = ١$

جتا هـ = $-\frac{١}{٢}$ ، جا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ولأن جتا هـ مقدار سالب و جا هـ مقدار موجب

⇐ هـ عبارة عن زاوية تقع في الربع الثاني وزاوية إسنادها $\frac{\pi}{٣}$ ⇐ السعة هـ = $\pi - \frac{\pi}{٣} = \frac{٢\pi}{٣}$

⇐ الصورة القطبية للعدد المركب ع = ١ × (جتا $\frac{٢\pi}{٣}$ + حا $\frac{٢\pi}{٣}$ ت) = (جتا $\frac{٢\pi}{٣}$ + حا $\frac{٢\pi}{٣}$ ت)

إنتهى

السؤال الرابع

أ) يمثل الجدول التالي أسعار وكميات ٣ سلع ، بإتخاذ عام ١٩٩٨ سنة الأساس إحسب :

١) الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار .

٢) رقم لاسبير النسبي باتخاذ الكميات أوزاناً .

السلعة	١٩٩٨		٢٠٠٠	
	السعر	الكمية	السعر	الكمية
أ	٦٠	١٥	٧٠	٢٠
ب	٨٥	٢٥	١٠٠	٣٠
ج	٨٠٠	٨	٥٠٠	٦

الحل

١) الرقم القياسي التجميعي البسيط لأسعار عام ٢٠١٠م $= \frac{\sum ع}{\sum ع_{.}} \times ١٠٠\%$

$= \frac{٧٠ + ١٠٠ + ٥٠٠}{٦٠ + ٨٥ + ٨٠٠} \times ١٠٠\% = \frac{٦٧٠}{٩٤٥} \times ١٠٠\% = ٧٠,٨٩\%$

٢) رقم لاسبير النسبي للأسعار $= \frac{\sum \frac{ع}{ع_{.}} \times و_{.}}{\sum و_{.}} \times ١٠٠\%$

$= \frac{\frac{٧٠}{٦٠} \times ١٥ + \frac{١٠٠}{٨٥} \times ٢٥ + \frac{٥٠٠}{٨٠٠} \times ٨}{١٥ + ٢٥ + ٨} \times ١٠٠\% = ١٠٨,١٥\%$

إنتهى

ب) إذا كان ل ($ح_١$) = ٠,٥ ، ل ($ح_٢$) = ٠,٧ ، ل ($ح_١ \cup ح_٢$) = ٠,٩ فأوجد :

١) ل ($\overline{ح_١}$) ٢) ل (وقوع $ح_١$ وعدم وقوع $ح_٢$) ٣) ل ($ح_٢ / ح_١$) .

الحل

١) ل ($\overline{ح_١}$) = ١ − ل ($ح_١$) = ١ − ٠,٥ = ٠,٥

٢) ل (وقوع $ح_١$ وعدم وقوع $ح_٢$) = ل ($ح_١ \cap \overline{ح_٢}$) = ل ($ح_١$) − ل ($ح_١ \cap ح_٢$)

∵ ل ($ح_١ \cup ح_٢$) = ل ($ح_١$) + ل ($ح_٢$) − ل ($ح_١ \cap ح_٢$)

⇐ ل ($ح_١ \cap ح_٢$) = ل ($ح_١$) + ل ($ح_٢$) − ل ($ح_١ \cup ح_٢$)

⇐ ل ($ح_١ \cap ح_٢$) = ٠,٥ + ٠,٧ − ٠,٩ = ٠,٣

⇐ ل (وقوع $ح_1$ وعدم وقوع $ح_2$) = ل ($ح_1$) − ل ($ح_1 \cap ح_2$) = ل (٠,٥) − ٠,٣ = ٠,٢

٣) ل ($ح_2$ / $ح_1$) = $\frac{ل (ح_1 \cap ح_2)}{ل (ح_1)}$ = ٠,٣ ÷ ٠,٥ = ٠,٦

إنتهى

جـ) خزان به ٦١٣٨ لتر من الماء ، يتسرب منه في اليوم الأول ٦ لترات وفي اليوم الثاني ١٢ لتراً وفي اليوم الثالث ٢٤ لتراً . بعد كم يوم يصبح الخزان فارغاً ؟

الحل

متتالية الماء المتسرب هي : ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ..... وهي عبارة عن متتالية هندسية حدها الأول أ = ٦ وأساسها ر = ٢

يصبح الخزان فارغ عندما يكون $جـ_ن$ = ٦١٣٨

⇐ $\frac{أ (١ - ر^ن)}{١ - ر}$ = $\frac{٦ \times (١ - ٢^ن)}{٢ - ١}$ = ٦١٣٨

⇐ $(١ - ٢^ن)$ = −١٠٢٣ ⇐ $٢^ن$ = ١٠٢٤ ⇐ لو $٢^ن$ = لو ١٠٢٤

لو $٢^ن$ = لو ١٠٢٤ ⇐ ن لو ٢ = لو ١٠٢٤ ⇐ ن = لو$_٢$ ١٠٢٤ ⇐ ن = ١٠

أي أن الخزان يصبح فارغاً بعد ١٠ أيام .

إنتهى

السؤال الخامس

أ) إذا كان إحتمال أن يسافر أحمد إلى النرويج ٠,٦ وإحتمال أن يجد عملاً إذا سافر ٠,٣ وإحتمال أن لا يجد عملاً إذا لم يسافر ٠,٢ . إحسب إحتمال :

١) أن يسافر ويجد عملاً . ٢) أن لا يسافر ولا يجد عملاً .

الحل

أ) نفرض أن : $ح_1$: حادث أن يسافر أحمد إلى النرويج ، $ح_2$: حادث أن يجد أحمد عمل .

إذن : ل ($ح_1$) = ٠,٦ ، ل ($ح_2$ / $ح_1$) = ٠,٣ ، ل ($\overline{ح_2}$ / $\overline{ح_1}$) = ٠,٢

إحتمال أن يسافر ويجد عملاً يساوي = ل ($ح_1 \cap ح_2$)

ل ($ح_1 \cap ح_2$) = ل ($ح_1$) × ل ($ح_2$ / $ح_1$) = ٠,٦ × ٠,٣ = ٠,١٨

إحتمال أن لا يسافر ولا يجد عملاً = ل ($\overline{ح_1} \cap \overline{ح_2}$)

= ل ($\overline{ح_1}$) × ل ($\overline{ح_2}$ / $\overline{ح_1}$) = (١ − ٠,٦) × ٠,٢ = ٠,٤ × ٠,٢ = ٠,٠٨

إنتهى

ب) جد الحد الخالي من س ومعامل $س^{٤}$ في مفكوك $\left(\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٣}{س^{٢}}\right)^{٨}$.

الحل

$ح_{ر+١} = \binom{٨}{ر} \times \left(\frac{س^{٢}}{٢}\right)^{٨-ر} \times \left(\frac{٣}{س^{٢}}\right)^{ر}$

$= \binom{٨}{ر} \times (٢)^{٨-ر} \times (٣)^{ر} \times (س)^{١٦-٢ر-٢ر}$

$= \binom{٨}{ر} \times (٢)^{٨-ر} \times (٣)^{ر} \times (س)^{١٦-٤ر}$

في الحد الخالي من س يكون فيه : $س^{١٦-٤ر} = س^{٠}$ ⇐ $١٦ - ٤ر = ٠$ ⇐ $ر = ٤$

⇐ $ح_{ر+١} = ح_{٤+١} = ح_{٥}$ ⇐ الحد الخالي من س هو الحد الخامس

في الحد الذي يحتوي على $س^{٤}$ يكون فيه : $س^{١٦-٤ر} = س^{٤}$ ⇐ $١٦ - ٤ر = ٤$ ⇐ $ر = ٣$

⇐ $ح_{ر+١} = ح_{٣+١} = ح_{٤}$ وهو الحد الذي يحتوي على $س^{٤}$

معامل $ح_{٤} = \binom{٨}{٣} \times (٢)^{٨-٣} \times (٣)^{٣} = ٥٦ \times \frac{١}{٣٢} \times ٢٧ = \frac{١٨٩}{٤}$

إنتهى

جـ) جد مجموعة الحل في ح للمعادلة : $ع^{٥} + ع^{٣} - ع^{٢} - ١ =$ صفر .

الحل

∵ $١^{٥} + ١^{٣} - ١^{٢} - ١ =$ صفر

⇐ $(ع - ١)$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $ع^{٥} + ع^{٣} - ع^{٢} - ١$

وبإجراء القسمة الطويلة ينتج أن :

$ع^{٥} + ع^{٣} - ع^{٢} - ١ = (ع - ١)(ع^{٤} + ع^{٣} + ٢ع^{٢} + ع + ١)$

$= (ع - ١)(ع^{٤} + ٢ع^{٢} + ١ + ع^{٣} + ع) = (ع - ١)[(ع^{٢} + ١)^{٢} + ع^{٣} + ع]$

$= (ع - ١)[(ع^{٢} + ١)^{٢} + ع(ع^{٢} + ١)]$

$= (ع - ١)[(ع^{٢} + ١)^{٢} + ع(ع^{٢} + ١)]$

$= (ع - ١)[(ع^{٢} + ١)(ع^{٢} + ١ + ع)]$

⇐ إما $ع - ١ = ٠$ ومنها $ع = ١$ أو $ع^{٢} + ١ = ٠$ ومنها $ع^{٢} = -١$ ⇐ $ع = \pm ت$

أو $ع^{٢} + ع + ١ = ٠$ ومنها $ع = -\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$

∴ م . ح = $\{١ ، \pm ت ، -\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت\}$

إنتهى

قوانين مهمة	
مفكوك المقدار $(أ + ب)^{٢}$	$(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢}$ مثال : $(أ + ٣)^{٢} = أ^{٢} + ٢ \times أ \times ٣ + ٣^{٢}$ $= أ^{٢} + ٦ أ + ٩$
مفكوك المقدار $(أ - ب)^{٢}$	$(أ - ب)^{٢} = أ^{٢} - ٢ أ ب + ب^{٢}$ مثال : $(ص - ٥)^{٢} = ص^{٢} - ٢ \times ص \times ٥ + ٥^{٢}$ $= ص^{٢} - ١٠ ص + ٢٥$
الفرق بين مربعين : $أ^{٢} - ب^{٢}$	$أ^{٢} - ب^{٢} = (أ - ب)(أ + ب)$ مثال : $س^{٢} - ٤ = س^{٢} - ٢^{٢} = (س - ٢)(س + ٢)$
الفرق بين مكعبين : $أ^{٣} - ب^{٣}$	$أ^{٣} - ب^{٣} = (أ - ب)(أ^{٢} + أ ب + ب^{٢})$ مثال : $ص^{٣} - ٢٧ = ص^{٣} - ٣^{٣}$ $= (ص - ٣)(ص^{٢} + ٣ ص + ٣^{٢})$ $= (ص - ٣)(ص^{٢} + ٣ ص + ٩)$
مجموع مكعبين : $أ^{٣} + ب^{٣}$	$(أ + ب)(أ^{٢} - أ ب + ب^{٢})$ مثال : $ع^{٣} + ٦٤ = ع^{٣} + ٤^{٣}$ $= (ع + ٤)(ع^{٢} - ٤ ع + ٤^{٢})$ $= (ع + ٤)(ع^{٢} - ٤ ع + ١٦)$
مرافق المقدار $أ + ب$	مرافق المقدار $أ + ب = أ - ب$ حاصل ضرب مقدارين مترافقين : $(أ + ب)(أ - ب) = أ^{٢} - ب^{٢}$
مرافق العدد المركب $س + ص ت$ وحاصل ضرب عددين مركبين مترافقين	مرافق العدد المركب $س + ص ت$ يرمز له بالرمز $\overline{س + ص ت}$ ويساوي $س - ص ت$ حاصل ضرب عددين مركبين مترافقين : $(س + ص ت)(س - ص ت) = س^{٢} + ص^{٢}$ مثال : $(٢ + ٣ ت)(٢ - ٣ ت) = ٢^{٢} + ٣^{٢} = ١٣$

علاقة النسب المثلثية لأي زاوية بزاوية إسنادها	
النسب المثلثية لزاوية في الربع الثاني وزاوية إسنادها هـ (π − هـ) ملاحظة : الزاوية بالتقدير الستيني = (١٨٠ − هـ)	جا (π − هـ) = جا هـ جتا (π − هـ) = − جتا هـ ظا (π − هـ) = − ظا هـ مثال : جا (١٢٠°) = جا (١٨٠ − ٦٠) = جا ٦٠ جتا (١٢٠°) = جتا (١٨٠ − ٦٠) = − جتا ٦٠ ظا (١٢٠°) = ظا (١٨٠ − ٦٠) = − ظا ٦٠
النسب المثلثية لزاوية في الربع الثالث وزاوية إسنادها هـ	جا (π + هـ) = − جا هـ
	جتا (π + هـ) = − جتا هـ
	ظا (π + هـ) = ظا هـ
النسب المثلثية لزاوية في الربع الرابع وزاوية إسنادها هـ	جا (٢π − هـ) = − جا هـ
	جتا (٢π − هـ) = جتا هـ
	ظا (٢π − هـ) = − ظا هـ

ملاحظـــة

عزيزي الطالب جا أ = جا (٢π + أ) = جا (−٢π + أ) = جا (٤π + أ) = جا (− ٤π − أ) ..... الخ

وذلك صحيح أيضاً في حالة النسب المثلثية الأخرى جتا أ ، ظا أ بمعنى أنك لو أضفت للزاوية مضاعفات سالبة أو موجبة للمقدار ٢π تبقى النسبة المثلية ثابتة .

رياضياً هذا يعني أن : جا أ = جا (± ٢ ن π + أ) ، ن ∈ ط

جتا أ = جتا (± ٢ ن π + أ) ، ن ∈ ط

ظا أ = ظا (± ٢ ن π + أ) ، ن ∈ ط

لكم منى كل الإحترام والتقدير أ . بديع حمدان