

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:

DR. FAZEKAS FERENC

egyetemi docens

DR. MATH. SC.

BELSŐ MUNKATÁRSAK:

DR. FREY TAMÁS

egyetemi tanár,
a matematikai tudományok
doktora

DR. BAJCSAY PÁL

egyetemi docens,
kandidátus



SZEMLÉLTETÉS:

GYURCSY ENDRE

okl. villamosmérnök

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

1973

A

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SOROZAT KÖTETEI

A.

- A. I. Középiskolai matematika (Ötödik kiadás)
- A. II. Egyváltozós elemi függvények (Harmadik kiadás)
- A. III. Differenciálszámítás (Harmadik kiadás)
- A. IV. Határozatlan integrál (Negyedik kiadás)
- A. V.* Határozott integrál (Első rész) (Negyedik kiadás)
- A. V.** Határozott integrál (Második rész) (Második kiadás)
- A. VI. Többváltozós függvények és differenciálásuk (Negyedik kiadás)
- A. VII. Többváltozós függvények integrálása (Második kiadás)
- A. VIII. Taylor-sorok (Harmadik kiadás)
- A. IX. Vektoralgebra. Lineáris egyenletrendszerek (Negyedik kiadás)
- A. X. A logarléc (Hatodik kiadás)

B.

- B. I., II., III. Vektoranalízis (Térgörbék és felületek differenciálgeometriája Skalár-, vektor- és tenzormezők) (Harmadik kiadás)
- B. IV. Komplex függvénytan (Harmadik kiadás)
- B. V. Neumerikus és grafikus közelítő módszerek (Második kiadás)
- B. VI. Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok (Harmadik kiadás)
- B. VII.* Közönséges differenciálegyenletek (Első rész) (Ötödik kiadás)
- B. VII.** Közönséges differenciálegyenletek (Második rész) (Harmadik kiadás)
- B. VIII. Parciális differenciálegyenletek (Második kiadás)

C.

- C. I. Operátorszámítás. Speciális függvények (Második kiadás)
- C. II. Variációszámítás (Harmadik kiadás)
- C. III. Integrálegyenletek (Második kiadás)
- C. IV. Mátrixszámítás (Negyedik kiadás)
- C. V. Valószínűségszámítás (Második kiadás)
- C. VI. Matematikai összefoglaló (Harmadik kiadás)
- C. VII. Matematikai programozás (Második kiadás)

(A szövegben az egyes kötetekre a fenti betű- és számjelzéssel hivatkozunk)

B. VI.

VÉGTELEN SOROZATOK, SOROK ÉS SZORZATOK

ÍRTA:

DR. FREY TAMÁS

egyetemi tanár,
a matematikai tudományok doktora

Harmadik kiadás

EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

Készült a művelődésügyi miniszter rendeletére

A kötet kéziratát átnézte:

DR. FREUD GÉZA
a matematikai tudományok doktora

Szaktanácsadó volt:

DR. HALÁSZ OTTÓ
egyetemi docens,
a műszaki tudományok kandidátusa

Korrigálta:

SZABÓ ISTVÁN
kutató

© DR. FREY TAMÁS,
DR. FAZEKAS FERENC
BUDAPEST, 1956

A SZOROZAT ELSŐ KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

A műegyetemi oktatás és mérnöki továbbképzés évtizedek óta nehezen nélkülöz egy, a műszaki igényeknek megfelelő magyar matematikai példagyűjteményt. E hiányt felismerve, matematikai tanszékeink lelkes fiataljai az utolsó 2—3 évben több jegyzetet állítottak össze a matematikai gyakorlatok anyagából. Tovább enyhítette a hiányt Gjunter—Kuzmin időközben magyarul megjelent kiváló felsőbb matematikai példatára, bár ezt — magas színvonalára való tekintettel — elsősorban nem a műegyetemi, hanem a tudományegyetemi hallgatók részére adatta ki a minisztérium. A probléma viszont teljes megoldást kívánt a hallgatók és a kezdő tanszemélyzet létszámának nagymérvű megnövekedése miatt. Ez utóbbi körülmény azt az újabb igényt támasztotta egy leendő példatárral szemben, hogy az a feladatokon és végeredményeiken kívül még bő megoldási útmutatásokat is tartalmazzon. Ugyanakkor több matematikai értekezleten szorgalmazták, a legmeggyőzőbben dr. Alexits akadémikus professzor, hogy műszaki egyetemeinken *alkalmazott műszaki matematikát* oktassunk, és gyűjtsünk össze megfelelő műszaki alkalmazott anyagot.

A minisztérium figyelmét ekkor felhívták néhány lelkes hallgató társaságában már korábban s hasonló szempontok szerint elindított gyűjtőmunkámra. A minisztérium azonnal felkarolta kezdeményezésemet, megbízott egy *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* című példagyűjtemény terveinek, szerkesztési elveinek kidolgozásával, majd rövidesen a mű szerkesztésével — egyúttal biztosítva több matematikai tanszék néhány tapasztaltabb adjunktusának, illetve tanársegédjének közreműködését.

Munkánk A. és B. része* jórészt a matematikának a műszaki felsőoktatásban világszerte szokásossá vált fejezeteit tárgyalja, de a megszokott keretekhez képest egyeseket kibővítve, főleg a B. részben, a klasszikus műszaki matematika érintett fejezeteit. A sorozat C. része a modern műszaki matematika néhány olyan nagy jelentőségű fejezetébe nyújt bevezetést, amelyek bevonulása a műszaki felsőoktatásunkba az utóbbi években megkezdődött.

Munkánk első célja a szokásos tananyaggal kapcsolatban mindazt előadni, aminek műszaki egyetemeinken a helyesen, korszerűen, a műszaki igényeknek megfelelően vezetett matematikai gyakorlatokon szerepelnie kell. Esti és levelező oktatásunkban idevágó füzetek esetleg még szélesebb körű felhasználásra is kerülhetnek.

Munkánk második (de nem mellékes) *célja* gyakorlati és műszaki anyagot nyújtani a különböző tagozatokon a felsőbb éves nappali és esti hallgatók speciális matematikai oktatásához, a szakmérnöki továbbképző tanfolyamok és a *Mérnöki Továbbképző Intézet* rendszeres matematikai oktatásához, továbbá az igényesebb hallgatók, a fiatal matematikai és műszaki tanszemélyzet, a kutató és üzemi mérnökök és aspiránsok egyéni vagy csoportos továbbtanulásához.

E példagyűjteménynél viszonylag újszerűnek mondható célkitűzések megvalósítása szintén *újszerű szerkesztési elveket* kíván. Ennek megfelelően nem szorítkozunk, mint a legtöbb példatár, csupán feladatok és végeredmények közlésére. Ellenkezőleg, megkíséreltük fejezetről fejezetre végigvezetni a következő rendszert: a) elméleti összefoglaló; b) bő magyarázat kíséretében részletesen megoldott, kisszámú jellegzetes mintapélda; c) az előbbiekből alapján könnyen megoldható, csak végeredménnyel ellátott, nagyszámú

* A sorozat köteteinek címjegyzékét lásd a 2. oldalon!

gyakorló feladat; d) esetleg rövid útmutatással ellátott és csak vázlatosan megoldott különleges (csillagos) példák; e) esetleg egyes bizonyítások vázlatos közlése a különleges példák között; f) végül műszaki alkalmazások bemutatása. E láncszemek véleményünk szerint jól szolgálhatják a matematikai elmélet és a műszaki gyakorlat összekapcsolásának ügyét. Megjegyzendő, hogy bizonyára nem mindenütt sikerült a rendszert teljes egészében megvalósítanunk; olykor e sorrendtől is eltértünk.

Az *A. rész füzetében*, professzorainkkal egyetértésben, eléggé óvatosan méreteztük a műszaki alkalmazások számát a többi példákéhoz képest. Erre készített az elsőéves hallgatók műszaki ismereteinek hiányossága, valamint az e füzetekben közölt matematikai apparátus elégtelensége komolyabb műszaki problémák megoldásához. Még így is lényegesen bővebb műszaki példaanyagunk, mint az ismert példatáraké.

A *B. és C. rész füzetében* — az olvasó egyre növekvő matematikai és műszaki ismereteire támaszkodva — nagy bőségben tárgyalunk problémákat a klasszikus és modern műszaki matematika legkülönbözőbb területeiről, amelyekben kézzelfoghatóan jelentkezik a matematika és a technika egysége.

A minisztérium és professzoraink tanácsát követve, bátran merítettünk a legkülönbözőbb jó *forrásokból*, sokkal inkább törekedve az anyag gazdagságára és megbízhatóságára mintsem — példatárnál amúgy is szegényes sikert ígérő — eredetiségére. Természetesen szépszámú új feladatot is készítettünk.

A szemléltető anyag gondos szerkesztése és megrajzolása *Gyurcsy Endre* okl. villamosmérnök kolléga érdeme.

Ki kell emelnem *Egerváry* akadémikus professzor számos szakmai megjegyzését és műegyetemi előadásait, amelyekből merített tanulságok nagymértékben emelik munkánk értékét. Állandó érdeklődésével és gazdag pedagógiai és módszertani útmutatásokkal volt segítségünkre *Gallai* professzor. Meg kell emlékeznem az *Alkalmazott Matematikai Intézet*ről, amely modern könyvtárával és alkotó légkörével a gyűjtés legelejétől mindvégig támogatta munkánkat.

Végezetül *munkánkat műszaki egyetemeink oktatóinak és hallgatóinak ajánljuk*. Használják fel e füzeteket a maguk, illetve a leendő mérnökök ezreinek képzésére! Észrevételeikkel segítsék elő e gyűjtemény mielőbbi tökéletesedését!

Budapest, 1952. szeptember 1.

A SZERKESZTŐ

A SOROZAT MÁSODIK ÉS HARMADIK KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

Közel nyolc év munkájával — néhány kisebb jelentőségű módosítástól eltekintve az eredeti terv szerint — sikerült befejeznünk a *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* c. sorozatot 25 kötetben. Munkaközösségünk céltudatossága és munkakedve, a minisztérium és a Tankönyvkiadó kitartó támogatása, bírálóink értékes segítsége és nem utolsósorban egyre növekvő olvasótáborunk lelkes érdeklődése lehetővé tette az összes nehézségek leküzdését. Noha távolról sem tekinthetjük tökéletesnek, véglegesnek könyveinket, mégis az első kiadás befejezésekor a magyar műszaki matematikai felsőoktatás érdekében végzett odaadó munka jó érzése tölti el munkaközösségünket.

Könyveinket a hazai szakemberek és szaklapok kedvezően fogadták, és számos hasznos észrevétellel, tanáccsal voltak segítségünkre. Köteteink az évek során több keleti és nyugati államba is eljutottak, 1958 nyarán pedig abban a megtiszteltetésben részesültünk, hogy a belgiumi Nemzetközi Mérnöki Matematikai Kongresszus vezetősége kiállította és idegen nyelvű, vetítettképes előadásban is bemutatta a teljes sorozatot, figyelemre méltó érdeklődés és elismerés mellett.

1963-ban szükségessé vált a sorozat harmadik kiadásának megindítása. A második kiadású kötetek jó részének gyors elfogyása — éppen a matematikai programozás lineáris algebrai segédeszközeivel, ill. a síkbeli rugalmasságtan korszerű, komplex függvénytanai módszerével kapcsolatos bővítés után — kézzelfoghatóan bizonyítja a sorozat fejlesztésére, korszerűsítésére kitűzött célok és a megvalósításukra kifejtett erőfeszítések helyességét.

Említésre méltó, hogy sorozatunk vagy egyes kötetei 1958 óta újabb külföldön (pl. a Szovjetunióban, NDK-ban, Jugoszláviában, Egyiptomban, USA-ban, Angliában, NSZK-ban) és nemzetközi fórumon (pl. az NDK Matematikai Társulatának 1963. évi nemzetközi ülészakán) tudtak helytállni és versengeni a hasonló rendeltetésű külföldi munkákkal.

Ilyen kedvező adottságok között természetes, hogy lelkesen folytatjuk a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének nagy munkáját, ismét kérve ehhez a Minisztérium, a Kiadó és nem utolsósorban a műszaki olvasótáborunk buzdító, áldozatkész támogatását.

Budapest, 1964. febr. 15.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT NEGYEDIK KIADÁSÁHOZ

A középiskolai és a műegyetemi tanterv újabban végbement jelentős változása, valamint az elektronikus számítástechnika széles elterjedése folytán ez évben megindulhatott az előző kiadások során a hazai műszaki olvasótáborban közismertté és kedveltté vált könyvsorozatunk alaposabb felfrissítésének és korszerűsítésének több éves periódusa. Ez számos kötetünk kisebb-nagyobb átdolgozásával, egyesek bővítésével, esetleg szűkítésével és néhány, eddig is szorgalmazott új kötet megjelenésével fog megvalósulni Karaink és a Kiadó örömdíjazott támogatásával. Sorozatunk immár közel 2 évtizedes eleven életútja, gazdag oktatási és kutatási tapasztalataink, az olvasók és az illetékesek ügypártolása kellemsé teszi számunkra ezt a nagy munkát.

Lectori salutem!

Budapest, 1971. május 15.

Dr. Fazekas Ferenc

ELŐSZÓ A KÖTET ELSŐ KIADÁSÁHOZ

Az anyag, amelyet e könyv tárgyal, fontosságához képest viszonylag kis súllyal szerepel műegyetemi oktatásunkban. A gyakorlat által felvetett problémák nagy részét ugyanis nem tudjuk zárt alakban megoldani; helyett legtöbbszor csak közelítő megoldásokat adhatunk, amikor is a sorozatok és sorok legkiterjedtebben alkalmazott segédeszközeink. Hozzá kell tennünk ehhez azt is, hogy e tárgykörből magyar nyelvű példatár nincs. A példatár összeállításánál ezért szem előtt kellett tartani, hogy a Természettudományi Kar hallgatói is használják majd. Emellett a gyakorlati szakemberek, mérnökök részéről is érdeklődtek már e kötet iránt. E szempontok magyarázzák a könyv terjedelmét. Meg kell azt is jegyeznünk, hogy a sorozat további kötetei, így különösen a közönséges és parciális differenciálegyenletekkel és a speciális függvényekkel foglalkozó kötetek is komoly sorelméleti igényeket támasztanak.

Nehéz feladatot jelentett (és bizonyára nem sikerült kifogástalanul) a hatalmas példanyag legmegfelelőbb rendezése.

Meg kell jegyeznünk, hogy az anyag elrendezésekor abból a feltevésből indulunk ki, hogy az olvasó az egyes feladatok kidolgozásában gyakran visszalapoz a paragrafus elején található elméleti összefoglalókhoz, illetve a kidolgozott mintapéldákhoz. Erre ennél a kötetnél azért is szükség van, mert a feladatok kidolgozása e tárgykörben tipizálható a legnehezebben. Ezért a nehézséget egyrészt az eredménytárban szereplő számos útbaigazítással, másrészt az alkalmazható technika erős részletezésével és a feladatok ennek megfelelő csoportosításával kíséreltük meg áthidalni. Ez utóbbi azonban kettős veszélyt rejt magában. Egyrészt az olvasó összetévesztheti a számítástechnikát szem előtt tartó csoportosítást a tudományos csoportosítással, másrészt elsajátítja ugyan a technikát, de nem szerez önállóságot annak eldöntésében, hogy mikor melyik módszert kell alkalmazni. Ezért egyes paragrafusok bevezetőjében a kérdés feltevésével és az elvi problémák csoportosításával is foglalkoztunk, másrészt „vegyes gyakorló feladatok” stb. címszó alatt több paragrafusban olyan feladatokat is közlünk, ahol az olvasónak magának kell kiválasztania a megoldás módszerét is.

Ehelyütt mondok köszönetet Freud Géának, az MTA Alkalmazott Matematika Intézet osztályvezetőjének, aki a kézirat átnézése folyamán számos megjegyzéssel, tanáccsal, néhány érdekes feladattal, jó néhány egyszerűsítő megoldással és a kézirat igen gondos lektorálásával nagyban emelte a kötet értékét, Fazekas Ferenc főszerkesztőnek, aki a példanyag elrendezésében támogatott, továbbá Szabó István tanárnak és Somogyi Endréné főiskolai hallgatónak, akik a technikai szerkesztésben nyújtottak segítséget. Köszönet illeti Gyurcsy Endre okl. villamosmérnök kartársat a nehéz szemléltető anyag gondos szerkesztéséért és megrajzolásáért.

Budapest, 1954. október 20.

A SZERZŐ

ELŐSZÓ A KÖTET MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

A jelen második kiadás — néhány jelentéktelen módosítástól eltekintve — megegyezik az elsővel. Minthogy a téma súlya kétségtelenül nőtt a műegyetemi tananyagban az utolsó tíz év alatt, ezért bátor vagyok könyvem új kiadását a műszaki olvasók szíves figyelmébe ajánlani.

Budapest, 1965. április 15.

A SZERZŐ

ELŐSZÓ A KÖTET HARMADIK KIADÁSÁHOZ

A most megjelenő harmadik kiadás új anyagrészeket nem tartalmaz; a számítógépek mind szélesebb elterjedése következtében a tárgyalta téma egyes alkalmazási területekről visszaszorult, másoknál viszont rendkívül erősen előtérbe került. A példanyag felfrissítés nélkül is érzékelteti az új alkalmazási területeket, ezért hasznosnak érzem az újabb kiadást.

Budapest, 1971. május 15.

A SZERZŐ

1. §. SZÁMSOROZATOK

a) Intervallum-skatulyázás

Definíció: Egy monoton növekvő $\{x_n\}$ és egy monoton cök'endő $\{y_n\}$ számsorozat intervallum-skatulyázást (jelben: $\{x_n/y_n\}$) határoz meg, ha

1. az $\{x_n\}$ sorozat bármely eleme nem nagyobb, mint az $\{y_n\}$ sorozat ugyanazon indexű eleme, azaz

$$x_k \leq y_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \text{ és}$$

2. a megfelelő (ugyanazon indexű) elemek különbségei, a $\{d_n\}$ sorozat elemei $d_n = y_n - x_n$ 0 sorozatot (zérus határértékű sorozatot) alkotnak, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0.$$

Azt az S számot, amelyet „valamennyi skatulya tartalmaz”, azaz, amely n bármilyen értéke mellett kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

$$x_n \leq S \leq y_n$$

az $\{x_n/y_n\}$ skatulyázás magvának hívjuk. Megjegyezzük, hogy ehhez az S maghoz konvergál az $\{x_n\}$ és az $\{y_n\}$ sorozat is.

Numerikus számítások szempontjából nagy jelentőségű, ha egy sorozat határértékét, mint valamely skatulyázás magvát is elő tudjuk állítani. Megtörténhet ugyanis, hogy e határértéket nem tudjuk pontosan megállapítani (pl. számítástechnikánk még nem megfelelő, vagy esetleg a határérték nem racionális szám, illetve a jól ismert irracionális és transzcendens számok segítségével nem fejezhető ki véges alakban), ezért megelégszünk a határérték valamely jó közelítésével. Feltétlenül meg kell tudnunk azonban becsülni az így elkövetett hiba nagyságát, ami intervallum-skatulyázás esetén igen könnyű. Ha pl. közelítés gyanánt az n -edik skatulyát meghatározó x_n és y_n érték számtani közepét fogadjuk el, akkor a hiba nem lehet nagyobb, mint

$$\frac{|d_n|}{2} = \frac{|y_n - x_n|}{2}.$$

A gyakorlatban persze inkább így hangzik a feladat: Állapítsuk meg az $\{x_n/y_n\}$ intervallum-skatulyázás magvát ε -nál (ε adott!) kisebb hibával. Ekkor úgy járunk el, hogy megállapítjuk azon $n_0(\varepsilon)$ index értékét, amelyre már $|x_{n_0} - y_{n_0}| \leq 2\varepsilon$, és a határértéket az $\frac{x_{n_0} + y_{n_0}}{2}$ értékkel közelítjük.

Példák és feladatok

1. Legyen $0 < x < y$, és $\frac{1}{x_1} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2}$, azaz $x_1 = \frac{2xy}{x+y}$, az x és y számok „harmonikus közepe”; továbbá

$$y_1 = \frac{x+y}{2}; \quad x_2 = \frac{2x_1y_1}{x_1+y_1}; \quad y_2 = \frac{x_1+y_1}{2}; \dots$$

$$x_{n+1} = \frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}; \quad y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}; \dots$$

a) Igazoljuk, hogy az így képzett $\{x_n\}$ és $\{y_n\}$ sorozatok intervallum-skatulyázást definiálnak.

b) Számítsuk ki a skatulyázás magvát.

Megoldás: x_1 az x és y számok ún. harmonikus közepe (amelynek reciproka számtani közepe az x és y reciprokainak); y_1 pedig x és y számtani közepe. Ismeretes tény, hogy a harmonikus és a számtani közép is azon számok közé esik, amelyeknek a közepét képeztük, továbbá a számtani közép nagyobb, mint a harmonikus közép.

Az is ismeretes, hogy a geometriai közép a számtani és a harmonikus közép közé esik; hiszen a geometriai közép egyben geometriai közepe a számtani és a harmonikus középnek is:

$$\sqrt{xy} = \sqrt{\frac{x+y}{2} \cdot \frac{2xy}{x+y}}.$$

Az eddig elmondottakból következik, hogy

$$x < x_1 < y_1 < y.$$

Mivel pedig x_1 és y_1 segítségével éppúgy képezzük x_2 -t és y_2 -t, mint ahogy x és y értékéből x_1 -et és y_1 -et, ebből azonnal következik, hogy

$$x_1 < x_2 < y_2 < y_1.$$

A gondolatmenetet ugyanígy folytatva, s a kapott egyenlőtlenségeket összevonva, kapjuk:

$$x < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots < y_n < \dots < y_3 < y_2 < y_1 < y.$$

Ebből kiolvashatjuk, hogy az $\{x_n\}$ sorozat valóban monoton növekedő, az $\{y_n\}$ sorozat pedig monoton csökkenő, és valamennyi x_k kisebb, mint bármelyik y_l :

$$x_k < y_l \quad (k = 1, 2, \dots, n; \dots; l = 1, 2, \dots; n; \dots).$$

Könnyen megy annak igazolása, hogy a $\{d_n = y_n - x_n\}$ differencia-sorozat nullsorozat.

Ehhez csak azt kell meggondolni, hogy y_{n+1} felezi x_n és y_n „távolságát” a számegegyenesen, számtani közép lévén; x_{n+1} viszont bizonyosan x_n és y_{n+1} közé esik, hiszen $x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n$. Ebből viszont azonnal következik, hogy

$$d_{n+1} = (y_{n+1} - x_{n+1}) < \frac{d_n}{2}. \text{ Ugyanis}$$

$$d_{n+1} = y_{n+1} - x_{n+1} < y_{n+1} - x_n = \frac{x_n + y_n}{2} - x_n = \frac{y_n - x_n}{2} = \frac{d_n}{2}.$$

Mivel az utóbbi reláció n minden értékére igaz, ebből a következőket olvashatjuk ki:

$$d_n < \frac{d_{n-1}}{2} < \frac{d_{n-2}}{2^2} < \dots < \frac{d_2}{2^{n-2}} < \frac{d_1}{2^{n-1}} < \frac{y-x}{2^n}.$$

Mivel pedig az $\left\{ \frac{y-x}{2^n} \right\}$ sorozat nullsorozat, még inkább az a nála kisebb (abszolút értékű) elemekből álló $\{d_n\}$ sorozat is.

Az eddigiekben bebizonyítottuk, hogy a megadott $\{x_n\}$ és $\{y_n\}$ sorozatok eleget tesznek mindazon feltételeknek, amelyeket az intervallum-skatulyázásban szereplő sorozatoknak teljesíteniök kell.

Kimutatjuk még, hogy az intervallum-skatulyázás magva az x és y számok geometriai közepe.

Az eddigiekben kimutattuk ugyanis, hogy az x és y számok geometriai közepe egyben x_1 és y_1 — ennek következtében egyszersmind x_2 -é és y_2 -é stb. — geometriai közepe is; tudjuk ezenkívül, hogy két szám geometriai közepe a két szám közé esik.

$$\text{Jelemben: } x_n < \sqrt{x_n y_n} = \sqrt{x_{n-1} y_{n-1}} = \sqrt{x_{n-2} y_{n-2}} = \dots = \sqrt{xy} < y_n.$$

A \sqrt{xy} érték tehát valóban kisebb bármely y_1 elemnél, de nagyobb az x_k -k bármelyikénél, így valóban a skatulyázás magva!

2. Határozzuk meg az előző feladat gondolatmenete alapján — kizárólag „racionális” műveleteket végezve — $\sqrt{15}$ értékét öt tizedesjegy pontossággig!

3. Igazoljuk, hogy az

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}; \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}.$$

sorozatok intervallum-skatulyázást definiálnak, és határozzuk meg $x_0 = 3$; $y_0 = 7$ esetén a skatulyázás magvát két tizedesjegy pontossággal.

4. Igazoljuk, hogy az

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}; \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + y_n)$$

sorozatok intervallum-skatulyázást definiálnak.

Számítsuk ki három tizedesjegyre a skatulyázás magvát, ha $x_0 = 3$; $y_0 = 10$.

5. Mutassuk meg, hogy az

$$a_n \equiv 1 \ (n = 1, 2, \dots); \quad b_1 = b_1 > 1; \quad b_2 = \left(b_1 + \frac{1}{b_1}\right) \frac{1}{2}; \dots; \quad b_n = \frac{b_{n-1} + \frac{1}{b_{n-1}}}{2}; \dots$$

sorozatok intervallum-skatulyázást alkotnak, és határozzuk meg a skatulyázás magvát!

Megoldás: Az $\{a_n\}$ sorozat valóban monoton növekedő (ti. tágabb értelemben a nem csökkenő monoton sorozatot is monoton növekedőnek nevezzük). Tegyük fel, hogy a $b_n \geq 1$ relációt sikerült igazolnunk. Ebből azonnal következik, hogy b_{n+1} nem nagyobb, mint b_n (hiszen b_{n+1} az egynél nem kisebb b_n és az egynél nem nagyobb $\frac{1}{b_n}$ számtani közepe, s így a két szám nagyobbikánál bizonyosan kisebb).

A $b_n \geq 1$ relációt az 1. feladatban igazolt azon egyenlőtlenség alapján bizonyíthatjuk be, amely szerint két pozitív szám geometriai közepe nem nagyobb, mint a számtani közepe. Tehát

$$b_n = \frac{b_{n-1} + \frac{1}{b_{n-1}}}{2} \geq \sqrt{b_{n-1} \cdot \frac{1}{b_{n-1}}} = \sqrt{1} = 1.$$

Igazolnunk kell még, hogy az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok különbségsorozata 0 sorozat. Ehhez felhasználhatjuk az imént igazolt

$$b_n \geq 1, \text{ azaz } \frac{1}{b_n} \leq 1 \text{ relációt. Ugyanis}$$

$$\begin{aligned} d_n = b_n - a_n &= \frac{1}{2} \left(b_{n-1} + \frac{1}{b_{n-1}} \right) - 1 \leq \frac{1}{2} (b_{n-1} + 1) - 1 = \\ &= \frac{1}{2} (b_{n-1} - 2 + 1) = \frac{1}{2} (b_{n-1} - 1) = \frac{d_{n-1}}{2}. \end{aligned}$$

Ezek után könnyen igazolhatjuk, hogy $d_n \rightarrow 0$, és hogy a skatulyázás magva: 1.

6. Igazoljuk intervallum-skatulyázással, hogy az $a^x = b$ egyenletnek $a > 0$, $b > 0$, de $a \neq 1$ esetén mindig van valós megoldása.

7. Számítsuk ki ennek alapján az

a) $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

b) $4,7^{\sqrt{10}}$

c) $3^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

értékét két tizedesjegynyi pontossággal.

b) Elemi sorozatok határértékének számítástechnikája

a) Algebrai átalakítások, illetve egyszerű tételek felhasználása

Nagyon gyakran előfordul, hogy a tekintett számsorozat egyszerű algebrai műveletek, átalakítások, átrendezések útján olyan sorozatokra vezethető vissza, amelyek határértéke ismeretes. Hogy az eredeti számsorozat határértékét számíthassuk, épp azokat a tételeket kell ismernünk, amelyek kimondják, hogy mi a kapcsolat a határértékek között. E tételeket foglaljuk itt röviden össze, hogy azután a feladatok kapcsán alkalmazásukat is begyakoroljuk.

Az $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sorozat legyen konvergens, határértékét jelöljük a -val; ugyanígy a konvergens $\{b_n\}$ sorozatét b -vel. Konvergensek ekkor a következő sorozatok is:

$$c_1 = a_1 + b_1; c_2 = a_2 + b_2; \dots; c_n = a_n + b_n; \dots$$

$$d_1 = a_1 - b_1; d_2 = a_2 - b_2; \dots; d_n = a_n - b_n; \dots$$

$$m_1 = a_1 \cdot b_1; m_2 = a_2 \cdot b_2; \dots; m_n = a_n \cdot b_n; \dots$$

és, ha $b \neq 0$, akkor a $q_1 = \frac{a_1}{b_1}; q_2 = \frac{a_2}{b_2}; \dots; q_n = \frac{a_n}{b_n}; \dots$

sorozat is (utóbbiban természetesen csak olyan n indexnél értelmezzük fenti módon az új sorozat elemét, amelynél $b_n \neq 0$), és határértékükre a következő igen egyszerű állítások érvényesek:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a + b; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = a - b; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_n = a \cdot b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{a}{b}.$$

Igaz továbbá az az általánosabb tétel is, hogy — ha az $f(x)$ függvény folytonos az $x = a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ helyen, akkor — a konvergens $\{a_n\}$ sorozat segítségével képezett

$$\{b_n\} = \{f(a_n)\}$$

sorozat is konvergens, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = f(a).$$

Ha egy konvergens $\{a_n\}$ sorozatból kiválasztunk egy ún. részsorozatot oly módon, hogy:

1. megadjuk a természetes számok egy monoton növekedő $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$ sorozatát, és

2. az $\{a_n\}$ sorozat helyett az $a_{n_1}; a_{n_2}; a_{n_3}; \dots; a_{n_k}; \dots$ sorozatot tekintjük, akkor az így kapott részsorozat is konvergens, és határértéke egyenlő az eredeti sorozatával.

Átrendezett sorozatot kapunk az eredeti sorozatból, ha:

1. Megadjuk a természetes számok egy tetszőleges sorozatát: $i_1; i_2; i_3; i_4; \dots; i_n; \dots$ (amelyben azonban egymással egyenlő elemek általában nem fordulhatnak elő, és minden természetes szám egyszer szerepel), majd:

2. Az új sorozat első elemének tekintjük az eredeti sorozat i_1 -edik, második elemének a régi sorozat i_2 -edik stb. elemét.

Az átrendezett

$$a_{i_1}; a_{i_2}; a_{i_3}; \dots; a_{i_n}; \dots$$

sorozat is konvergens, és határértéke megegyezik az eredeti soréval.

E két legutóbbi állítás bizonyítása nagyon egyszerű; a konvergenciára adott definíciót kell csak felhasználni, és a második tétel esetében utánagondolni, hogy bármely k természetes számhoz megadható egy olyan $N(k)$ index, hogy az első k darab természetes szám mindegyike előforduljon az $i_1, i_2, i_3, \dots, i_N$ természetes számok között.

β) Konvergencia és határérték vizsgálata függvény-tani segédeszközökkel

Sorozatokkal kapcsolatos feladatoknál gyakran meg-esik, hogy az általános, az n -edik elem, a_n explicite is megadott mint n függvénye. Ez esetben a konvergencia vizsgálatát és a határérték megállapításának kérdését gyakran vissza tudjuk vezetni függvények folytonosságának, illetve határértékének vizsgálatára. Ez utóbbi feladat viszont sokszor könnyen végrehajtható, elsősorban azért, mert rendelkezésünkre áll a *Bernoulli—L'Hospital*-féle tétel.

Tegyük tehát fel, hogy a_n mint n függvénye van adva : $a_n = f(n)$. Ekkor :

1. Ha az $f(x)$ függvénynek van $x \rightarrow \infty$ esetén (illetve az $f\left(\frac{1}{x}\right)$ függvénynek $x \rightarrow 0$ esetén) határértéke, akkor az $\{a_n\}$ sorozat is konvergens, és határértéke egyenlő a függvényével.

2. Ha $f(x)$ [illetve $f\left(\frac{1}{x}\right)$] határozottan divergál, amikor $x \rightarrow \infty$ (illetve $x \rightarrow 0$), akkor határozottan divergens az $\{a_n\}$ sorozat is.

3. Ha $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ [illetve $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right)$] nem létezik, ebből még nem következik, hogy az $\{a_n\}$ sorozat divergens. Ilyen esetekben tehát az itt javasolt módszer érdemileg nem használható!

γ) Határérték számítása egyenletmegoldással

A sorozatok egy másik típusánál az n -edik elem az $(n-1)$ -edik, az $(n-2)$ -edik, ..., $(n-s)$ -edik elem, és bizonyos számú állandó segítségével van kifejezve — ahogy mondani szokták — rekurziós képlettel. Amennyiben a rekurziós képlet n -től, azaz az indextől nem függ explicite, igen egyszerű módon számítható bizonyos esetekben a sorozat határértéke. A sorozat konvergens voltáról azonban e módszer általában nem ad felvilágosítást, először tehát valamilyen módszerrel arról kell meggyőződünk, hogy a sorozat konvergens-e. Tegyük fel tehát, hogy az $\{x_n\}$ sorozat n -edik elemét a következő rekurziós képlet szolgáltatja:

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-s}),$$

ahol s rögzített számot jelent, f pedig nem függ (explicite) n -től. A $z = f(z, z, \dots, z)$ egyenlet megoldásait jelöljük rendre z_1, z_2, \dots -vel. A (konvergensnek feltételezett) $\{x_n\}$ sorozat x határértéke egyenlő a z_1, z_2, \dots számok egyikével. (Hogy melyikkel, az a rekurziós képlet által meg nem határozott x_1, x_2, \dots, x_s elemek választásától is függ.)

δ) További, az ismert elemi sorozatok segítségével vizsgálható sorozatok

Ugyanolyan típusú vizsgálatokról lesz szó, mint az $\alpha)$ részben, csak hogy azokat a sorozatokat is felhasználjuk, amelyekkel a $\beta)$, illetve $\gamma)$ részben ismerkedtünk meg.

Példák és feladatok

- α | 1. Igazoljuk, hogy ha $a_1; a_2; \dots; a_n; \dots$ 0 sorozat, akkor
- a) bármely részsorozata: a_{i_1}, a_{i_2}, \dots is 0 sorozat;
 - b) tetszés szerinti átrendezéssel: a_{j_1}, a_{j_2}, \dots is 0 sorozathoz jutunk;
 - c) ha véges számú elemét megváltoztatjuk, az új $a'_1; a'_2; a'_3; \dots$ sorozat ismét 0 sorozat;
 - d) ha található olyan $n = n_0$ index valamely adott $\{b_n\}$ sorozattal kapcsolatban, hogy $b_n \leq |a_n|$, hacsak $n \geq n_0$, akkor $\{b_n\}$ is 0 sorozat $\{a_n\}$ -nel együtt.

2. Legyen $b > 1$, illetve $0 < b < 1$. Igazoljuk, hogy

$$\{a_n = \sqrt[n]{b} - 1\}$$

0 sorozat.

Megoldás: Ha $b > 1$, akkor $\sqrt[n]{b}$ -t írjuk így fel:

$$\sqrt[n]{b} = 1 + x_n.$$

Mivel $\sqrt[n]{b} > 1$, azért $0 < x_n$; alkalmazhatjuk tehát az (I. pl. Szász Pál: Differenciál- és integrálszámítás I. 62. o. vagy Knopp: Unendliche Reihen 16. o.) ismert Bernoulli-egyenlőtlenséget:

$$b = (\sqrt[n]{b})^n = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n,$$

tehát $x_n \leq \frac{b-1}{n}$. De $a_n = \sqrt[n]{b} - 1 = 1 + x_n - 1 = x_n$,

így $0 < a_n \leq \frac{b-1}{n} \rightarrow 0$, q. e. d.

Ha viszont $0 < b < 1$, akkor $\frac{1}{b} > 1$, tehát az előző gondolatmenet alapján:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = 1 + x_n; \quad \frac{1}{b} = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n;$$

$$a_n = \sqrt[n]{b} - 1 = \frac{1}{1 + x_n} - 1 = -\frac{x_n}{1 + x_n}; \quad 0 < x_n \leq \frac{\frac{1}{b} - 1}{n};$$

tehát

$$0 < |a_n| \leq \frac{\frac{1}{b} - 1}{n(1 + x_n)} < \frac{\frac{1}{b} - 1}{n} \rightarrow 0, \quad \text{q. e. d.}$$

3. Legyen $\{x_n\}$ egy 0 sorozat és $a > 0$. Igazoljuk, hogy az

$$y_1 = a^{x_1} - 1; y_2 = a^{x_2} - 1; \dots; y_n = a^{x_n} - 1; \dots$$

szintén 0 sorozat.

4. Legyen $|a| < 1$. Igazoljuk, hogy $a^n \rightarrow 0$.
 5. Legyen $|a| < 1$. Igazoljuk, hogy $na^n \rightarrow 0$.

Megoldás: Írjuk fel $|a|$ -t így:

$$|a| = \frac{1}{1+x}; \quad (x > 0).$$

Ezzel

$$|a|^n = |a^n| = \frac{1}{(1+x)^n} < \frac{1}{1+nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2},$$

hiszen

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots > \\ > 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 > \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

$$|a^n| < \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}x^2}; \quad 0 < |na^n| < \frac{2n}{n(n-1)x^2} = \frac{2}{(n-1)x^2} \rightarrow 0, \quad \text{q. e. d.}$$

6. Legyen $|a| < 1$; α tetszős szerinti valós szám. Igazoljuk, hogy $n^\alpha a^n$ is 0 sorozat.
 7. Legyen $b > 1$; $\beta > 0$. Igazoljuk, hogy az $\left\{y_n = \frac{b^{\log n}}{n^\beta}\right\}$ sorozat 0 sorozat.

Megoldás: A 7. feladatot a következőkben egyszerűen visszavezetjük a 6. feladatra:

Tekintettel arra, hogy $b > 1$; $\beta > 0$, következik, hogy

$$b^\beta > 1; \quad 0 < \frac{1}{b^\beta} = c < 1.$$

Ebből pedig az 1. § b) α) 6. feladatban igazolt tétel alapján azonnal következik, hogy nc^n 0 sorozat, s így, bármilyen kicsiny számot jelentsen is $\varepsilon > 0$, az nc^n sorozat elemei — valamilyen $n_0(\varepsilon)$ indextől kezdve — mindannyian kisebbek ennél az ε -nél:

$$nc^n = \frac{n}{(b^\beta)^n} < c, \quad \text{ha } n \geq n_0(\varepsilon).$$

Jelöljük $b^{\log n}$ karakterisztikáját k -val; ekkor $k \leq b^{\log n} < k+1$, $b^k \leq n < b^{k+1}$. Ezekkel az értékekkel:

$$\frac{b^{\log n}}{n^\beta} < \frac{k+1}{n^\beta} \leq \frac{k+1}{(b^k)^\beta} = \frac{k+1}{(b^\beta)^k} = b^\beta \cdot \frac{k+1}{(b^\beta)^{k+1}}.$$

Ha tehát n -et már úgy választom, hogy $n > n_1 = b^{n_0(\varepsilon)}$,

akkor az előző egyenlet szerint $\frac{b \log n}{n^\beta} < b^\beta \frac{k+1}{(b^\beta)^{k+1}} < b^\beta \varepsilon = \varepsilon'$.

Mivel pedig b^β bizonyosan korlátos, ε -t meg tudjuk választani úgy, hogy $\varepsilon' = b^\beta \cdot \varepsilon$ tetszés szerintien kicsiny legyen; de akkor

$$\frac{b \log n}{n^\beta} < \varepsilon', \text{ ha } n > n_1 = b^{n_0(\varepsilon)}; \text{ q. e. d.}$$

8. Legyen $b > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Igazoljuk, hogy

$$y_n = \frac{(b \log n)^\alpha}{n^\beta} \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

9. Igazoljuk, hogy

$$\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) \rightarrow 0,$$

vagy másképp $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, ha $n \rightarrow \infty$.

10. Legyen $\{x_n\}$ olyan 0 sorozat, amelynek minden eleme nagyobb, mint -1 ($x_n > -1$), továbbá $k > 1$; $l > 0$; $p > 0$.

Igazoljuk, hogy

$$a) \ a_n = k \log(1 + x_n) \rightarrow 0, \quad b) \ b_n = (\sqrt[l]{1 + x_n} - 1) \rightarrow 0,$$

$$c) \ c_n = (p^{x_n} - 1) \rightarrow 0.$$

11. Igazoljuk, hogy $x_n = \sqrt{n(n+1)} - (\sqrt{n})^2 \rightarrow \frac{1}{2}$.

Megoldás: $x_n = \sqrt{n(n+1)} - n$ ugyanis így is írható:

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \\ &= \frac{\sqrt{n} \cdot 1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \rightarrow \frac{1}{2}, \text{ q. e. d.} \end{aligned}$$

12. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt[n]{n + \frac{1}{n}} - \sqrt[n]{n} \rightarrow 0.$$

13. Igazoljuk, hogy ha $a_n \rightarrow a$, és $b_n \rightarrow a$, s egy harmadik sorozatunk van, amelynek bármelyik elemére teljesül a következő egyenlőtlenség: $a_n \leq c_n \leq b_n$; akkor $c_n \rightarrow a$.

14. Mutassuk ki, hogy az

$$\{x_n = \sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1}\}$$

sorozat nullsorozat!

15. Legyen α tetszés szerinti valós, β pozitív szám. Igazoljuk, hogy az

$$\left\{ y_n = \frac{(\ln \ln n)^\alpha}{\ln^\beta n} \right\}$$

sorozat 0 sorozat!

16. Mutassuk ki, hogy

$$a) \quad n(\sqrt{n^4 + 4} - n^2) \rightarrow 0. \quad b) \quad n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n^4 - 4} - n^2) \rightarrow 0.$$

$$c) \quad n^2(\sqrt{n^4 - 4} - n^2) \rightarrow 2.$$

17. Mutassuk meg, hogy

$$a) \text{ -az } \left\{ a_n = \sqrt{1 + \frac{a}{n^2}} - \left(1 + \frac{a}{2n^2}\right) \right\}, \text{ sőt } b) \left\{ b_n = n \left[\sqrt{1 + \frac{a}{n^2}} - \left(1 + \frac{a}{2n^2}\right) \right] \right\}$$

sorozat is 0 sorozat!

18. Igazoljuk, hogy az

$$a) \left\{ a_n = \sqrt[3]{1 + \frac{a}{n^3}} - \left(1 + \frac{a}{3n^3}\right) \right\} \text{ és } b) \left\{ b_n = na_n = n \left[\sqrt[3]{1 + \frac{a}{n^3}} - \left(1 + \frac{a}{3n^3}\right) \right] \right\}$$

sorozatok is 0 sorozatok.

19. Igazoljuk, hogy az

$$a_1 = (\ln 2 - 1); \quad a_2 = 2 \left[\ln \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \right]; \quad \dots; \quad a_n = n \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right]; \quad \dots$$

sorozat monoton növekvő 0 sorozat.

Megoldás: a_n így is írható:

$$n \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right] = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = \ln \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] - 1.$$

Tudjuk, hogy az $\ln x$ függvény monoton növekedő, továbbá, hogy az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

sorozat monoton növekedő módon tart e -hez, ha $n \rightarrow \infty^*$, maga az $\left\{ \ln \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] \right\}$

sorozat tehát ezalatt (tekintettel arra, hogy $\ln x$ az $x = e$ hely környezetében folytonos) monoton növekedően az 1-hez tart.

Felhasználva azt a tételt, mely szerint egy többtagú kifejezés határértékét a tagok összege adja, írhatjuk:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] - 1 = 1 - 1 = 0, \quad \text{q. e. d.}$$

* L. pl. az A. II. kötet 10. §-át, v. Knopp: Unendliche Reihen 77. o.

20. Igazoljuk, hogy a

$$b_n = \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

sorozat 0 sorozat.

β 1. Határozzuk meg az

$$\{a_n = n(e^{\frac{1}{n}} - 1)\}$$

sorozat határértékét.

2. Mi a határértéke az

$$\left\{ a_n = \frac{1}{n} \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{n} \right\}$$

sorozatnak?

3. Mi a határértéke az

$$\{a_n = n(\sqrt[n]{a} - 1)\}$$

sorozatnak? ($a > 0$.)

Megoldás: n helyébe x -et írva: $f(x) = x[\sqrt[x]{a} - 1]$.

Hogy a Bernoulli-L'Hospital-szabályt használhassuk, $f(x)$ -et kissé át kell alakítanunk:

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x} \ln a} - 1}{\frac{1}{x}}. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \ln a e^{\frac{1}{x} \ln a}}{-\frac{1}{x^2}} = 1 \cdot \ln a.$$

Az
$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x} \ln a} - 1}{\frac{1}{x}} = x(\sqrt[x]{a} - 1)$$

függvénynek tehát van határértéke $x \rightarrow \infty$ esetben.

A bevezetésben említett tételek értelmében a csak egész számú értékeken át változó „függvény”-nek, a_n -nek így szintén van, és ugyanaz a határértéke:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a.$$

Megjegyezzük, hogy az $n(\sqrt[n]{a} - 1) = b_n$ helyettesítésével: $a = \left(1 + \frac{b_n}{n}\right)^n$.

Az A. II. kötet 10. § 51. feladatában azonban kimutattuk, hogy a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ jelöléssel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b_n}{n}\right)^n = e^b.$$

Ha most akár azt igazoljuk, hogy az előbb definiált $\{b_n\}$ sorozat (amely azonos a feladatban szereplő $\{a_n\}$ sorozattal) egyáltalán konvergens, akár pedig azt, hogy az előbbi tétel megfordítható, azaz a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b_n}{n}\right)^n = e^b$$

relációból következik az, hogy a $\{b_n\}$ sorozat konvergens, és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, mindkét esetben így zárhatjuk vizsgálatainkat:

$$a = \left(1 + \frac{b_n}{n}\right)^n; \quad a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b_n}{n}\right)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n};$$

ugyanekkor $a = e^{\ln a}$, tehát $\ln a = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1)$, s így a feladatot ezzel a módszerrel is igazoltuk.

4. A $\{b_n\}$ sorozat pozitív elemű, konvergens, határértéke: $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$. Konvergens-e az

$$\{x_n = n(\sqrt[n]{b_n} - 1)\}$$

sorozat, s ha igen, mi a határértéke? Megfordítható-e ez a reláció, azaz az $\{x_n\}$ sorozat konvergenciájából következik-e a $\{b_n\}$ -é?

5. Mutassuk ki, hogy

$$\sqrt[n]{n} \rightarrow 1.$$

6. Igazoljuk, hogy az

$$a) \left\{a_n = \sin \frac{a}{n^2} - \frac{a}{n^2}\right\} \quad b) \left\{b_n = n \left(\sin \frac{a}{n^2} - \frac{a}{n^2}\right)\right\}$$

sorozatok 0 sorozatok.

7. Mutassuk ki, hogy az

$$\left\{a_n = \ln \cos \frac{a}{n} + \frac{a^2}{2n^2}\right\} \quad \text{és a} \quad \left\{b_n = n^2 a_n = n^2 \left(\ln \cos \frac{a}{n} + \frac{a^2}{2n^2}\right)\right\}$$

sorozatok is 0 sorozatok.

8. Mutassuk ki, hogy a

$$\left\{c_n = n \left(\sin \frac{a}{n} - \frac{a}{n}\right)\right\}$$

sorozat 0 sorozat.

9. Határozzuk meg az

$$\left\{a_n = \left(\cos \frac{y}{n} + \lambda \sin \frac{y}{n}\right)^n\right\}$$

sorozat határértékét.

10. Konvergencia-e a

$$b_1 = \cos x; \quad b_2 = \cos^2 \frac{x}{\sqrt{2}}; \dots; \quad b_n = \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}; \dots$$

sorozat, és mi a határértéke?

γ 1. Az 1. § b) $\gamma)$ bevezetésében kimondott tétellel kapcsolatban gyakran igen nehéz eldönteni, hogy a szóban forgó sorozat konvergencia-e, viszont annál könnyebb annak a megállapítása, hogy a kérdéses egyenletnek vannak-e megoldásai. Ezért sok esetben nagyon jól használható a következő tétel: Az $x = f(x)$ egyenletnek legyen x_0 az egyik megoldása, x_1 pedig az x_0 egy jó közelítő értéke (amit pl. grafikus szerkesztéssel állapíthatunk meg). Legyen $f(x)$ az x_0 hely egy megfelelő környezetében differenciálható, és teljesüljön az

$$|f'(x)| \leq q < 1$$

reláció az $x_1 - \frac{|x_2 - x_1|}{1 - q} \leq x \leq x_1 + \frac{|x_2 - x_1|}{1 - q}$ intervallumban.

Igazoljuk, hogy ekkor az

$$x_2 = f(x_1); \quad x_3 = f(x_2); \dots; \quad x_n = f(x_{n-1}); \dots$$

sorozat konvergál, és pedig (ha az $x_1 - \frac{|x_2 - x_1|}{1 - q} \leq x \leq x_1 + \frac{|x_2 - x_1|}{1 - q}$ intervallumban az $f(x) = x$ egyenletnek x_0 az egyetlen gyöke) az x_0 értékhez.*

Megoldás: Ha az $\{x_n\}$ sorozat konvergens, konvergál a $\left\{ \sum_{k=2}^n (x_k - x_{k-1}) \right\}$ sorozat is és viszont. A Cauchy-kritérium szerint ez utóbbi sorozat akkor és csakis akkor konvergál, ha bármely $\varepsilon > 0$ mennyiséghez megadható az $n_0 = n_0(\varepsilon)$ index úgy, hogy S bármely értékére fennálljon a

$$\left| \sum_{k=2}^{n+S} (x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=2}^n (x_k - x_{k-1}) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+S} (x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség, ha már $n \geq n_0(\varepsilon)$. Mi azt igazoljuk, hogy még az

$$\varepsilon > \sum_{k=n+1}^{n+S} |x_k - x_{k-1}| \geq \left| \sum_{k=n+1}^{n+S} (x_k - x_{k-1}) \right|; \quad (n \geq n_0)$$

egyenlőtlenség is fennáll, ha n_0 -t megfelelően választjuk. Ugyanis

$$|x_3 - x_2| = |f(x_2) - f(x_1)| = |(x_2 - x_1) f'(\xi)| \leq q |x_2 - x_1|$$

a középértéktétel szerint, minthogy ξ , amely x_2 és x_1 között van, még biztosan benne van az $\left[x_1 - \frac{|x_2 - x_1|}{1 - q}; x_1 + \frac{|x_2 - x_1|}{1 - q} \right]$ intervallumban. De akkor x_3 is benne

* Vázlatosan I. pl. Szentmártony T.: Felsőbb mennyiségtan, 337. o.

van még az $\left[x_1 - \frac{|x_2 - x_1|}{1 - q}; x_1 + \frac{|x_2 - x_1|}{1 - q} \right]$ intervallumban, minthogy

$$|x_3 - x_1| \leq |x_3 - x_2| + |x_2 - x_1| \leq (q + 1) |x_2 - x_1| < \frac{1}{1 - q} |x_2 - x_1|.$$

$$|x_4 - x_3| \leq |f(x_3) - f(x_2)| \leq |(x_3 - x_2) f'(\xi_1)| \leq q |x_3 - x_2| \leq q^2 |x_2 - x_1|,$$

minthogy ξ_1 az x_3 és x_2 között lévén, biztosan benne van még az $x_1 - \frac{|x_2 - x_1|}{1 - q} \leq$

$\leq x \leq x_1 + \frac{|x_2 - x_1|}{1 - q}$ intervallumban. De akkor x_4 is benne van, minthogy

$$|x_4 - x_1| \leq |x_4 - x_3| + |x_3 - x_2| + |x_2 - x_1| \leq (1 + q + q^2) |x_2 - x_1| \leq$$

$$\leq \frac{|x_2 - x_1|}{1 - q}. \text{ Így folytatva az okoskodást, azt kapjuk, hogy}$$

$$|x_{k+1} - x_k| \leq q^{k+1} |x_2 - x_1|,$$

és még x_{k+1} is benne van a kérdéses intervallumban. Ezért

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+S} |x_k - x_{k-1}| &\leq \left[\frac{1 - q^{n+S-1}}{1 - q} - \frac{1 - q^n}{1 - q} \right] |x_2 - x_1| = \\ &= q^n \frac{(1 - q^{S-1})}{1 - q} |x_2 - x_1| \leq q^n \frac{|x_2 - x_1|}{1 - q}, \end{aligned}$$

tehát az

$$n_0(\varepsilon) = n_0 \geq q \log \frac{\varepsilon \cdot (1 - q)}{|x_2 - x_1|}$$

választás már megfelelő.

2. Határozzuk meg az

$$y_1 = \sqrt{2}; \quad y_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}; \quad y_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}; \dots; \quad y_n = \sqrt{2 + y_{n-1}}; \dots$$

sorozat határértékét.

Megoldás: A sorozat korlátos voltát teljes indukcióval igazolhatjuk. Tegyük fel ugyanis, hogy $y_k < 2$; ekkor

$$y_{k+1} = \sqrt{2 + y_k} < \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2,$$

tehát az $y_{k+1} < 2$ reláció is teljesül. Mivel $y_1 < 2$, ebből következik, hogy

$$y_n < 2 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

A sorozatnak tehát egyik (felső) korlátja 2. Mivel pedig a négyzetgyökök pozitív értékét vesszük figyelembe, egyik (alsó) korlát a 0.

Az $y_n < 2$ relációból következik, hogy $\{y_n\}$ monoton növekvő sorozat. Ugyanis:

$$y_{k+1} = \sqrt{2 + y_k} > \sqrt{y_k + y_k} = \sqrt{2 \cdot y_k} > \sqrt{y_k \cdot y_k} = y_k.$$

Mivel az $\{y_n\}$ sorozat felülről korlátos, és monoton növekedő, bizonyosan konvergens. Határértékét megkapjuk tehát, ha az $y = \sqrt{2+y}$ egyenletet megoldjuk.

$$y = \frac{1 \pm 3}{2}; \quad y = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}.$$

A két gyök közül csak a pozitív $y = 2$ lehet a sorozat határértéke, miután a sorozat egyik alsó korlátja a 0 volt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 2.$$

3. Egy sorozat n -edik elemét az $n-1$ -edik segítségével így számíthatjuk ki:

$$x_n = a + x_{n-1}^2.$$

a milyen értékei mellett konvergens a sorozat, és mi a határértéke, ha $x_0 = 0$?

4. Egy sorozat elemeit a következő módon képezhetjük:

$$x_1 = 4x_0(1-x_0); \quad x_2 = 4x_1(1-x_1); \quad \dots; \quad x_n = 4x_{n-1}(1-x_{n-1}); \quad \dots$$

A $[0,1]$ zárt intervallumból választva x_0 értékét, mely x_0 értékekre lesz konvergens a sorozat, és mi lesz a határértéke?

5. Legyen

$$x_n = \frac{a}{1+x_{n-1}}; \quad x_0 = 0.$$

a milyen értékeinél konvergens a sorozat, és mi a határértéke?

6. Legyen

$$x_n = \sqrt{a+x_{n-1}}; \quad x_0 = 0.$$

a milyen értékeinél konvergens a sorozat, és mi a határértéke?

7. Legyen

$$x_n = x_0^{x_{n-1}}.$$

x_0 milyen értékeinél konvergens a sorozat; határozzuk meg $x_0 = 2$, illetve $x_0 = 1,3$ esetben a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ értéket 3 tizedesjegy pontossággal.

8. a és q mely értékeinél konvergens az

$$y_1 = \frac{1}{2} \left(q + \frac{a}{q} \right); \quad y_2 = \frac{1}{2} \left(y_1 + \frac{a}{y_1} \right); \quad \dots; \quad y = \frac{1}{2} \left(y_{n-1} + \frac{a}{y_{n-1}} \right); \quad \dots$$

sorozat, és mi a határértéke?

9. a és b milyen értékeinél konvergens, és mi a határértéke az alábbi sorozatnak:

$$x_0 = 0; \quad x_1 = \frac{a+bx_0}{b+ax_0}; \quad x_2 = \frac{a+bx_1}{b+ax_1}; \quad \dots; \quad x_{n+1} = \frac{a+bx_n}{b+ax_n}; \quad \dots$$

10. k és l mely értékei mellett konvergensek a következő sorozatok:

$$a) \quad x_0 = l; \quad x_1 = \frac{k}{1 + x_0}; \dots; \quad x_{n-1} = \frac{k}{1 + x_n}; \dots$$

$$b) \quad y_0 = l; \quad y_1 = \frac{k}{y_0} - 1; \quad y_2 = \frac{k}{y_1} - 1; \dots; \quad y_{n+1} = \frac{k}{y_n} - 1; \dots$$

Adjuk meg a határértéküket is.

11. a_0 milyen értékei mellett konvergens és mi a határértéke az

$$\left\{ a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} \right\}$$

sorozatnak?

12. Mutassuk ki, hogy az

$$\left\{ x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \right\}; \quad x_0 = 1$$

sorozat határértéke \sqrt{a} .

13. Számítsuk ki ennek alapján $\sqrt{10}$ értékét 4 tizedesjegyre.

14. Igazoljuk, hogy az

$$x'_0 = 1; \quad x'_1 = \frac{x'_0(x'^2_0 + 3a)}{3x'^2_0 + a}; \dots; \quad x'_{n+1} = \frac{x'_n(x'^2_n + 3a)}{3x'^2_n + a}; \dots$$

sorozatnak is \sqrt{a} a határértéke, és számítsuk ki ennek alapján is $\sqrt{10}$ -et 4 tizedesjegy pontossággal.

Mutassuk ki, hogy utóbbi sorozat gyorsabban konvergál a \sqrt{a} értékhez, mint az előző feladat sorozata.

15. x mely értékei mellett konvergens az

$$x_1 = \sin x; \quad x_2 = \sin x_1; \dots; \quad x_{n+1} = \sin x_n; \dots$$

sorozat, és mi a határértéke?

16. Határozzuk meg négy értékes jegyre pontosan az

$$x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$$

egyenlet legkisebb pozitív gyökét.

Megoldás: Az x_0 gyökhely egy jó közelítő értékét grafikusán határozhatjuk meg. Könnyen ellenőrizhető, hogy e hely környezetében a

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{2} \right) = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 x) \text{ egynél nagyobb, s így az } x_n = \frac{\operatorname{tg} x_{n-1}}{2}$$

rekurziós formulával adott sorozat konvergenciáját nem tudjuk biztosítani. Viszont az egyenletet átrendezve $2x = \operatorname{tg} x$; $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2x$ módon, a

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2x) = \frac{2}{1+4x^2}$$

differentiálhányados a gyökhely környezetében 1-nél kisebb, tehát valószínűleg alkalmazható az 1. § b) γ) 1. feladatban. igazolt tétel. Ennek részletes vizsgálatát és a közelítő értékek kiszámítását az olvasóra bizzuk. A hibabecslésre alkalmas a következő, az 1. § b) γ) 1. feladatának kidolgozása alapján közvetlenül érthető formula:

$$\begin{aligned} \left| \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - x_k \right| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{z=k+1}^n (x_z - x_{z-1}) \right| \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{z=k+1}^n |x_z - x_{z-1}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{z=k+1}^n q^{z-2} |x_2 - x_1| = q^{k-1} \frac{|x_2 - x_1|}{1-q}. \end{aligned}$$

17. Határozzuk meg az

$$x = 2 \sin x$$

egyenlet gyökeit négy értékes számjegyre pontosan.

18. Keressük meg az

$$x = e^x - 2$$

egyenlet két gyökét három értékes számjegyre pontosan.

δ 1. Konvergens-e az

$$x_1 = \frac{a+b}{2}; \quad x_2 = \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \right)^2; \dots; x_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n; \dots$$

sorozat, s ha igen, mi a határértéke? ($a > 0$; $b > 0$.)

Megoldás: A sorozat bizonyos mértékig az $\{n(\sqrt[n]{a} - 1)\}$ sorozatra, másrésztől az $\left\{1 + \frac{b}{n}\right\}$ sorozatra emlékeztet. Meg kell kísérelnünk algebrai átalakításokkal ezek valamilyen kombinációjaként felírni a sorozatot, ezzel mindkét felvetett kérdésre választ tudunk adni.

$$\begin{aligned} x_n &= \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a} - 1 + \sqrt[n]{b} - 1 + 2}{2} \right)^n = \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a} - 1}{2} + \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{2} \right)^n = \\ &= \left[1 + \frac{\frac{1}{2} \{ n(\sqrt[n]{a} - 1) + n(\sqrt[n]{b} - 1) \}}{n} \right]^n \end{aligned}$$

Ebben az alakban már felhasználhatjuk azt az A. II. 10. § 51.-ben megismert tényt, hogy $\left[1 + \frac{C_n}{n}\right]^n \rightarrow e^C$, ha $C_n \rightarrow C$.

Eredeti sorozatunk tehát konvergens, ha a

$$\left\{c_n = \frac{1}{2} \left[n(\sqrt[n]{a} - 1) + n(\sqrt[n]{b} - 1) \right] \right\}$$

sorozat konvergens.

Az 1. § b) β) 3. feladatban igazoltak alapján ez azonnal következik, sőt a $c = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$ értéket is meg tudjuk adni:

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[n(\sqrt[n]{a} - 1) + n(\sqrt[n]{b} - 1) \right] = \frac{1}{2} (\ln a + \ln b) = \ln \sqrt{a \cdot b}.$$

Így tehát: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n = e^{\ln \sqrt{a \cdot b}} = \sqrt{a \cdot b}.$

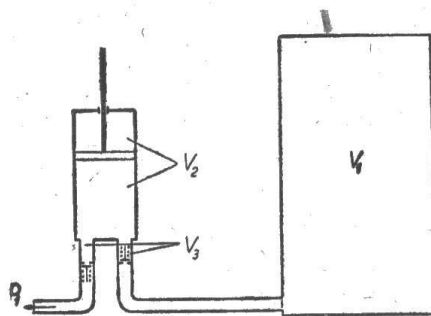
2. Mi a határértéke az

$$x_1 = [1 - 2^{1-p}]; \quad x_2 = 2 \left[1 - \left(1 + \frac{1}{2} \right)^{1-p} \right]; \quad \dots; \quad x_n = n \left[1 - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1-p} \right]; \dots$$

sorozatnak? (p valós szám).

3. Határozzuk meg az $\left\{ a_n = \left(\cos \frac{y}{n} + \lambda \sin \frac{y}{n} \right)^n \right\}$ sorozat határértékét, a következő átalakítást felhasználva:

$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{y}{n} + \lambda \sin \frac{y}{n} \right)^n &= \left(1 + \frac{n \cos \frac{y}{n}}{n} + \frac{n \lambda \sin \frac{y}{n}}{n} - \frac{n}{n} \right)^n = \\ &= \left[1 + \frac{n \left(\cos \frac{y}{n} - 1 \right)}{n} + \frac{\lambda}{n} n \sin \frac{y}{n} \right]^n. \end{aligned}$$



1. ábra

4. Egy dugattyús szivattyú — amelynél a hasznos löketnek és a dugattyú átmérőjének szorzata: a „hasznos térfogat“ V_2 , káros tere V_3 térfogatú — nyomószelepen át p_1 nyomáson tartott edénnyel közlekedik. Szívószelepen át csatlakozik hozzá a V_1 térfogatú, ritkított gázt tartalmazó tartály. Mekkora maximális ritkítást (minimális nyomást) tudunk elérni egyébként ideális körülmények között (tömítések stb.), ha

a) ideálisan adiabatikus viszonyok között dolgozik a szivattyú, és a gáz κ_1 adiabatikus állandójú;

b) ideálisan izotermikus viszonyok között működtetjük a berendezést ($\kappa = 1$);

c) a valóságos állapotnak megfelelő $\kappa_2 < \kappa_1$ politropikus állandót veszünk figyelembe ($1 < \kappa_2 < \kappa_1$; 1. ábra).

Megoldás: Tegyük fel, hogy a szivattyú n munkaperiódus után p_n nyomást létesített a V_1 térben, és a dugattyú épp az alsó holtponthelyzetben van; ekkor a káros térben V_3 térfogatú p_1 nyomású gáz van. Felfelé induló dugattyú esetén mindkét szelep zárva van mindaddig, míg az adiabatikusan kiterjeszkedő V_3 térfogatú és p_1 nyomású gáz el nem éri a p_n nyomást és $V_{3,n}$ térfogatot. A négy mennyiség között az állapotegyenletnek megfelelően ekkor a következő összefüggés:

$$p_1 \cdot V_3^{\kappa_1} = p_n \cdot V_{3,n}^{\kappa_1}. \text{ Ebből: } V_{3,n}^{\kappa_1} = V_3^{\kappa_1} \cdot \frac{p_1}{p_n}; \quad V_{3,n} = V_3 \cdot \sqrt[\kappa_1]{\frac{p_1}{p_n}}.$$

Ekkor nyit a szívószelep, és a p_n nyomású, $V_1 + V_{3,n}$ térfogatú gáz $V_1 + V_2 + V_3$ térfogatúra tágul, miközben nyomása p_{n+1} -re csökken:

$$p_n(V_1 + V_{3,n})^{\kappa_1} = p_{n+1}(V_1 + V_2 + V_3)^{\kappa_1},$$

$$p_n \left(V_1 + V_3 \sqrt[\kappa_1]{\frac{p_1}{p_n}} \right)^{\kappa_1} = p_{n+1}(V_1 + V_2 + V_3)^{\kappa_1},$$

Mindkét oldalon κ_1 -ik gyököt vonva és átrendezve:

$$\sqrt[\kappa_1]{p_{n+1}} = \frac{V_1}{V_1 + V_2 + V_3} \sqrt[\kappa_1]{p_n} + \frac{V_3}{V_1 + V_2 + V_3} \sqrt[\kappa_1]{p_1}.$$

Egyszerűbb írásmód kedvéért vezessük be a következő jelöléseket:

$$\kappa_1 = a \geq 1; \quad \frac{V_1}{V_1 + V_2 + V_3} = A < 1; \quad \frac{V_3}{V_1 + V_2 + V_3} = b \ll 1;$$

$$b \sqrt[\kappa_1]{p_1} = B. \quad \text{Ezzel} \quad \sqrt[\kappa_1]{p_{n+1}} = A \sqrt[\kappa_1]{p_n} + B.$$

Az itt megadott sorozat konvergenciaviszonyai a , A és B értékeitől függenek.

Az eredeti sorozat helyett tekintsük az $x_n = \sqrt[\kappa_1]{p_n}$ sorozatot.

Ekkor:

$$x_{n+1} = Ax_n + B.$$

Utóbbi sorozat vagy monoton csökkenő vagy monoton növekedő, mert $A > 0$ és $B > 0$. Könnyű belátni, hogy $|A| < 1$ esetén monoton csökkenő vagy monoton növekvő módon (x_0 értékétől függően) a $\frac{B}{1-A}$ értékhez konvergál a sorozat, $|A| \geq 1$ esetén viszont divergens.

Ugyanis x_{n+1} egy véges geometriai sor összegeként állítható elő:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Ax_n + B = A(Ax_{n-1} + B) + B = A^2x_{n-1} + AB + B = \\ &= A^2(Ax_{n-2} + B) + AB + B = \dots = A^{n+1}x_0 + A^nB + A^{n-1}B + \dots + AB + B = \\ &= A^{n+1}x_0 + B \frac{1 - A^n}{1 - A}. \end{aligned}$$

Utóbbi kifejezés konvergens, ha $|A| < 1$, divergens, ha $|A| \geq 1$. Az $x = Ax + B$ egyenlet megoldása, éppúgy mint az

$$\left\{ A^{n+1}x_0 + B \frac{1 - A^n}{1 - A} \right\} \text{ határértéke, az állított } \frac{B}{1 - A} \text{ érték } (0 < A < 1).$$

$A < 1$ azaz $\frac{V_1}{V_1 + V_2 + V_3} < 1$ esetben az eredeti sorozat is konvergens, és határértéke:

$p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \left[\frac{B}{1 - A} \right]^a$, mert konvergens sorozat elemeit szabad hatványozni, az így kapott sorozat ismét konvergens lesz, és határértéke az eredeti sorozat határértékének megfelelő hatványa.

Az állandók értékét visszahelyettesítve, a minimális nyomás, ha a légszivattyú már végtelen sok fordulatot megtett:

$$\begin{aligned} p &= \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \left[\frac{B}{1 - A} \right]^a = \left[\frac{\frac{V_3 \sqrt[p_1]{\kappa_1}}{V_1 + V_2 + V_3}}{1 - \frac{V_1}{V_1 + V_2 + V_3}} \right]^{\kappa_1} = \\ &= \left[\frac{V_3 \sqrt[p_1]{\kappa_1}}{V_2 + V_3} \right]^{\kappa_1} = p_1 \frac{1}{\left(1 + \frac{V_2}{V_3} \right)^{\kappa_1}}. \end{aligned}$$

Eszerint $A < 1$ feltételünk mindig teljesül; a minimális nyomás pedig annál kisebb, minél kisebb a p_1 nyomás, azaz minél jobb az ún. elővákuum, minél kisebb a $\frac{V_3}{V_2} = \frac{\text{holt-tér}}{\text{hasznos-tér}}$ hányados és minél nagyobb κ_1 , azaz minél közelebb vagyunk az ideálisan adiabatikus üzemhez. A b) és c)-re a feleletet ezek után könnyű kidolgozni.

c) Sorozatok, amelyeknél különböző típusú határártmeneteket kell szimultán vagy egymás után elvégezni

Gyakran megesik, hogy olyan sorozatok konvergenciáját kell vizsgálnunk, amelyben különböző típusú határártmenetek szerepelnek; így pl. előfordul, hogy a sorozat elemei több tagú, illetve több tényezős kifejezések, s az elemek indexével együtt a sorozat elemeit képező tagok, illetve tényezők száma is minden határon túl nő. Más esetekben a sorozat elemei két indextől függenek, pl. m -től és n -től, és a sorozat határ-

értékét keressük, miközben m is és n is — egymással bizonyos kapcsolatban maradva vagy esetleg egymástól függetlenül — minden határon túl nőnek. Megjegyezzük, hogy az elsőnek említett feladattípus általában visszavezethető a másik típusra. Mindenekelőtt azt rögzítjük, hogy ez esetben mit jelent pontosan a határátmenet művelete. Tegyük tehát fel, hogy egy olyan sorozat konvergens vagy divergens voltát, illetve határértékét kell megállapítanunk, amelyben az elemek két indextől függenek, más szóval a sorozat elemei két, csak egész értékeket felvevő mennyiség függvényei. Maga a feladat tartalmaz ez esetben olyan utasítást, amely ezen általánosabban megfogalmazott problémát visszavezeti a már megismert sorozatfogalomra. Lényegében a következő két előírás lehetséges:

1. A két index egyikét kell „alapindexnek” tekinteni, és a másik index értékét úgy kell felvenni, hogy az meghatározott összefüggésben legyen az alapindexszel, pl. legyen annak adott többszöröse stb.

2. Az egyik indexet, amelyet ismét alapindexnek nevezünk, valamely értéknél rögzítjük, és a másik indexet minden határon túl növeljük; ha így meghatározott határértékhez tart a sorozat, a határérték általában függ a rögzített indextől. Megvizsgálhatjuk tehát, hogy az így kapott — egy indextől még függő — határértékek sorozata konvergens-e, s ha igen, mi a határértéke.

Ezen feladatokkal kapcsolatban igen lényeges az a megjegyzés, hogy az előírást, amely a két indexet összekapcsolja, általában nem szabad megváltoztatni, mert így a konvergenciaviszony és elsősorban a határérték megváltozhat.

A gyakorlatban elsősorban olyan sorozattípusokkal találkozunk, amelyeknél a sorozat elemei többtagúak, illetve több tényezőjűek. Ha csak véges számú tag vagy tényező fordul elő minden elemben — pontosabban ez annyit jelent, hogy megadható egy olyan K szám, amelynél több tagot, illetve tényezőt a sorozat egyetlen eleme sem tartalmaz —, akkor az 1. § b) a) részben mondottakat felhasználhatjuk, azaz a „határátmenet” műveletét az alpműveletekkel sorrendre felcserélhetjük. Végtelen sokszor alkalmazandó alpműveletek esetén (ez legtöbbször úgy jelentkezik, hogy a sorozat egyes elemeiben ugyan mindig csak véges számú alpművelet előírása szerepel, de nem adható meg olyan K , amelynél minden elem csak kevesebb tagot, illetve tényezőt tartalmazna — a tagok, illetve tényezők száma az n indexszel együtt minden határon túl nő) általában nem szabad a határátmenet-sorrendet önkényesen megváltoztatni, azaz pl. az alpműveleteket a határátmenettel felcserélni; a határérték numerikus kiszámításának, illetve a konvergencia vizsgálatának kérdése többnyire elég nehéz. Az alkalmazható módszereket mutatjuk be ebben a részben. Megjegyezzük, hogy néhány feladatban a határátmenetek sorrendjének önkényes felcserélése miatt kapott helytelen eredményeket is feltüntettük, hogy illusztráljuk az elmondottakat.

a) Elemi módszerek alkalmazása

Az itt közölt feladatokban az elemeket vagy algebrai átalakítások segítségével zárt alakban állítjuk elő, vagy pedig olyan tagokból álló elemekkel helyettesítjük, amelyek határértékét számítani tudjuk, egyszersmind az eredeti és az új elemek különbségsorozata 0 sorozat. Ennek következtében a két sorozat határértéke egyezik. A későbbiekben más — távolabb fekvő módszereket is meg fogunk ismerni.

b) Többtagú elemekből álló sorozat határértékének megállapítása az integrálszámítás segítségével

A minden határon túl növő számú tagból felépített elemekkel rendelkező sorozatok vizsgálatánál kialakult módszerek közül két — igen sok esetben

sikerrel alkalmazható — eljárást ismerünk most meg. Az egyik — ismét függvénytani eszközöket segítségül hívó eljárás — lényegében olyan alakban rendezi át a sorozat

n -edik elemét, hogy az valamely határozott integrál egyik integrálközelítő összegének legyen tekinthető. Első esetben — amikor az n -edik elem egy határozott integrál valamelyik integrálközelítő összegének tekinthető — a módszer használhatóságának további szükséges feltétele, hogy $n \rightarrow \infty$ esetén az integrálközelítő összegek sorozata valóban a határozott integrálhoz tartson, azaz a beosztás úgy finomodjék minden határon túl, hogy a legnagyobb mértékű résztartomány hossza is egyenletesen a 0-hoz tartson.

Ebben az esetben a határozott integrál értéke adja a sorozat határértékét. A sorozat konvergenciájának azonban csak elégséges, de nem szükséges feltétele a határozott integrál létezése. Utóbbi ugyanis — mint tudjuk — csak akkor létezik, ha az integrálközelítő összegek sorozata függetlenül a kezdeti beosztástól, a résztartományok belsejében választott — és a függvényértéket meghatározó — pontok helyzetétől és a finomítás módjától ugyanahhoz a határértékhez tart. Ha azonban ez teljesül, akkor bizonyosan ehhez konvergál a sorozat, mint az integrálközelítő összegek egy speciálisan választott sorozata is!

γ) A Toeplitz-tételkör és alkalmazásai

Néhány olyan tételt mutatunk be itt, és gyakoroljuk be alkalmazásukat, amelyek segítségével igen sok összetett elemű (azaz az indexszel együtt minden határon túl növekvő számú tagból, illetve tényezőből álló stb.) sorozatok konvergenciáját, illetve határértékét vizsgálhatjuk. A két alapvető tétel rövid fogalmazása:

1. (Cauchy tétele): Ha az $\{a_n\}$ sorozat konvergens, és határértéke : a , akkor a $\left\{ \sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right\}$ sorozat (az elemek számtani közepéből alkotott sorozat) is konvergál a -hoz. Erre egyébként visszavezethető a 4. feladatként közölt, a geometriai közepekből álló sorozat konvergenciájára vonatkozó tétel is.

A Toeplitz-tételkör többi tétele visszavezethető az alábbi — Toeplitztől származó — tételre:

2. Legyen az $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ sorozat 0 sorozat, az

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}$$

ún. együtthatómatrix pedig elégítse ki a következő két feltételt :

a) Bármely oszlop elemei 0 sorozatot alkotnak, jelekben: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{np} = 0$ (bármely rögzített p -nél).

b) Bármely sorban az együtthatók abszolút értékének összege egy közös (K -val jelölt) korlát alatt marad, jelekben: $\sum_{k=1}^n |a_{nk}| \leq K$ (bármely rögzített n -nél).

Ez esetben az $\left\{ y_n = \sum_{k=1}^n a_{nk} x_k \right\}$ sorozat is 0 sorozat.*

* L. pl. Szász Pál : Differenciál- és integrálszámítás, I. 549. oldal.

Hangsúlyozni akarjuk, hogy a tételkör tételei nem megfordíthatók, azaz pl. abból a tényből, hogy egy sorozat elemeinek számtani közepeiből alkotott sorozat konvergál valamely a számhoz, még az sem következik, hogy az eredeti sorozat egyáltalán konvergens. (Ha azonban igazoltuk, hogy konvergens, akkor tételünk szerint csakis az a számhoz konvergálhat; stb.)

Példák és feladatok

a

1. Határozzuk meg, hogy az

$$a_1 = \ln 2; \quad a_2 = \ln \left(1 + \frac{1}{4}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{2}\right); \dots;$$

$$a_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \ln \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{n}{n^2}\right); \dots$$

sorozat konvergens-e, s ha igen, mi a határértéke?

Megoldás: Kivonással könnyen igazolhatjuk, hogy a sorozat monoton csökkenő. Korlátos is, hiszen:

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < a_n < n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n < a_n < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Mivel pedig az $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ sorozat monoton csökkenően az 1 határértékhez, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pedig monoton növekedően az e határértékhez tart, azért

$$0 = \ln 1 < \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n < a_n < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \ln e = 1.$$

A sorozat tehát monoton és korlátos, így bizonyosan konvergens; sőt határértékéről is tudjuk, hogy 0 és 1 közötti érték.

A feladatban tulajdonképp két szimultán határátmenetet kell elvégeznünk; az egyes tagok n növelésekor a 0-hoz, a tagok száma viszont a végtelenhez tart.

Ha az előírt — szimultán — sorrend helyett bármilyen sorrendben, de egymás után végezzük a határátmenetet, helytelen eredményt kapunk. Rögzítve ugyanis valamely $n = N$ értéknél a tagok számát (egyezik N -nel), és az első N tagban a határátmenetet végrehajtva, a kapott határérték $N \cdot 0 = 0$. Ennek a határértéke pedig $N \rightarrow \infty$ esetén szintén 0. Ezzel szemben rögzítve az egyes tagokban n értékét, és a tagok számában elvégezve a határátmenetet, nyilván minden elem maga is a végtelenhez tart, hiszen azonos és 0-tól különböző tagokat kell minden határon túl növekvő számban összegezni. Olyan sorozatot kapunk tehát így, amelynek „minden eleme s így határértéke is ∞ , éspedig $+\infty$ “, mert bármely elem bármelyik tagja pozitív szám.

Könnyen megkapjuk a helyes értéket is, ha az 1. § b) α) 19. és az 1. § b) β) 3 feladatban megismerteket felhasználjuk. Ebből a célból $\{a_n\}$ -et átalakítjuk:

$$\begin{aligned} a_n &= \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) + \ln \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{n}{n^2} \right) = \\ &= \left\{ \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{n^2} \right] + \left[\ln \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) - \frac{2}{n^2} \right] + \dots + \left[\ln \left(1 + \frac{n}{n^2} \right) - \frac{n}{n^2} \right] \right\} + \\ &\quad + \left[\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right]. \end{aligned}$$

$$a_n = b_n + c_n; \quad c_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}.$$

$$b_n = \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{n^2} \right] + \left[\ln \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) - \frac{2}{n^2} \right] + \dots + \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right].$$

Függvényvizsgálattal könnyen meggyőződhetünk róla, hogy b_n tagjai közül abszolút értékre a $\left[\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right]$ a legnagyobb, a $\left[\ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{n^2} \right]$ a legkisebb.

Mivel pedig mindegyik tag negatív, nyilván a $\left[\ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{n^2} \right]$ a legnagyobb, az $\left[\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right]$ a legkisebb értékű tag; összesen n darab tagból áll egy-egy elem. Ennek alapján

$$n \left| \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right| > |b_n| > n \left| \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{n^2} \right|.$$

Az 1. § b) α) 19. feladatban azonban már kimutattuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right] = 0, \text{ pontosabban, hogy } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right] = 0,$$

$\left\{ \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{n^2} \right\}$ pedig a $\left\{ \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right\}$ sorozat egyik részsorozata, így

maga is 0 sorozat; ezt azonban közvetlenül is belátjuk, ha felírjuk, hogy:

$$\left| \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{n^2} \right| < \left| \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \right| + \left| \frac{1}{n^2} \right| < \frac{2}{n^2} \rightarrow 0,$$

$$n \left| \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{n^2} \right| < n \frac{2}{n^2} = \frac{2}{n} \rightarrow 0.$$

Ennek következtében, ahogy azt az 1. § b) α) 13. feladatban ki is mutattuk, a két 0 sorozat közé szorított b_n sorozat maga is 0 sorozat. (Egyébként — mivel abszolút értékekkel dolgoztunk — elegendő lett volna az ún. majoráló sorozat, az

$$\left\{ n \left| \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right| \right\}$$

0 sorozat voltának kimutatása). Emellett :

$$c_n = \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \left(\frac{1+n}{2} \cdot n \right) = \frac{n+n^2}{2n^2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \rightarrow \frac{1}{2},$$

és végül :

$$a_n = b_n + c_n \rightarrow 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \text{ q. e. d.}$$

2. Igazoljuk, hogy az

$$\left\{ a_n = \left(\frac{n}{n} \right)^n + \left(\frac{n-1}{n} \right)^n + \dots + \left(\frac{1}{n} \right)^n \right\}$$

sorozat konvergens, és határozzuk meg határértékét.

Megoldás: Mint az előző feladatban is, szimultán határátmenetről van szó. Mint látni fogjuk, ez egyike azon kivételes sorozatoknak, ahol a határátmenet-processzusoknak (egyik) önkényes megváltoztatása is helyes eredményre vezet.

Könnyen kimutathatjuk, hogy a sorozat korlátos és monoton növekedő, tehát bizonyosan konvergens. Jelöljük határértékét a -val.

Ha a határátmenetek sorrendjét az előírttal szemben úgy választjuk, hogy egy bizonyos n értéket rögzítve, a tagok számát minden határon túl növeljük, a sorozat divergens lesz, a helytelen $+\infty$ határértéket kapjuk. Ha a tagok számát rögzítjük úgy, hogy csak az első N tagot vesszük figyelembe mindegyik elemnél, akkor az első tag 1-hez, a második $\frac{1}{e}$ -hez stb., az N -edik $\frac{1}{e^N}$ -hez tart; összegük $\left| \frac{1}{e} \right|$ hányadosú geo-

metriai sor $\left| \frac{1-e^{-N}}{1-e^{-1}} \right|$. Hamost elvégezzük az $N \rightarrow \infty$ határátmenetet is, kivételesen helyes eredményt kapunk.

a_n -re becslést adunk a helyes — szimultán — végzett határátmenet előkészítésére. Az $\left(1 - \frac{a}{n} \right)^n$ sorozat ugyanis monoton növekedő (A. II. 10. § 51. feladat), tehát a_n értékét

növeljük, ha $\left(1 - \frac{a}{n} \right)^n$ helyébe a nála nagyobb (legkisebb) felső korlátot, e^{-a} -t írjuk.

Megfordítva viszont, a_n -t bizonyosan csökkentjük, ha összes tagja helyett csak az első $(N+1)$ -et $(N+1 < n)$ vesszük figyelembe, minthogy a_n minden tagja pozitív.

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{n} \right)^n + \left(\frac{n-1}{n} \right)^n + \dots + \left(\frac{n-N}{n} \right)^n &= 1 + \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n + \dots + \\ &+ \left(1 - \frac{N}{n} \right)^n < a_n < \left[1 + \frac{1}{e} + \dots + \frac{1}{e^N} \right], \end{aligned}$$

tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n + \dots + \left(1 - \frac{N}{n} \right)^n \right] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-(n+1)}}{1 - e^{-1}}.$$

Az egyenlőtlenség bal oldalán csak véges számú ($N + 1$ drb) tag van, ennek következtében a határátmenet ott tagonként elvégezhető:

$$1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \dots + \frac{1}{e^N} = \frac{1 - e^{-(N+1)}}{1 - e^{-1}} \leq a \leq \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e - 1}.$$

Ha most meggondoljuk, hogy a bal oldal így is írható:

$$\frac{1 - e^{-(N+1)}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{1 - e^{-1}} - \frac{e^{-(N+1)}}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e - 1} - \frac{e^{-N}}{e - 1}$$

és ebben az alakban a második tag bármely előre megadott ε -nál kisebb, ha N elég nagy ($N > N_0(\varepsilon)$), akkor

$$\frac{e}{e - 1} - \varepsilon \leq a \leq \frac{e}{e - 1}, \quad \text{azaz} \quad \left| \frac{e}{e - 1} - a \right| \leq \varepsilon, \quad \text{ha} \quad N \geq N_0(\varepsilon).$$

Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke ezek szerint:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{n-1}{n} \right)^n + \dots + \left(\frac{1}{n} \right)^n \right] = \frac{e}{e - 1}.$$

3. Határozzuk meg az

$$a_1 = \sqrt{2} - 1; \quad a_2 = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} - 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2}} - 1; \dots;$$

$$a_n = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} - 1 + \sqrt{1 - \frac{2}{n^2}} - 1 + \dots + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} - 1 =$$

$$= \sum_{v=1}^n \left(\sqrt{1 - \frac{v}{n^2}} - 1 \right); \dots \text{ sorozat határértékét.}$$

4. Határozzuk meg, hogy az

$$\left\{ y_n = \sqrt[2n]{1 + \frac{1}{2n}} \right\}$$

sorozat konvergens-e, s ha igen, mi a határértéke?

Megoldás: A sorozat tulajdonképp az $\left\{ x_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} \right\}$ sorozat páros indexű elemei részsorozata.

$$\sqrt[n]{1} < x_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} < \sqrt[n]{2} < \sqrt[n]{n}.$$

Mivel $\sqrt[n]{1} = 1$, azért az egyenlőtlenség bal oldalán álló sorozat minden eleme, így határértéke is 1.

Az $\sqrt[n]{n}$ sorozat konvergens voltát, s azt, hogy határértéke 1, az 1. § b) α) 9. feladatban igazoltuk. Ezekkel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1. \quad \text{Tehát} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

De akkor az $\{x_n\}$ sorozat részsorozata, az $\{y_n\}$ sorozat is konvergens (1. § b) α) 1. feladat) és határértéke:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2n}} = 1.$$

5. Határozzuk meg az

$$\left\{ x_n = \left(1 + \frac{\sqrt[n]{n}}{n+7} \right)^{n+7} \right\}$$

sorozat határértékét.

6. Határozzuk meg, konvergens-e az

$$\{y_n = \sqrt[n]{\frac{2n + n \sin n}{n + 1 + n \cos n}}\}$$

sorozat, s ha igen, mi a határértéke?

Megoldás: Felhasználjuk a $-n < n \sin n < n$ (ugyanis az $y = \sin x$ függvény maximuma 1, minimuma -1 , s ezeket az értékeket π különböző többszöröseinél veszi fel. Mivel π nem racionális, egyetlen többszöröse sem lehet racionális, vagyis n nem lehet π többszöröse) egyenlőtlenséget; ugyanígy

$$-n < n \cos n < n.$$

Az $\sqrt[n]{x}$ kifejezés, amint igen egyszerűen igazolni tudjuk, $x > 0$ értékének csökkenésekor csökken, növekedésekor növekszik; ha pedig $1 < x$, akkor az $\sqrt[n]{x}$ mennyiség a kitevő, y csökkentésekor nő, növelésekor csökken. (Legegyszerűbben függvényvizsgálattal igazolhatjuk.)

Ezzel

$$\sqrt[3n]{1} < y_n < \sqrt[n]{2n+1},$$

hiszen

$$3n > 2n + n \sin n > n$$

és

$$2n + 1 > n + n \sin n > 1.$$

Mivel a fenti egyenlőtlenség bal és jobb oldalán ugyanazt a határértéket kapjuk, az állított egyenlőtlenségből egyszerűen igazolhatjuk, hogy a sorozat határértéke 1.

7. Határozzuk meg az

$$\{u_n = \sqrt[m]{(n+a_1)(n+a_2)(n+a_3)\dots(n+a_m)} - n\}$$

sorozat határértékét! ($a_1 > 0$; $a_2 > 0$; ...; $a_m > 0$; m adott — véges — szám.)

8. Határozzuk meg, hogy a

$$\left\{b_n = \sum_{v=1}^n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{v^2}{n^3}} - 1 \right)\right\}$$

sorozat konvergens-e, s ha igen, mi a határértéke?

9. Mi a

$$\left\{c_n = \left(\frac{\sum_{v=1}^k \sqrt[n]{a_v}}{k} \right)^n\right\}$$

sorozat határértéke, ha az a_1, a_2, \dots, a_k számok valamennyien pozitívek (és k -vel együtt végesek).

10. Határozzuk meg a

$$\left\{b_n = \sum_{v=0}^{n-1} \left(\alpha + \frac{1}{n} \right)^v\right\}$$

sorozat határértékét ($0 < \alpha < 1$).

Megoldás: Azt kell csak észrevennünk, hogy b_n egy geometriai sor első n tagja, mely sor hányadosa $\left(\alpha + \frac{1}{n} \right)$. Tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{1 - \alpha}$.

11. Határozzuk meg, konvergens-e az

$$\left\{y_n = n \left(1 - \sqrt[3]{1 - \sin \frac{1}{n}} \right)\right\}$$

sorozat, s ha igen, mi a határértéke?

12. Konvergens-e, s ha igen, milyen határértékhez tart az

$$x_1 = 1 - \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg} 1}; \quad x_2 = 2 \left(1 - \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}} \right); \dots; \quad x_n = n \left(1 - \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{n}} \right); \dots$$

sorozat.

13. Konvergens-e az

$$\left\{y_n = n \left(1 - \sqrt[3]{1 - \sin \frac{1}{n}} \right)\right\}$$

sorozat, s ha igen, mi a határértéke?

14. Konvergens-e, és ha igen, mi a határértéke az

$$\{a_n = \sqrt{n[1 - \sqrt{1 - \sin^2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}]} \}$$

illetve a

$$\{b_n = \sqrt{n[1 - \sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})]} \}$$

sorozatnak?

15. Mi a határértéke az

$$\{u_n = n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n})\}$$

sorozatnak?

$$\begin{aligned} \text{Megoldás: } u_n &= n^{\frac{3}{2}}[(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})] = \\ &= n^{\frac{3}{2}}\left[(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}\right] = \\ &= n^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}\right] = n^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1} - (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} = \\ &= n^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1}}{n + \sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n(n-1)} + \sqrt{n^2-1}} = \\ &= n^{\frac{3}{2}} \frac{(\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})}{(n + \sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n(n-1)} + \sqrt{n^2-1})(\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})} = \\ &= \frac{-2}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right)}. \end{aligned}$$

Utóbbi alakban a határértéket már könnyű meghatározni.

16. Mi a határértéke az

$$\left\{a_n = \sum_{\nu=1}^n \sin \frac{(2\nu-1)a}{n^2}\right\}$$

sorozatnak?

Megoldás: Az 1. § b) β) 6., illetve 8. feladatban kimutattuk, hogy

$$n\left(\sin \frac{a}{n^2} - \frac{a}{n^2}\right) \rightarrow 0 \quad \text{és} \quad n\left(\sin \frac{a}{n} - \frac{a}{n}\right) \rightarrow 0.$$

Az 1. § c) a) 1. feladathoz hasonlóan kell tehát most is eljárunk:

$$a_n = \sum_{\nu=1}^n \left[\sin \frac{2\nu-1}{n^2} a - \frac{2\nu-1}{n^2} a \right] + \sum_{\nu=1}^n \frac{2\nu-1}{n^2} a.$$

Ilyen átalakítások után könnyen kiderül, hogy a_n , amelyet két tag összegének tekintünk (mindkét összeg egy-egy tag) konvergens sorozat eleme, mert két konvergens sorozat : az

$$\left\{ \alpha_n = \sum_{\nu=1}^n \left[\sin \frac{2\nu-1}{n^2} a - \frac{2\nu-1}{n^2} a \right] \right\} \quad \text{és a} \quad \left\{ \beta_n = \sum_{\nu=1}^n \frac{2\nu-1}{n^2} a \right\}$$

sorozat megfelelő indexű elemének összege, határértéke pedig a két sorozat határértékének összege. Mivel

$$n \left(\sin \frac{2a}{n} - \frac{2a}{n} \right) < n \left(\sin \frac{2n-1}{n^2} a - \frac{2n-1}{n^2} a \right) < \alpha_n < n \left(\sin \frac{a}{n^2} - \frac{a}{n^2} \right) < 0,$$

a határátmenetek elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \leq 0, \quad \text{azaz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0,$$

$$\text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n^2} \sum_{\nu=1}^n (2\nu-1) = a \frac{1}{n^2} n^2 = a.$$

A sorozat határértéke tehát:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n \sin \frac{2\nu-1}{n^2} a = a.$$

17. Igazoljuk, hogy a

$$\{b_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n}\}$$

sorozat határértéke egyezik az $a_1; a_2; \dots; a_k$ nem negatív számok legnagyobbikával. (k tetszés szerinti természetes szám.)

18. Határozzuk meg az

$$\left\{ a_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{n^2 - 2n + 100} \right\}$$

sorozat határértékét.

19. Mi a

$$\left\{ b_n = \left(1 + \frac{\sqrt[n]{2n}}{n-4} \right)^n \right\}$$

sorozat határértéke?

20. Mi a

$$\left\{ c_n = n (\sqrt[n]{n} - 1) \right\} \quad \text{és a} \quad \left\{ d_n = \left(\sqrt[n]{n} + \frac{n^{-\frac{1}{2^n}}}{2n-3} \right)^{3n+2} \right\}$$

sorozat határértéke?

21. Milyen határértékhez tart a

$$\left\{ b_n = n \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - e \right] \right\}$$

sorozat?

22. Konvergens-e az

$$\{a_n = \sqrt[n]{n[1 - \sqrt{1 - \sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}]^2}\}$$

sorozat, s ha igen, mi a határértéke?

β 1. Határozzuk meg az

$$a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}; \quad a_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}; \quad \dots;$$

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}; \quad \dots$$

sorozat határértékét.

Megoldás: Először igazoljuk a határérték létezését (jóllehet a bevezetésben mondottak alapján erre nincs szükség, ha az integrálközelítő összeghez tartozó határozott integrál létezik). A sorozat ugyanis korlátos:

$$n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} < a_n < n \frac{1}{n+1} < 1.$$

Másrésről a sorozat monoton növekvő:

$$a_{k+1} - a_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} > \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = 0.$$

A monoton és korlátos sorozatok pedig mindannyian konvergenssek. a_n — könnyen felismerhetően — úgy tekinthető, mint az $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ határozott integrál azon közelítő összege, amelynél az integrációs tartományt: az $[1, 2]$ intervallumot n egyenlő részre osztjuk, és a függvényértékeket, amelyekkel az $\frac{1}{n}$ hosszúságú részintervallumokat szorozzuk, a részintervallumok jobb oldali végpontjaiban választjuk. A jobb oldali végpontok ugyanis rendre:

$$1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}; \quad 1 + \frac{2}{n} = \frac{n+2}{n}; \quad \dots; \quad 1 + \frac{n}{n} = \frac{2n}{n}.$$

Az integrálandó függvény, $\frac{1}{x}$ értéke ezeken a helyeken rendre: $\frac{n}{n+1}; \frac{n}{n+2}; \dots;$

$\frac{n}{2n} \cdot a_n$ pedig így írható fel:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \left[\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+2} + \dots + \frac{n}{2n} \right] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n+k} = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k. \end{aligned}$$

Ha $n \rightarrow \infty$, akkor az integrálközelítő összegekben szereplő valamennyi résztartomány $\left(\frac{1}{n}\right.$ hosszúságú lévén $\left.)\right)$ egyenletesen a 0-hoz tart. Ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2.$$

2. Határozzuk meg, hogy α milyen értékei mellett konvergens és mi a határértéke a

$$\left\{ b_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n n^{\frac{\nu \pi \alpha}{n}} \right\}$$

sorozatnak?

3. Határozzuk meg az

$$a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \left[\frac{2}{4+1} + \frac{2}{4+4} \right]; \quad \dots;$$

$$a_n = \left[\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right] = \sum_{\nu=1}^n \frac{n}{n^2+\nu^2}; \quad \dots$$

sorozat határértékét.

Megoldás: A sorozat korlátos, hiszen $n \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2} < a_n < n \frac{n}{n^2+1} < 1$.*

a_n -et úgy alakítjuk át, hogy felismerhessük azt a függvényt, amelynek integrálközelítő összege a_n :

$$a_n = \sum_{\nu=1}^n \frac{n}{n^2+\nu^2} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \frac{n^2}{n^2+\nu^2} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{\nu}{n}\right)^2}.$$

Tehát a_n az $\frac{1}{1+x^2}$ függvény 0 és 1 közötti határozott integráljának integrálközelítő összege; a részintervallumok hossza: $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$.

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{\nu}{n}\right)^2} = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k,$$

ahol $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ ($k = 1; 2; \dots; n$); $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $\xi_k = \frac{k}{n}$.

* Könnyen igazolhatjuk, hogy monoton növekvő is, ámbar erre nincs szükségünk.

Ezzel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{1 + \xi_{\nu}^2} \Delta x_{\nu} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

4. Határozzuk meg az

$$u_1 = a^2; u_2 = \frac{1}{2} \left[a + \frac{1}{2} \right]^2; u_3 = \frac{1}{3} \left[\left(a + \frac{1}{3} \right)^2 + \left(a + \frac{2}{3} \right)^2 \right]; \dots;$$

$$u_n = \frac{1}{n} \left[\left(a + \frac{1}{n} \right)^2 + \left(a + \frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \left(a + \frac{n-1}{n} \right)^2 \right]; \dots$$

sorozat határértékét.

5. $p > -1$. Határozzuk meg, konvergens-e az

$$\left\{ a_n = \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} \right\}$$

sorozat, s ha igen, mi a határértéke.

6. Konvergens-e az

$$u_1 = 1; u_2 = \frac{1}{\sqrt{4-0}} + \frac{1}{\sqrt{4-1}}; u_3 = \frac{1}{\sqrt{9-0}} + \frac{1}{\sqrt{9-1}} + \frac{1}{\sqrt{9-4}}; \dots;$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-\nu^2}}; \dots$$

sorozat, s ha igen, mi a határértéke?

7. Konvergens-e az

$$y_1 = \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4}; y_2 = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{5\pi}{8} \right];$$

$$y_n = \frac{1}{n} \left[\cos \frac{\pi}{4n} + \cos \frac{3\pi}{4n} + \dots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{4n} \right]; \dots$$

sorozat, s ha igen, mi a határértéke?

8. Az (a, b) intervallumot $(0 < a < b)$ osszuk fel n egyenlő részre: $x_0 = a$; x_1 ; x_2 ; \dots ; $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$; \dots ; $x_n = b$ legyenek az osztópontok. Határozzuk meg, hogy

a) az abszcisszák geometriai közepének:

$$g_{n+1} = \sqrt[n+1]{x_0 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$$

mi a határértéke, ha a beosztást minden határon túl finomítjuk?

b) Az abszcisszák harmonikus közepének h_{n+1} -nek mi a határértéke, ha a beosztás minden határon túl sűrűsödik? A harmonikus közép definíció szerint:

$$\frac{1}{h_{n+1}} = \left[\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right] \cdot \frac{1}{n+1}.$$

γ 1. Legyen az $x_1; x_2; x_3; \dots; x_n; \dots$ sorozat 0 sorozat. Igazoljuk, hogy az elemek számtani közepeiből alkotott sorozat:

$$y_1 = x_1; \quad y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \quad \dots; \quad y_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}; \dots$$

is 0 sorozat (Cauchy-tétel).*

Megoldás: Adjunk meg egy bármilyen kis $\varepsilon > 0$ -t. Tekintettel arra, hogy az $\{x_n\}$ sorozat 0 sorozat, létezik olyan m_0 index, hogy $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, hacsak $n > m_0$. Ennek alapján:

$$|y_n| \leq \frac{|x_1 + x_2 + \dots + x_m|}{n} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}(n-m)}{n} < \frac{|x_1 + x_2 + \dots + x_m|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Eddig n -ről csak annyiban határoztunk, hogy legyen nagyobb m -nél. Miután az első törtben véges számú (m darab) tag összegének és n -nek a hányadosa áll, találhatunk olyan n_0 -t, amelynél az első tört értéke kisebb, mint $\frac{\varepsilon}{2}$, tehát

$$|y_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{hacsak} \quad n \geq n_0 \geq m.$$

2. Igazoljuk, hogy ha $x_n \rightarrow x$, akkor az

$$y_1 = x_1; \quad y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad \dots; \quad y_n = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}; \quad \dots$$

sorozat is konvergens, és határértéke $y_n \rightarrow x$, ha $n \rightarrow \infty$.

3. Határozzuk meg az

$$a_1 = 1; \quad a_2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}; \quad \dots; \quad a_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \dots + \sqrt[n]{2}}{n}; \quad \dots$$

sorozat határértékét.

* Általánosabb fogalmazását l. pl. Szász: Differenciál- és integrálszámítás. I. 545. o.

4. Igazoljuk, hogy ha $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x > 0$, akkor a sorozat elemeinek a geometriai közepéből képezett új sorozat, az

$$y_1 = x_1; y_2 = \sqrt{x_1 x_2}; y_3 = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}; \dots; y_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}; \dots$$

sorozat is konvergens, és határértéke ugyancsak x . (Feltételezzük természetesen, hogy $x_i > 0$, $i = 1, 2, \dots$)

5. Határozzuk meg a

$$c_1 = \frac{2}{1!}; c_2 = \frac{3}{\sqrt{2!}}; c_3 = \frac{4}{\sqrt[3]{3!}}; \dots; c_n = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}; \dots$$

sorozat határértékét.

Megoldás: A c_n -et olyan alakba kell átírni, hogy c_n egy $\{d_n\}$ sorozat első n elemének geometriai közepeként legyen tekinthető:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}} = \sqrt[n]{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \dots \frac{(n+1)^n}{n}} = \\ &= \sqrt[n]{\frac{2}{1} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{4^3}{3^3} \cdot \frac{5^4}{4^4} \dots \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n}}. \end{aligned}$$

A $\frac{k^{k-1}}{(k-1)^{k-1}}$ alakú tényezőt ebben az alakban írjuk fel:

$$\frac{k^{k-1}}{(k-1)^{k-1}} = \frac{[1 + (k-1)]^{k-1}}{(k-1)^{k-1}} = \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1}. \text{ Így}$$

$$c_n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

c_n végső alakjából azonnal felismerhetjük, hogy c_n az $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ sorozat első n eleme

segítségével képezett geometriai közép. Mivel az $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ sorozat konvergens, és

határértéke e , azért a $\left\{c_n = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}\right\}$ sorozat is konvergens, és $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

6. Határozzuk meg a

$$\left\{d_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}\right\}$$

sorozat határértékét.

7. Igazoljuk, hogy az

$$y_1 = \frac{1}{2 \ln 2}; \quad y_2 = \frac{1}{3 \ln 2} + \frac{1}{4 \ln 3}; \quad y_3 = \frac{1}{4 \ln 2} + \frac{1}{5 \ln 3} + \frac{1}{6 \ln 4}; \dots;$$

$$y_n = \frac{1}{(n+1) \ln 2} + \frac{1}{(n+2) \ln 3} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \ln n} + \frac{1}{2n \ln (n+1)}; \dots$$

sorozat 0 sorozat.

Megoldás: Az $a_{11} = \frac{1}{2}$

$$a_{21} = \frac{1}{2+1}; \quad a_{22} = \frac{1}{2+2};$$

.....

$$a_{n1} = \frac{1}{n+1}; \quad a_{n2} = \frac{1}{n+2}; \dots; \quad a_{nk} = \frac{1}{n+k}; \dots; \quad a_{nn} = \frac{1}{n+n};$$

.....

sémába foglalt elemek a *Toeplitz*-tétel valamennyi követelményét teljesítik.
Egyszersmind az

$$x_1 = \frac{1}{\ln 2}; \quad x_2 = \frac{1}{\ln 3}; \dots; \quad x_n = \frac{1}{\ln (n+1)}; \dots$$

második tényezők alkotta sorozat is 0 sorozat, így a *Toeplitz*-tétel felhasználható.

Ugyanis a) $a_{np} = \frac{1}{n+p} \rightarrow 0$, ha p rögzített, és $n \rightarrow \infty$;

b) $|a_{n,1}| + |a_{n,2}| + \dots + |a_{n,n}| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < n \cdot \frac{1}{n+1} < 1$,
tehát n értékétől függetlenül létezik olyan felső korlát (pl. az 1), amelynél az egy sorban álló mátrixelemek abszolút értékeinek összege kisebb;

c) az $\{x_n\}$ sorozat valóban 0 sorozat.

Ezek fennállása esetén azonban — a *Toeplitz*-tétel alapján — a megadott sorozat valóban 0 sorozat.

8. Határozzuk meg az

$$y_1 = \frac{1}{2}; \quad y_2 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4}; \quad y_3 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{\sqrt[3]{3}}{6}; \dots;$$

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{\sqrt{2}}{n+2} + \dots + \frac{\sqrt[n-1]{n-1}}{2n-1} + \frac{\sqrt[n]{n}}{2n}; \dots$$

sorozat határértékét.

9. Határozzuk meg, hogy a

$$z_1 = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1}; \quad z_2 = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{3} + \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{2}; \quad z_3 = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{5} + \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{4} + \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{3}; \dots;$$

$$z_n = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2n-1} + \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{2n-2} + \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{2n-3} + \dots + \frac{\sin \frac{\pi}{2p}}{2n-p} + \dots + \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n}; \dots$$

sorozat konvergens-e, s ha igen, mi a határértéke?

10. A konvergens $\{x_n\}$ sorozat határértéke legyen x .

A Toeplitz-tételben szereplő sémára az ottani két kikötésen kívül teljesüljön még az a feltétel is, hogy bármely sorban az együtthatók összege annál jobban megközelíti 1-et, minél távolabbi sort összegeztünk, azaz az

$$A_1 = a_{11}; A_2 = a_{21} + a_{22}; A_3 = a_{31} + a_{32} + a_{33}; \dots;$$

$$A_n = a_{n1} + a_{n2} + a_{n3} + \dots + a_{np} + \dots + a_{nn}; \dots$$

sorozat határértéke legyen 1: $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 1$.

Igazoljuk, hogy az

$$y_1 = a_{11} x_1; \quad y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2; \quad y_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3; \dots; \quad y_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{np} x_p + \dots + a_{nn} x_n; \dots$$

sor konvergens, és határértéke szintén x .*

Megoldás: y_n így írható:

$$y_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = a_{n1} (x_1 - x) + a_{n1} x + a_{n2} (x_2 - x) + a_{n2} x + \dots + a_{nn} (x_n - x) + a_{nn} x = A_n x + a_{n1} (x_1 - x) + a_{n2} (x_2 - x) + \dots + a_{nn} (x_n - x).$$

Mivel $x_1 - x; x_2 - x; \dots; x_n - x; \dots$ 0 sorozat, A_n pedig 1-hez tart, az előbbi példa értelmében:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x + \sum_{k=1}^n a_{nk} (x_k - x) = x + 0 = x, \quad \text{q. e. d.}$$

11. Határozzuk meg, hogy a

$$z_1 = \frac{1}{2} (a - 1); \quad z_2 = \frac{2}{3} (\sqrt{a} - 1) + \frac{1}{4} (a - 1); \quad z_3 = \frac{3}{4} (\sqrt[3]{a} - 1) + \frac{3}{5} (\sqrt{a} - 1) + \frac{7}{24} (a - 1); \dots;$$

$$z_n = \frac{n}{n+1} (\sqrt[n]{a} - 1) + 2 \frac{n-1}{n+2} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) (\sqrt{a} - 1) + 2 \frac{n-2}{n+3} \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) (\sqrt[3]{a} - 1) + \dots + 2 \frac{n-p}{n+p+1} \left(1 - \frac{1}{2^{p+1}}\right) (\sqrt[p]{a} - 1) + \dots + 2 \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) (a - 1); \dots$$

sorozat konvergens-e, s ha igen, mi a határértéke?

* L. pl. Knopp: Unendliche Reihen, 71. o.

Megoldás: Az

$$a_{11} = \frac{1}{2}$$

$$a_{21} = \frac{1}{3}; \quad a_{22} = \frac{1}{4}$$

$$a_{n1} = \frac{1}{n+1}; \quad a_{n2} = \frac{1}{n+2}; \dots; \quad a_{np} = \frac{1}{n+p}; \dots; \quad a_{nn} = \frac{1}{2n},$$

együttható-mátrix választással a „háromszög” sémára felállított követelményeink valamennyien teljesülnek — amit némi számolással azonnal igazolni is tudunk — annak az egyetlen követelésnek kivételével, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 1$, minthogy

$$A_n = \sum_{p=1}^n a_{np} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{n+p} = \ln 2 + \varepsilon(n); \quad \varepsilon(n) \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

és így

$$\lim A_n = \ln 2 \neq 1.$$

Az $\left\{x_k = 2\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\right\}; \left\{y_k = k(\sqrt[k]{a} - 1)\right\}$ jelöléssel az 1. § c) γ) 10. feladatban igazolt tételt mégis csak fel tudjuk használni, csakhogy először minden elemet szoroznunk és osztanunk kell az előbb kiszámított $\ln 2$ -vel. Így:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln 2 \cdot z_n = 2 \ln a, \text{ minthogy } \lim_{k \rightarrow \infty} 2\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = 2; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} k(\sqrt[k]{a} - 1) = \ln a.$$

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{2 \ln a}{\ln 2} = \frac{\ln a^2}{\ln 2} = \ln a^{\frac{2}{\ln 2}}.$$

12. Legyenek $\alpha_1, \alpha_2; \dots; \alpha_n; \dots$ pozitív számok, amelyek összege minden határon túl nő n -nel, azaz bármely K számhoz található olyan $N = N(K)$, hogy

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n > K,$$

hacsak $n \geq N$. Az $\{x_n\}$ sorozat legyen konvergens, és határértéke x . Igazoljuk, hogy a

$$z_1 = x_1; \quad z_2 = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}{\alpha_1 + \alpha_2}; \quad \dots; \quad z_n = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}; \quad \dots$$

sorozat konvergens, és határértéke: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

13. Igazoljuk, hogy*

a) a $\left\{z_n = \frac{Y_n}{A_n}\right\}$ és az $\left\{u_n = \frac{Y_n - Y_{n-1}}{A_n - A_{n-1}}\right\}$ sorozatoknak ugyanaz a határértékük, feltéve, hogy az utóbbi sorozat konvergens, és a $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = +\infty$ reláció teljesül;

* Cauchy első határértéktétele címen I. pl. Szász: Differenciál- és integrálszámítás c. könyvében.

b) a $\left\{z_n = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}\right\}$ és az $\left\{u_n = \frac{y_n}{\alpha_n}\right\}$ sorozatoknak ugyanaz a határértékük, feltéve, hogy az utóbbi sorozat konvergens, és $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n) = +\infty$.

14. Határozzuk meg, hogy az

$$x_1 = \frac{\ln(1!)}{\ln(1^1)}; \quad x_2 = \frac{\ln(2!)}{\ln(2^2)}; \quad x_3 = \frac{\ln(3!)}{\ln(3^3)}; \dots; \quad x_n = \frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}; \dots$$

sorozat konvergens-e, s ha igen, mi a határértéke?

Megoldás: Ha az

$$\begin{aligned} \left\{y_n = \frac{\ln(n!) - \ln[(n-1)!]}{\ln(n^n) - \ln[(n-1)^{n-1}]}\right\} &= \frac{\ln \frac{n!}{(n-1)!}}{n \ln n - (n-1) \ln(n-1)} = \\ &= \frac{\ln n}{n \ln n - (n-1) \ln(n-1)} \end{aligned}$$

sorozat konvergens, azaz $n \rightarrow \infty$ esetén van határértéke, akkor az 1. § c) γ) 14. feladat tétele értelmében az $\{x_n\}$ sorozat is konvergens, és határértéke egyezik az $\{y_n\}$ sorozatével.

$\{y_n\}$ határértékét a hozzá tartozó folytonos értelmezési tartományú függvényeknek a Bernoulli–L'Hospital-tétel segítségével megkeresett határértéke [1. § b) β)] azonnal szolgáltatja:*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x \ln x - (x-1) \ln(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x + 1 - [\ln(x-1) + 1]} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\ln \frac{x}{x-1}} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\ln \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1. \end{aligned}$$

15. Határozzuk meg, hogy az

$$x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}}; \quad x_3 = \frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}; \dots; \quad x_n = \frac{1 + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2n-1}}{1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}; \dots$$

sorozat konvergens-e, és ha igen, mi a határértéke?

16. Az 1. § c) γ) 13a) és a 13b) feladatban közölt tételek nem megfordíthatóak, azaz a $\left\{z_n = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}\right\}$ sorozat konvergens voltából még nem következik az $\left\{u_n = \frac{y_n}{\alpha_n}\right\}$ sorozat konvergenciája, és hasonlóképp, a $\left\{z_n = \frac{Y_n}{A_n}\right\}$ konvergenciájából nem következik az $\left\{u_n = \frac{Y_n - Y_{n-1}}{A_n - A_{n-1}}\right\}$ konvergens volta. Ezt a következő ellenpéldán verifikálhatjuk: A

$$z_1 = \frac{1}{3}; \quad z_2 = 1; \quad z_3 = \frac{3}{5}; \quad z_4 = 1; \dots; \quad z_n = \frac{Y_n}{A_n} = \frac{n + [1 + (-1)^n]}{n + 2}; \dots$$

* A 4. §-ban bemutatott eljárások felhasználása egyszerűbben is célra vezet, de azok ismeretét itt nem tételezzük fel.

sorozatról mutassuk meg, hogy konvergens; képezzük most az $\left\{u_n = \frac{Y_n - Y_{n-1}}{A_n - A_{n-1}}\right\}$ sort, és igazoljuk, hogy az nem konvergens. Konstruáljunk hasonló ellenpéldákat a két tétel meg nem fordíthatóságának igazolására. Verifikáljuk ellenpéldákkal, hogy az 1. § c) γ, 1.; 2.; 4.; 7.; 10. feladatokban kimondott relációk sem megfordíthatók.

17. Legyen $a_1; a_2; \dots; a_n; \dots$ tetszős szerinti, de pozitív elemű sorozat. Képezzük ebből az

$$x_1 = \frac{a_2}{a_1}; \quad x_2 = \frac{a_3}{a_2}; \dots; \quad x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}; \dots$$

és az

$$y_1 = a_1; \quad y_2 = \sqrt{a_2}; \quad y_3 = \sqrt[3]{a_3}; \dots; \quad y_n = \sqrt[n]{a_n}; \dots$$

sorozatokat.

a) Igazoljuk, hogy amennyiben az $\{x_n\}$ és $\{y_n\}$ sorozatok konvergens, akkor egyenlő a határértékük.

b) Ha az $\{x_n\}$ sorozat konvergens, akkor az $\{y_n\}$ sorozat is az.*

18. Verifikáljuk a következő ellenpéldán, hogy az előző feladat b) tétele nem megfordítható. Legyen

$$a_1 = 1 \cdot q; \quad a_2 = p \cdot q; \quad a_3 = p \cdot q^2; \quad a_4 = p^2 \cdot q^2; \quad a_5 = p^2 \cdot q^3; \dots; \quad a_{2n} = p^n \cdot q^n; \\ a_{2n+1} = p^n \cdot q^{n+1}; \dots \quad (p > 0; q > 0).$$

Van-e határértéke az $\left\{x_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}\right\}$ és az $\left\{y_n = \sqrt[n]{a_n}\right\}$ sorozatnak, s ha igen, mi?

19. Legyen $a > 1$. Mi a határértéke az

$$y_1 = \sqrt{a} - 1; \quad y_2 = \sqrt[4]{\sqrt{a} - 1}; \quad y_3 = \sqrt[6]{\sqrt[4]{\sqrt{a} - 1}}; \dots; \quad y_n = \sqrt[2n]{\sqrt[2n]{\sqrt{a} - 1}}; \dots$$

sorozatnak?

Megoldás: Az $a_n = \sqrt[2n]{a} - 1$ jelölés bevezetésével végeredményben az $\left\{y_n = \sqrt[n]{a_n}\right\}$ sorozat konvergens voltát kell kimutatnunk, és határértékét megállapítanunk. Utóbbi sorozat konvergenciáját azonban az $\left\{x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ konvergens volta biztosítja, s a két sorozat $\{x_n\}$ és $\{y_n\}$ határértéke is megegyezik.

$$\left\{x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt[2n+2]{a} - 1}{\sqrt[2n]{a} - 1}\right\}.$$

Utóbbi erősen emlékeztet a $\ln a$ határértékű sorozatra, s némi algebrai átalakítással fel is tudjuk az 1. § b) β) 3. feladat eredményeit használni:

$$x_n = \frac{2(n+1) \left[\sqrt[2n+2]{a} - 1 \right]}{2n \left[\sqrt[2n]{a} - 1 \right]} \cdot \frac{n}{n+1}.$$

* L. pl. Szász: Differenciál- és Integrálszámítás, I. 547. o., mint Cauchy tételének következményét.

Ezen az alakon a határátmenetet tényezőnként hajthatjuk végre, hacsak értelmetlenséget nem kapunk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\ln a}{\ln a} \cdot 1 = 1 \quad (a \neq 1).$$

$\{x_n\}$ konvergens voltából $\{y_n\}$ konvergenciája is következik, így $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{a} - 1} = 1$ ($a \neq 1$).

20. Határozzuk meg, hogy az

$$a_1 = 2; a_2 = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}}; a_3 = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}}; \dots; a_n = \sqrt[n]{\frac{2n}{n}} = \sqrt[n]{\frac{2n(2n-1) \dots (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}}; \dots$$

sorozat konvergens-e, s ha igen, mi a határértéke?

21. Konvergens-e az

$$x_1 = 2; x_2 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{3 \cdot 4}; x_3 = \frac{1}{3} \sqrt[3]{4 \cdot 5 \cdot 6}; \dots; x_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \dots 2n}; \dots$$

sorozat, s ha igen, mi a határértéke?

22. Mi a határértéke

$$\begin{aligned} \text{a) az } \left\{ a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{n} \right\}, \quad \text{b) a } \left\{ b_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)^n}{n} \right\}; \\ \text{c) a } \left\{ c_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{n^m} \right\} \quad (m > 0) \end{aligned}$$

sorozatoknak?*

23. Konvergens-e az

$$x_2 = \frac{1 + \frac{1}{2}}{\ln 2}; x_3 = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\ln 3}; \dots; x_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n}; \dots$$

sorozat, s ha igen, mi a határértéke?

24. Mi a határértéke az

$$\left\{ u_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!} n^2} \right\}$$

sorozatnak?

* L. pl. Szász: Differenciál- és integrálszámítás, I. 547. o.

25. Konvergens-e az

$$\left\{ y_n = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}} \right\}$$

sorozat, s ha igen, mi a határértéke?

26. Legyen $a > 0$. Mi a határértéke az

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{1 + 2^a}{2^{a+1}}; x_3 = \frac{1 + 2^a + 3^a}{3^{a+1}}; \dots; x_n = \frac{1 + 2^a + 3^a + \dots + n^a}{n^{a+1}}; \dots$$

sorozatnak?

27. Konvergens-e, s ha igen, mi a határértéke

$$\begin{aligned} a) \text{ az } \left\{ a_n = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2} \right\}; \quad b) \text{ a } \left\{ b_n = \frac{1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} \right\} \\ c) \text{ a } \left\{ c_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n \sqrt{n}} \right\} \end{aligned}$$

sorozatnak?

28. Igazoljuk, hogy $a > 0$ esetben konvergens az

$$x_1 = a + 1; x_2 = \sqrt{\frac{(a+1)(a+2)}{2!}}; \dots; x_n = \sqrt[n]{\frac{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{n!}}; \dots$$

sorozat, és számítsuk ki határértékét.

29. a és b milyen értékeinél konvergens az

$$y_1 = \frac{a+1}{b+1}; y_2 = \sqrt{\frac{(a+1)(a+2)}{(b+1)(b+2)}}; \dots; y_n = \sqrt[n]{\frac{(a+1)(a+2)(a+3)\dots(a+n)}{(b+1)(b+2)(b+3)\dots(b+n)}}; \dots$$

sorozat, és mi a határértéke?

30. Mi a határértéke az

$$\left\{ u_n = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{n}{n+1} \right)^p + \left(\frac{n}{n+2} \right)^p + \dots + \left(\frac{n}{2n} \right)^p \right] \right\}$$

sorozatnak? ($p > 0$).

31. Konvergens-e a

$$\left\{ v_n = n \frac{2^{p-1}}{p-1} + \left[\left(\frac{n}{n+1} \right)^p + \left(\frac{n}{n+2} \right)^p + \dots + \left(\frac{n}{n+k} \right)^p + \dots + \left(\frac{n}{2n} \right)^p \right] \right\}$$

sorozat, s ha igen, mi a határértéke?

d) Számsorozatok limes superiorja és limes inferiorja

A végtelen sorokkal kapcsolatos vizsgálatainkban fontos szerepet játszik a limes superior (szokásos jele: \limsup , illetve $\overline{\lim}$) és a limes inferior (\liminf , illetve $\underline{\lim}$) fogalma. Egy sorozat sűrűsödési helyeinek alsó határát nevezzük \liminf -nek, felső határát \limsup -nak. Bebizonyítható elég könnyen, hogy a \limsup és a \liminf maga is sűrűsödési hely. Megadunk egy, az eredeti definícióval ekvivalens fogalmazást is, amely numerikus célokra gyakran elég jól használható.

Az $\{a_n\}$ sorozat limes inferiorja az „ a ” szám, ha „ a ”-nál nem kisebb elem végtelen sok van a sorozatban, de egy „ a ”-nál bármennyivel kisebb számnál nem nagyobb már csak véges sok. Hasonlóképp „ A ” a limes superiorja az $\{a_n\}$ sorozatnak, ha végtelen sok „ A ”-nál nem nagyobb elemet találhatunk a sorozatban, de egy „ A ”-nál akármennyivel nagyobb számnál nem kisebbet már csak véges sokat.

A definícióból egyébként azonnal következik, hogy konvergens sorozat esetén a határérték egyenlő a \limsup -ral is és a \liminf -ral is.

A végtelen sorokkal kapcsolatos feladatoknál igen gyakran megelégszünk a \limsup -ra, illetve \liminf -ra vonatkozó becslésekkel. Ezért feladataink között az ilyen becsléseket megkönnyítő egyenlőtlenségek igazolása is szerepel.

Példák és feladatok

1. Tekintsük az $\{a_n\}$ számsorozatot, és igazoljuk, hogy fennállnak a következő összefüggések:

$$\frac{1}{\overline{\lim} a_n} = \underline{\lim} \frac{1}{a_n}; \quad \underline{\lim} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\overline{\lim} a_n}.$$

Megoldás: Vizsgáljuk pl. az első összefüggést. A bevezetésben megadtunk a limes superiorra egy, az eredetivel ekvivalens definíciót, amelyet a gyakorlatban sokkal eredményesebben használhatunk, mint az eredetit, és amely szerint az A szám akkor és csak akkor a limes superiorja az $\{a_n\}$ számsorozatnak, ha A -nál nem nagyobb elem még végtelen sok van a sorozatban, de (az A -nál bármilyen kicsivel nagyobb) $A + \varepsilon$ -nál nem kisebb már csak véges számú. Ekkor azonban az $\frac{1}{a_n}$ számsorozatban végtelen sok olyan elem van, amely nem kisebb $\frac{1}{A}$ -nál, de egy az $\frac{1}{A}$ -nál bármilyen kicsivel kisebb $\frac{1}{A + \varepsilon}$ számnál nem nagyobb már csak véges sok, következésképp $\frac{1}{A}$ a limes inferiorja az $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ sorozatnak: $\underline{\lim} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{A} = \frac{1}{\overline{\lim} a_n}$, q. e. d.

Ugyanígyen gondolatmenet alapján igazolható a másik reláció is.

2. Határozzuk meg az

$$\left\{a_n = (-1)^n + 3 \cos n \frac{\pi}{2}\right\}$$

sorozat limes superiorját és limes inferiorját, azaz $\overline{\lim} a_n$ és $\underline{\lim} a_n$ értékét.

3. $\left\{ b_n = \left(1 - \frac{[-1]^n}{n} \right)^n \right\}; \quad \underline{\lim} b_n = ?; \quad \overline{\lim} b_n = ?$

4. Az $a_1; a_2; \dots$ sorozat általános tagja

$$a_n = \frac{1}{2^{-n} + (-1)^n}.$$

Határozzuk meg $\underline{\lim} a_n$ és $\overline{\lim} a_n$ értékét.

5. Adott a következő sorozat:

a) $\{b_n = n^2\};$

b) $\{b_n = (-1)^n n^2\};$

c) $\{b_n = -n\};$

d) $\{b_n = (-n)^n\};$

e) $\left\{ b_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right\};$

f) $\left\{ b_n = \frac{(-1)^n}{n} \right\};$

g) $\left\{ b_n = a + n^{[(-1)^n]} \right\};$

h) $\left\{ b_n = a + \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \right\}.$

Határozzuk meg $\underline{\lim} b_n$ és $\overline{\lim} b_n$ értékét.

6. Igazoljuk, hogy ha $\overline{\lim} b_n = \beta$, akkor $\overline{\lim} e^{b_n} = e^\beta$.

7. Tegyük fel, hogy az $\{a_n\}$ és a $\{b_n\}$ sorozat is korlátos. Igazoljuk a következő egyenlőtlenségeket:

$$\overline{\lim} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n;$$

$$\overline{\lim} a_n \cdot b_n \leq \overline{\lim} a_n \cdot \overline{\lim} b_n;$$

$$\overline{\lim} (a_n - b_n) \geq \overline{\lim} a_n - \overline{\lim} b_n \geq \underline{\lim} a_n - \underline{\lim} b_n \geq \underline{\lim} (a_n - b_n);$$

$$\overline{\lim} b_n \geq \overline{\lim} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \geq \underline{\lim} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \geq \underline{\lim} b_n.$$

8. A $\{b_n\}$ sorozat legyen konvergens, és határértékét jelöljük β -val. Igazoljuk a következő egyenlőségeket:

$$\underline{\lim} (a_n + b_n) = \beta + \underline{\lim} a_n, \quad \overline{\lim} (a_n + b_n) = \beta + \overline{\lim} a_n, \quad \underline{\lim} a_n b_n = \beta \cdot \underline{\lim} a_n, *$$

9. Jelentsen $\{a_n\}$ egy tetszőleges számsorozatot. Igazoljuk, hogy a

$$\underline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

egyenlőtlenségrendszer mindig fennáll. (L. pl. Knopp: Unendliche Reihen, 270. o.)

* A $\underline{\lim}$ jelentése: Az egyenlőség fennáll a bal és jobb oldal limes superiorja között is, a bal és jobb oldal limes inferiorja között is.

2. §. VÉGTELEN SOROK KONVERGENCIA-KRITÉRIUMAI. MŰVELETEK SOROKKAL

a) Sorok konvergencia-kritériumai

a) Bevezetés

Az összeadás művelete csak véges számú összeadandó esetében tekinthető minden további nélkül értelmezettnek. Ha tehát adva van a számoknak egy végtelen sorozata: $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots$ akkor az $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ „összegnek”, amelyet röviden így jelölünk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

közvetlenül semmi értelme nincs. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ szimbólumnak a következő definíció ad csak konkrét értelmet:

Tekintsük az

$$S_1 = a_1; S_2 = a_1 + a_2; \dots; S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k; \dots$$

számoknak, a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor ún. részletösszegeinek vagy szeleteinek sorozatát.

Amennyiben az $\{S_n\}$ sorozat konvergens (illetve határozottan divergens), az esetben a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sort is konvergensnek, összetartónak (illetve határozottan divergensnek)

nevezzük, az $\{S_n\}$ sorozat határértékét pedig a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor összegének tekintjük. A sort definiáló $\{a_n\}$ sorozat egyes elemeit — mintegy az összeadás műveletére hivatkozva — a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor tagjainak is nevezzük.

Az 1. §-ban a sorozatokkal foglalkozva a konvergencia és a határérték kérdését általában egyszerre vetettük fel (bár a határérték meghatározása legtöbbször lényegesen nehezebb, mint a konvergencia eldöntése). Végtelen sorok esetében viszont a két kérdést külön szokták felvetni, egyrészt azért, mert sorok esetében általában lényegesen nehezebb az összeg meghatározása, másrészt azért, mert végtelen sorok esetében nagyon sok használható módszert, pontosabban ún. konvergencia-kritériumokat ismerünk, amelyek segítségével a fő kérdést, a sor konvergenciájának kérdését egyszerűen el tudjuk dönteni.

A végtelen sorokat — elsősorban a konvergencia-kritériumok használhatósága szempontjából — négy csoportra osztjuk. Az első 3 csoportba tartoznak azok a végtelen sorok, amelyeknek valamennyi tagjai nem-negatív szám (pozitív tagú sorok), illetve valamennyi tagja nem-pozitív szám (negatív tagú sorok), illetve azok a sorok, amelyeknek véges számú tagtól eltekintve valamennyi tagja egyező előjelű. Ezekre a sorokra érvényesek mindazok a konvergencia-kritériumok, amelyeket pozitív tagú sorokra mondunk csak ki. Hogy a negatív tagú sorokra érvényesek ezek a kritériumok, az azonnal következik abból, hogy a sor tagjait —1-gyel megszorozva, olyan végtelen sort kapunk, amelynek részletösszegei épp —1-szeresei az eredeti sor részletösszegeinek. A részletösszegek e két sorozata tehát együtt konvergens vagy divergens, sőt, ha konvergens, határértékük — azaz a két sor összege — egymásnak épp —1-szerese. Ami a felsorolt harmadik típust illeti, nem közvetlenül azt a tényt láttatjuk be, hogy e sorokra is érvényesek a pozitív tagú sorokra kimondott konvergencia-kritériumok, hanem egy ennél kissé általánosabb tételre hivatkozunk:

Egy végtelen sor konvergens vagy divergens voltát nem befolyásoljuk akkor, ha véges számú tagot megváltoztatunk az eredeti sorban.

A negyedik csoportba azok a sorok tartoznak, amelyeknek a tagjai között végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív szám is található. Ilyen típusú sorok konvergencia-viszonyait már lényegesen nehezebben tudjuk megállapítani, mert gyengébbek a rájuk is alkalmazható konvergencia-kritériumaink. E sorokkal kapcsolatban azonban csaknem ugyanolyan fontos az, hogy a sor tagjainak abszolút értékéből alkotott sor is konvergens-e, azaz, hogy a sor abszolút konvergens-e, mint az, hogy egyáltalán konvergens-e. Márpedig az abszolút konvergencia kérdését ismét csak a pozitív tagú sorokra vonatkozó konvergencia-kritériumok segítségével dönthetjük el.

Megjegyezzük, hogy a legutolsó csoportban olyan sorok is előfordulnak, amelyek tagjai felváltva pozitív, illetve negatív előjelűek (ha esetleg ezt a váltakozást 0 értékű tagok megszakítanak, azokat természetesen figyelmen kívül hagyhatjuk). Ezeket *alternáló soroknak* nevezzük.

β) Pozitív tagú sorok konvergencia-kritériumai

A pozitív tagú sorok vagy konvergens, vagy határozottan divergens, hiszen részletösszegeik monoton növekedő sorozatot alkotnak. Az előbb említett konvergencia-kritériumok nagyrészt úgy jöttek létre, hogy az adott sort egy — a konvergenciaviszonyok szempontjából ismert — sorral hasonlítjuk össze. Az összehasonlítás alapgondolata, hogy a pozitív tagú sorok akkor és csakis akkor konverghatnak, ha részletösszegeik sorozata felülről korlátos; ugyanis a részletösszegek sorozata, mint említettük, monoton növekedő. Ha tehát találunk egy olyan konvergens sort, amelynek valamennyi szelete nagyobb, mint a vizsgált sor megfelelő indexű szelete, akkor e sor nyilván konvergens, mert szeletei korlátosak. Ez esetben az ismert sort majoráló sornak nevezzük. Ha viszont egy olyan pozitív tagú divergens sort találunk, amelynek végtelen sok szelete kisebb, mint az adott sor ugyanilyen indexű szelete, akkor e sor nyilván divergens, mert szeletei nem korlátosak. Ez esetben az ismert sort minoráló sornak nevezzük.

A következőkben röviden összefoglaljuk a legfontosabb konvergencia-kritériumokat. Megjegyezzük, hogy a feladatok között további, ritkábban használt kritériumok is szerepelnek; a kritériumok igazolását is ott találhatjuk. A következőkben, a jelölések egyöntetűsége kedvéért a konvergens majoráló sor n -edik tagját c_n -nel, a divergens

minoráló sor n -edik tagját d_n -nel jelöljük. Az alapvető összehasonlító kritériumot így fogalmazhatjuk meg :*

Tegyük fel, hogy $b_n > 0$; $a_n > 0$ és a $\left\{ \frac{b_n}{a_n} \right\}$ sorozat két véges és 0-tól különböző korlát között marad, azaz

$$0 < \alpha_1 \leq \frac{b_n}{a_n} \leq \alpha_2,$$

hacsak n már elég nagy, azaz $n > n_0$. Ez esetben a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok vagy mindketten konvergens, vagy mindkettő határozottan divergens.

Hányadoskritérium: A pozitív tagú $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor

konvergens, ha egy n_0 indextől kezdve $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \alpha < 1$;

divergens, ha egy n_1 indextől kezdve $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.

A hányadoskritérium két finomabb alakja :

Raabe-kritérium. Fenti sor konvergens, ha egy n_0 indextől kezdve

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{\alpha}{n}, \text{ és } \alpha > 1,$$

de divergens, ha valamely n_1 -től kezdve

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

Ennél valamivel élesebb konvergencia-kritériumot, illetve divergencia-kritériumot adott meg Gauss :

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor két egymást követő tagjának hányadosát írjuk ilyen alakban:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} - \frac{\vartheta_n}{n^\lambda};$$

ahol λ tetszőleges 1-nél nagyobb szám, $\{\vartheta_n\}$ pedig tetszőleges (és két oldalról) korlátos számsorozat.

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha $\alpha > 1$,
de divergens, ha $\alpha \leq 1$.

A gyökkritérium: A pozitív tagú $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha (valamely n_0 indextől kezdve)

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \alpha < 1, \text{ de divergens, ha } \sqrt[n]{a_n} \geq 1.$$

* Valamennyi itt felsorolt kritérium megtalálható pl. Szász: Diff. és int. I. kötetében.

Egy igen egyszerű kritériumot, az ún. *Mac Laurin—Cauchy*-féle integrálkritériumot alkalmazhatunk olyan pozitív tagú sorok konvergenciavizsgálatainál, amelyek tagjai egy n_0 indextől kezdve monoton csökkenő sorozatot alkotnak.

Jelentsen $f(x)$ olyan monoton csökkenő pozitív függvényt, amelyre

$$f(n) = a_n, \quad \text{ha} \quad n \geq n_0.$$

Ez esetben az $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$ improprius integrál és a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor együtt konvergál vagy divergál.

γ) Általános sorok

Ha a sor tagjai között végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív szám található, akkor a konvergenciavizsgálat elég nehéz feladatot jelent. Leghatásosabb segédeszközünk ekkor az ún. *Cauchy—Bolzano*-féle konvergencia-kritérium, amely tulajdonképp a sor részletösszegeinek sorozatára vonatkozó *Cauchy*-féle kritériumnak felel meg, és amely ennek következtében természetesen akkor is használható, ha pl. pozitív tagú sorról van szó:

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható egy olyan $N = N(\varepsilon)$ index, hogy bármely $n \geq N$ mellett

$$|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon,$$

bármilyen természetes számot jelent is p .

Olyan konvergencia-kritériumunk egyáltalán nincs, amely az $\{a_n\}$ sorozat valamely származéksorozata alapján (pl. $\sqrt[n]{a_n}$ stb.) tudna választ adni általános esetben a konvergenciaviszonyokra. A *Cauchy—Bolzano*-tételt azonban gyakran jól fel tudjuk használni egy viszonylag egyszerű átrendezés, az ún. *Abel*-féle átrendezés után. E célból tegyük fel, hogy a vizsgálandó sor tagjai két számsorozat, $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ azonos indexű elemeinek szorzataiképp jöttek létre, azaz a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ sorról legyen szó. Jelöljük továbbá a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor n -edik szeletét A_n -nel: $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

$$\text{Ekkor} \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_{n+p} b_{n+p+1} - A_n b_{n+1}.$$

Valamely n_0 indextől alternáló és abszolút értékben monoton csökkenő tagú sorokra fennáll *Leibnitz* igen egyszerű tétele: Fenti sorok konvergens, ha a tagok 0 sorozatot alkotnak.*

Megjegyezzük még, hogy egy sor csak akkor lehet konvergens, ha tagjai 0 sorozatot alkotnak.

* Ez az *Abel*-féle átrendezés alapján azonnal belátható.

Példák és feladatok

α | 1. Konvergens-e a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor?

Megoldás: Ha felírjuk a részletösszegek sorozatát, igen könnyen beláthatjuk, hogy a sor (határozottan) divergens. Ugyanis,

$$S_1 = 1; \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2} > 2 \cdot \frac{1}{2} = 1;$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2};$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{8} > 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2};$$

$$S_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{16} > 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2};$$

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} > 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n-1}{2}$$

Azonnal látható, hogy a részletösszegek sorozata monoton növekedő, és — tekintettel az $S_{2^n} > \frac{n}{2}$ relációra — nem marad korlátos. Így a részletösszegek sorozatának

határértéke $+\infty$, azaz a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor divergens (határozottan).

2. Konvergens-e a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ sor?

3. Konvergens-e a $\sum_{k=1}^{15} (-1)^k \frac{1}{k} + \sum_{k=16}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor?

4. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{1516} q^n (-1)^{n^2} + \sum_{n=1517}^{\infty} q^n$ sor?

$|q| < 1$; $q = 1$, illetve $q = -1$, végül $|q| > 1$ esetben?

5. Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{500} \frac{1}{n^2} \cos n \frac{\pi}{2} + \sum_{n=501}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos (2n+1) \pi$$

sor?

6. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^3}$ sor?

7. Egy csokoládégyár 10 Ft-os áron hoz forgalomba egy tábla tejcsokoládét. Minden tábla csokoládéhoz mellékelnek egy bont, 10 bonért pedig egy újabb tábla csokoládé kapható (szintén bonnal). Mennyi a tényleges ára a csokoládénak? Hogyan vásárol az ügyes vásárló?

8. (L. a 7. feladatot.) Ha a 10 (kis) bonért kiszolgáltató tábla csokoládé „nagy bon“-t tartalmaz, s öt nagy bon ellenében egy tábla (kis bonnal ellátott) csokoládét kaphatunk, mennyi a tényleges ára egy tábla csokoládénak? Hogyan vásárol ez esetben az ügyes vásárló?

β Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a feladatok között szereplő ún. összehasonlító kritériumokkal kapcsolatban a konvergens majoráns sor tagjait c_n -nel, a divergens minoráns sor tagjait d_n -nel jelöljük konzekvensen!

1. Igazoljuk, hogy

a) a pozitív tagú $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha egy bizonyos (tetszős szerinti nagy, de konkrétan megállapítható) n_0 -tól kezdve $a_n \leq c_n$, hacsak $n > n_0$.

b) a pozitív tagú $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens, ha $a_n \geq d_n$, hacsak $n > n_0$.

2. Igazoljuk, hogy a pozitív tagú $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha egy bizonyos (bármilyen távoli, de numerikusan megadható) n_0 -tól kezdve

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n}, \quad \text{hacsak } n > n_0,$$

de divergens, ha $n > n_0$ esetben minden n -re: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{d_{n+1}}{d_n}$.

3. Mutassuk ki, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k + (-1)^k \cdot k}$ sor divergens.

Megoldás: a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sorról kimutattuk (2. § a) α) 1.), hogy divergens. Divergens

ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ sor is, márpedig ez minorálja a megadott $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k + (-1)^k k}$ sort!

4. Konvergens-e a $\sum_{z=1}^{\infty} e^{-z} \ln \left[1 + \frac{1}{z} \right]^z$ sor?

5. Legyen $p > 0$; $q > 0$. Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p+1)(2p+1)\dots(np+1)}{(q+1)(2q+1)\dots(nq+1)}$$

sor, ha $p < q$?

Megoldás:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)p+1}{(n+1)q+1} = \frac{p + \frac{1}{n+1}}{q + \frac{1}{n+1}} \leq \frac{p+1}{q+1} < 1.$$

Fenti egyenlőtlenségek közül egyedül a $\frac{p + \frac{1}{n+1}}{q + \frac{1}{n+1}} < \frac{p+1}{q+1}$ (ha $p < q$) nem triviális. Igen könnyen igazolható azonban pl. függvényvizsgálattal. Ezt az olvasóra bizzuk.

Képezzük most a következő sorozatot:

$$c_1 = 1; \quad c_2 = \frac{p+1}{q+1}; \quad c_3 = \left(\frac{p+1}{q+1}\right)^2; \quad \dots; \quad c_n = \left(\frac{p+1}{q+1}\right)^{n-1}; \dots$$

Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ geometriai sor konvergens, mert hányadosa: $\frac{p+1}{q+1} < 1$.

De az előző reláció értelmében $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{p + \frac{1}{n+1}}{q + \frac{1}{n+1}} < \frac{p+1}{q+1} = \frac{c_{n+1}}{c_n}$, tehát a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p+1)(2p+1)\dots(np+1)}{(q+1)(2q+1)\dots(nq+1)}$$

sor konvergens (a $p > 0$; $q > 0$; $p < q$ relációk fennállása esetén).

6. Milyen relációnak kell fennállnia p és q között, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(1+p)(2+p)\dots(n+p)}{q(1+q)(2+q)\dots(n+q)}$$

sor konvergens legyen? ($p > 0$; $q > 0$).

7. Az összehasonlító kritériumoknak van egy — a gyakorlatban sokkal jobban használható — más alakja is.

Legyen a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, illetve divergens. Képezzük a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor tagjaiból a $\frac{b_n}{a_n}$ értékek sorozatát. Igazoljuk, hogy ha valamely $n = n_0$ -tól kezdve a $\frac{b_n}{a_n}$ hányados két véges és 0-tól különböző korlát közt marad:

$$0 < \alpha_1 \leq \frac{b_n}{a_n} \leq \alpha_2;$$

bármekkora is $n > n_0$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pozitív tagú sorok együtt konvergensek vagy divergensek.

8. Határozzuk meg ennek alapján, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+a} \right]$$

sor a mely értékeire konvergens?

9. Határozzuk meg, hogy a

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{v} \right)^S \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{1}{v} \right)^{S^2}$$

sor S milyen értékei mellett konvergens?

Megoldás. A Bernoulli–l'Hospital-tételt felhasználva kis számolással igazolhatjuk, hogy $\frac{(\sin x)^S (\operatorname{tg} x)^{S^2}}{x^{S+S^2}} \rightarrow 1$, ha $x \rightarrow 0$, továbbá a függvény monoton növekedő a

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ szakaszon. Ennek következtében a

$$\frac{\left(\sin \frac{1}{v} \right)^S \left(\operatorname{tg} \frac{1}{v} \right)^{S^2}}{\frac{1}{v^{S+S^2}}} \quad (v = 1, 2, \dots)$$

sorozat monoton csökkenő, és határértéke 1.

A $v = 1$ esetben viszont (itt veszi fel a hányadossorozat legnagyobb értékét a monotonitás folytán) a tört értéke:

$$\frac{(\sin 1)^S (\operatorname{tg} 1)^{S^2}}{1} < \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^S (\sqrt{3})^{S^2} = \frac{3^{\frac{S+S^2}{2}}}{2^S}.$$

Vagyis

$$b_v = \left(\sin \frac{1}{v} \right)^S \left(\operatorname{tg} \frac{1}{v} \right)^{S^2}; \quad a_v = \frac{1}{v^{S+S^2}}$$

választás mellett

$$1 \leq \frac{b_v}{a_v} = \frac{\left(\sin \frac{1}{v} \right)^S \left(\operatorname{tg} \frac{1}{v} \right)^{S^2}}{\frac{1}{v^{S+S^2}}} \leq \frac{3^{\frac{S+S^2}{2}}}{2^S},$$

hacsak $v \geq 1$. A 7. feladatban megismert összehasonlító kritérium tehát alkalmazható.

A 2. § a) β) 15. feladatban látjuk majd, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^S}$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $S > 1$. Ezek szerint az $S^2 + S > 1$ relációnak kell fennállnia, hogy az eredeti sor konvergens legyen. A relációt átírva:

$S^2 + S - 1 > 0$. Az $y = S^2 + S - 1$ parabolának két metszéspontja (gyöke) van az x tengelyen:

$$S_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \quad S_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Ha tehát

$$S > \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \text{vagy} \quad S < -\frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

akkor a sor konvergens,

$$-\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \leq S \leq \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

esetén azonban divergens a sor.

A geometriai sorral összehasonlítva a pozitív tagú $\sum a_n$ sort, a következő két egyszerű kritériumot kapjuk:

10. Igazoljuk, hogy

1. a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha egy bizonyos n_0 -tól kezdve minden $n > n_0$ indexre

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq a < 1 \quad (\text{hányadoskritérium}).$$

2. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens, ha egy bizonyos n_1 -től kezdve $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.

3. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha egy bizonyos n_0 -tól kezdve $\sqrt[n]{a_n} \leq a < 1$.

4. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens, ha egy bizonyos n_1 -től kezdve $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$.

(Megjegyzés. Az a tény, hogy a hányados, illetve gyökkritériummal kapcsolatban nem azt kell egyszerűen megkövetelnünk, hogy a két egymást követő tag hányadosa, illetve hogy az n -edik tag n -edik gyöke 1-nél, hanem egy 1-nél kisebb számnál (a -nál) is kisebb legyen, pontosabban, hogy a -nál ne legyen nagyobb, igen lényeges! Gondoljunk pl. a harmonikus sorra $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$, amelyről tudjuk, hogy divergens.)

Fenti konvergenca-kritériumok csak elég ritkán használhatók, mert a legtöbb esetben $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, illetve $\sqrt[n]{a_n}$ határértéke 1. Ha az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, illetve $\sqrt[n]{a_n}$ értékekből alkotott

sorozat felülről (ti. 1-nél nagyobb számok felől) közelíti meg 1-et, akkor a divergencia-kritériumok szerint biztosan divergens a Kérdéses sor. Ha azonban alulról tart a kritériumban szereplő hányados, illetve a gyök az 1-hez, konvergencia-kritériumaink nem adnak pozitív választ. (Lásd előbbi megjegyzést.) Ezért élesebb kritériumokra van szükségünk.

11. Tegyük fel, hogy a pozitív tagú $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorhoz képezett $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, illetve az $\sqrt[n]{a_n}$ értékekből alkotott sorozat nem konvergens. Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor bizonyosan konvergens, ha

$$\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \text{ illetve } \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1.$$

Igazoljuk továbbá alkalmasan megszerkesztett példák, hogy a feladatban megadott kritériumok közül az első csak elégséges, de nem szükséges (szemben azzal az esettel, amikor az $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$ sorozatnak határértéke is volt), azaz, ha $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ egynél nagyobb, még nem következik a sor divergens volta.

(Pl. konvergens, pozitív tagú sorokban, bizonyos szabály szerint felcserélve egymással tagokat, ilyen ellenpéldákat tömegesen gyárthatunk.) Igazoljuk továbbá, hogy a $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$ relációból következik, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens. Míg tehát a $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ értékének ismeretében csak azt tudjuk biztosítani, hogy a sor konvergál — azaz ha $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ nem kisebb egynél, sőt bármilyen nagy is, ebből nem tudunk következtetni arra, hogy a sor divergál-e —, addig:

$$A \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ pozitív tagú sor } \begin{cases} \text{konvergál, ha } \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1, \\ \text{divergál, ha } \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1. \end{cases}$$

12. Igazoljuk, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(1+r^2)^n}$$

sor r minden értéke mellett konvergens!

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{r^2}{1+r^2} < 1 \text{ és } n\text{-től független,}$$

tehát a sor r minden értékénél konvergens!

13. x milyen értékeinél konvergens a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$$

sor?

Megoldás : A vizsgálatot elegendő x pozitív értékeire elvégezni, mert x előjelétől a tagok értéke független.

$|x| = 1$ esetben a sor bizonyosan divergens, mert minden tagjának értéke $\frac{1}{2}$.

x más értékeire egyébként a gyökkritérium segítségével végezhetjük el a konvergencia-vizsgálatot:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{1 + x^{4n}}} = \frac{x^2}{(1 + x^{4n})^{\frac{1}{n}}}.$$

$|x| < 1$ esetében a nevező egynél bizonyosan nagyobb (egynél nagyobb számnak bármelyik gyöke nagyobb egynél), így

$$\sqrt[n]{a_n} < x^2 < 1,$$

a sor tehát konvergens. $|x| > 1$ esetében így folytathatjuk: ha a nevezőt csökkentjük, a tört értékét bizonyosan növeljük:

$$\sqrt[n]{a_n} < \frac{x^2}{(x^{4n})^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{x^2} < 1,$$

tehát a sor konvergens. A sor tehát az $x = \pm 1$ értékek kivételével x minden értékére konvergens.

14. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sorhoz elkészítjük az egymást követő tagok hányadosainak sorozatát, az

$$\frac{a_2}{a_1}; \quad \frac{a_3}{a_2}; \dots; \quad \frac{a_{n+1}}{a_n}; \dots$$

sorozatot. Igazoljuk, hogy a sor

$$\begin{array}{l} \text{konvergens} \\ \text{divergens} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{ha valamely } n_0 \text{ indextől kezdve minden } n_0\text{-nál nagyobb } n \text{ indexre} \\ \text{érvényes az} \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{\alpha}{n} \\ \text{egyenlőtlenség, és pedig valamely egynél nagyobb (rögzített) } \alpha\text{-val} \\ (\alpha > 1); \\ \text{ha valamely } n_1 \text{ indextől kezdve minden } n_1\text{-nél nagyobb } n \text{ indexre} \\ \text{érvényes az} \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} \\ \text{egyenlőtlenség.} \end{array} \right.$$

(Raabe-kritérium.)*

* Más gondolatmeneten alapuló bizonyítást találunk pl. Szász: Diff. és int., I. 594. o.

Útbaigazítás: A konvergencia bizonyítása igen egyszerű gondolatmeneten nyugszik. Ha ugyanis érvényes az

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{\alpha}{n}, \text{ hacsak } n > n_0$$

reláció valamely $\alpha > 1$ rögzített állandóval, akkor egyszerű átrendezéssel adódik az

$$(n-1)a_n - na_{n+1} \geq (\alpha-1)a_n$$

reláció is. Ha tehát sikerül igazolnunk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} [(n-1)a_n - na_{n+1}]$ sor konver-

gál, akkor konvergál a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha-1} [(n-1)a_n - na_{n+1}]$ sor is, ez pedig majorálja leg-

utolsó egyenlőtlenségünk szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort. A részleteket az olvasóra bízunk.

A divergencia-kritérium igazolása még egyszerűbb. Ti. csak a 2. § a) 1. feladatának eredményét és a 2. § a) β) 7. feladatban igazolt tételt kell felhasználni, s az állítás már is adódik.

15. Vizsgáljuk meg a Raabe-kritériummal, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

sor konvergens-e: a) $\alpha > 1$; b) $\alpha = 1$; c) $\alpha < 1$ esetben?

16. Vizsgáljuk meg a Raabe-kritériummal, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\alpha} n}$ sor konvergens-e: a) $\alpha < 1$; b) $\alpha = 1$; c) $\alpha > 1$ esetben?

17. Mutassuk ki, hogy ($p_1 > 0$; $p_2 > 0$; $q_1 > 0$; $q_2 > 0$) a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+p_1)(1+p_2)(1+2p_1)(1+2p_2)\dots(1+np_1)(1+np_2)}{(1+q_1)(1+q_2)(1+2q_1)(1+2q_2)\dots(1+np_1)(1+nq_2)}$$

sor konvergens, ha $p_1 p_2 < q_1 q_2$;

de divergens, ha $p_1 p_2 > q_1 q_2$. Ha $p_1 p_2 = q_1 q_2$, akkor az

$1 + q_1 + q_2 > (1 + p_1)(1 + p_2)$ reláció fennállása a konvergencia feltétele.

Megoldás: Elsősorban nyilván az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ törtet vizsgáljuk:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[1 + (n+1)p_1][1 + (n+1)p_2]}{[1 + (n+1)q_1][1 + (n+1)q_2]} = \frac{1 + (n+1)(p_1 + p_2) + (n+1)^2 p_1 p_2}{1 + (n+1)(q_1 + q_2) + (n+1)^2 q_1 q_2}.$$

Hogy a Raabe-kritériumot — amely alkalmasnak látszik a tört alakjából ítélve a probléma eldöntéséhez — alkalmazhassuk, a számlálót és nevezőt úgy kell átalakítani, hogy mind-

kettő $\frac{1}{n}$ hatványai szerint legyen rendezve; így kaphatjuk csak meg osztás révén a kritériumban szereplő alakot; az osztást természetesen csak oly pontossággal kell foly-

tatni, amennyit a kritérium megkíván, azaz az $\frac{1}{n}$ első hatványát tartalmazó tagot még pontosan kell számolni;

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1 + (p_1 + p_2) + p_1 p_2 + n(p_1 + p_2 + 2 p_1 p_2) + n^2 p_1 p_2}{1 + (q_1 + q_2) + q_1 q_2 + n(q_1 + q_2 + 2 q_1 q_2) + n^2 q_1 q_2} = \\ &= \frac{p_1 p_2 + \frac{1}{n}(p_1 + p_2 + 2 p_1 p_2) + \dots}{q_1 q_2 + \frac{1}{n}(q_1 + q_2 + 2 q_1 q_2) + \dots} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2} - \\ &\quad - \frac{1}{n} \frac{p_1 p_2 (q_1 + q_2) - q_1 q_2 (p_1 + p_2)}{p_1^2 p_2^2} + \dots\end{aligned}$$

Amennyiben tehát $p_1 p_2 < q_1 q_2$, akkor $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2} < 1$,

és a sor bizonyosan $\begin{cases} \text{konvergens} \\ \text{divergens.} \end{cases}$ Ha viszont $p_1 p_2 = q_1 q_2$, akkor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} \frac{q_1 + q_2 - (p_1 + p_2)}{q_1 q_2} + \frac{1}{n^2} \{ \dots \},^*$$

mert a $q_1 q_2 = p_1 p_2$ -vel egyszerűsíteni lehet. A Raabe-kritérium szerint ekkor a $-\frac{1}{n}$ együtthatójának 1-nél nagyobbának kell lenni, azaz:

$$\frac{q_1 + q_2 - (p_1 + p_2)}{q_1 q_2} > 1; \quad (q_1 + q_2) - (p_1 + p_2) > q_1 q_2$$

szükséges tehát ahhoz, hogy a sor konvergens legyen. Kissé átrendezve, majd mindkét oldalt 1-gyel bővítve, és a $p_1 p_2 = q_1 q_2$ relációt felhasználva, a konvergencia szükséges feltétele:

$$q_1 + q_2 + 1 > q_1 q_2 + p_1 + p_2 + 1 = p_1 p_2 + p_1 + p_2 + 1 = (p_1 + 1)(p_2 + 1),$$

q. e. d.

18. Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha $n \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq -\alpha \quad (\alpha > 1)$,

hacsak $n > n_0$, de divergens, ha minden $n > n_0$ indexre $n \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq -1$

(Schlömlich-kritérium).**

* Az $\frac{1}{n}$ együtthatójú tagot az $\frac{1}{n}$ együtthatójába beolvasztva, az $\frac{1}{n}$ együtthatóját tetszőlegesen kevésbé befolyásolja, ha n már elég nagy, s így a számolásnál nem is kell vele törődnünk.

** L. pl. Knopp: Unendliche Reihen. 279. o. A kritérium egyébként a Raabe-féle közvetlen következménye.

19. x milyen értékeinél konvergens a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-x)(n-1-x)(n-2-x)\dots(1-x)}{n!}$$

sor?

20. Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-x \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right]}$$

sor?

Megoldás: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-\frac{x}{n+1}}$. Ebből láthatjuk, hogy a *Schlömilch*-kritériumot lesz célszerű a konvergenciavizsgálatnál felhasználni:

$$n \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = n \ln e^{-\frac{x}{n+1}} = -x \frac{n}{n+1}.$$

Ezek szerint: $x > 1$ esetén a sor bizonyosan konvergens,
 $x < 1$ esetén a sor bizonyosan divergens.

$x = 1$ esetben — ahogy azt könnyen beláthatjuk (pl. a 2. § α) β) 25. feladat alapján) — lényegében a harmonikus sorra jutunk, amely tudvalevően divergens.

21. Igazoljuk, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)}{n! \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+n-1)} x^n$$

sor $|x| < 1$ esetén α , β és γ értékétől függetlenül konvergens, $|x| > 1$ esetén feltétlenül divergens. (Fenti sor az ún. *hipergeometrikus sor*, az ún. *hipergeometrikus függvényt* definiálja.)*

Milyen egyenlőtlenségnek kell fennállnia α , β és γ között, hogy a sor $x = 1$ esetén is konvergens legyen?

Megoldás:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)(\beta+n)}{(n+1)! \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)(\gamma+n)} x: \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n! \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} = \\ &= \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{\gamma}{n}\right)} x \rightarrow x, \end{aligned}$$

* Feltéve, hogy α , β , ill. γ nem negatív egész számok.

ha $n \rightarrow \infty$. Ha tehát $|x| < 1$, akkor a sor konvergens, $|x| > 1$ esetben pedig divergens. $x = 1$ esetben

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{\gamma}{n}\right)} = \frac{1 + \frac{\alpha + \beta}{n} + \frac{\alpha\beta}{n^2}}{1 + \frac{\gamma + 1}{n} + \frac{\gamma}{n^2}}.$$

Olyan alakra kell ezt a törtet hoznunk, hogy a Gauss-kritériumot alkalmazhassuk, azaz a hányadost $\frac{1}{n^2}$ koefficienséig számoljuk:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= 1 - \frac{\gamma + 1 - (\alpha + \beta)}{n} + \\ &+ \frac{\alpha\beta - \gamma + (\gamma + 1)^2 - (\alpha + \beta)(\gamma + 1) - \frac{\gamma}{n}[\alpha + \beta - \gamma - 1]}{1 + \frac{\gamma + 1}{n} + \frac{\gamma}{n^2}} + \\ &+ \frac{\gamma}{n^2}. \end{aligned}$$

A Gauss-kritérium szerint a $\left(-\frac{1}{n}\right)$ alakú tag együtthatója dönti el a konvergencia problémáját, feltéve, hogy a $\frac{\vartheta_n}{n^2}$ alakú tagban $\lambda > 1$ és $\{\vartheta_n\}$ korlátos számsorozat. Utóbbi azonban α, β, γ bármely értékénél bekövetkezik, mert bármekkora is α, β és γ ,

$$\{\vartheta_n\} = \left\{ \frac{\alpha\beta - \gamma + (\gamma + 1)^2 - (\alpha + \beta)(\gamma + 1) - \frac{\gamma}{n}[\alpha + \beta - \gamma - 1]}{1 + \frac{\gamma + 1}{n} + \frac{\gamma}{n^2}} \right\} < 2[\alpha\beta + \gamma + \gamma^2 + 1 - (\gamma + 1)(\alpha + \beta)],$$

ha n már elég nagy, következésképp $\{\vartheta_n\}$ valóban korlátos $\lambda = 2$ választással.

A $\left(-\frac{1}{n}\right)$ alakú tag együtthatója: $\gamma + 1 - (\alpha + \beta)$; a sor akkor konvergens, ha ez egynél nagyobb:

$$\gamma + 1 - (\alpha + \beta) > 1; \quad \gamma + 1 > \alpha + \beta + 1; \quad \text{azaz } \gamma > \alpha + \beta.$$

A sor tehát $\begin{cases} |x| < 1 & \text{esetén konvergens, bármekkora is } \alpha, \beta, \text{ illetve } \gamma; \\ x = 1 & \text{esetén konvergens, ha } \gamma > \alpha + \beta; \text{ divergens, ha } \gamma \leq \alpha + \beta; \\ |x| > 1 & \text{esetén divergens, bármilyen számot jelent is } \alpha \text{ és } \beta, \text{ illetve } \gamma. \end{cases}$

22. A *Cauchy–Mac Laurin*-féle integrálkritériummal kapcsolatban tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort, ahol is az $\{a_n\}$ számsorozat monoton csökkenő 0 sorozat. Legyen $f(x)$ az $x \geq n_0$ intervallumon pozitív, folytonos és monoton csökkenő függvény továbbá $f(n) = a_n$, ha $n \geq n_0$.

Adjunk becslést a

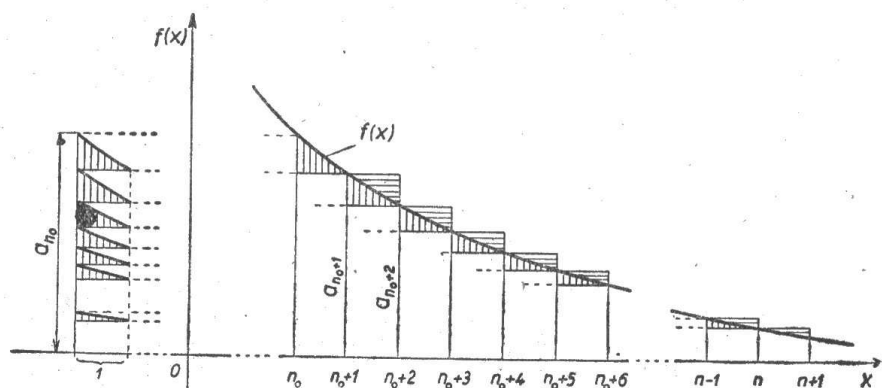
$$\left\{ \sum_{n=1}^{n_0} a_n + \int_{n_0}^N f(\xi) d\xi \right\} - \sum_{n=1}^N a_n \quad \text{és a} \quad \left\{ \sum_{n=1}^{n_0} a_n + \int_{n_0+1}^N f(\xi) d\xi \right\} - \sum_{n=1}^N a_n$$

különbségekre.

Útbaigazításul mellékeljük a 2. ábrát, továbbá a következő két becslést:

$$0 \leq \int_{n_0}^N f(\xi) d\xi - \sum_{k=n_0+1}^N a_k \leq a_{n_0} - a_N;$$

$$a_{N+1} - a_{n_0+1} \leq \int_{n_0+1}^N f(\xi) d\xi - \sum_{k=n_0+1}^N a_k \leq 0.$$



2. ábra

23. Mutassuk ki az integrálkritérium segítségével, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$$

sor divergens ($x \neq 0$ esetben).

24. Igazoljuk, hogy az

$$\{u_n\} = \left\{ \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} - \ln n \right\}$$

sorozat konvergens, és határértéke: C (az ún. *Euler*-féle állandó) 0 és 0,6 között van; igazoljuk továbbá, hogy az $\{u_n\}$ sorozat monoton csökkenő.

25. Igazoljuk, hogy a

$$\{v_n\} = \left\{ \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} - \frac{1}{2n} - n \right\}$$

sorozat konvergens; mutassuk ki továbbá, hogy a $\{v_n\}$ az előző feladat $\{u_n\}$ sorozatával intervallum-skatulyázást képez. Számítsuk ki ennek alapján C értékét 3 tizedesjegy pontossággig.

26. Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{n} \right]^n; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3n-5}{5n+8} \right]^n; \quad c) \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\frac{s^2-1}{s^2+1}};$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{n - \ln n}{n^2 + 3\sqrt{n}} \right]^{2\frac{n^2-1}{n+1}}; \quad e) \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^2 \cdot e^{-\nu^3}.$$

27. Konvergensek-e az alábbi sor $0 < \alpha < \beta < 1$ esetén?

$$\alpha + 2\beta + 3\alpha^2 + 4\beta^2 + 5\alpha^3 + 6\beta^3 + \dots + (2n-1)\alpha^n + 2n\beta^n + \dots$$

28. Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln^2 n}{1 + n^2 \ln^4 n}; \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(1+n^2)[1+\ln^2(1+n)]}}.$$

29. Konvergensek-e a

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n^3}; \quad b) \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[1 - \cos \frac{\pi}{\nu} \right]; \quad c) \sum_{s=1}^{\infty} \left[1 - \cos \left(s^{-\frac{5}{2}} \right) \right] \text{ sor?}$$

30. Konvergensek-e az

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n\pi + n}{n^{3/2}} \text{ sor?}$$

31. x milyen értékeire konvergens a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{x+n^2}-n)}{\ln^2 n}$ sor?

Megoldás: Elsősorban azt kell belátnunk, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{x+n^2}-n)}{\ln^2 n}$ sor tagjai n elég nagy értékénél valamennyien valósak és azonos — és pedig az x -ével egyező — előjelűek. Ehhez elegendő azt kimutatni, hogy a számlálóban szereplő függvény argumentuma

$$\sqrt{x+n^2}-n = n \left(\sqrt{1+\frac{x}{n^2}} - 1 \right)$$

n elég nagy értékeinél x előjelével azonos előjelű, és abszolút értékre π -nél kisebb szám. A konvergenciaviszonyok meghatározása céljából a tagok nagyságrendjét is meg kell becsülni.

Ha $x > 0$, akkor

$$n \left(\sqrt[1]{1 + \frac{x}{n^2}} - 1 \right)$$

is pozitív. Nagyságrendjét megbecsülendő a Bernoulli-féle egyenlőtlenséget használhatjuk fel (l. e sorozat A. II. kötet, 10. § 21. feladatát) éspedig fordított irányból. A Bernoulli-féle egyenlőtlenség szerint

$$(1 + a)^p \geq 1 + ap, \text{ azaz } \sqrt[p]{1 + ap} \leq 1 + a,$$

ha p természetes szám és $a > -1$. Nekiünk az

$$n \left(\sqrt[1]{1 + \frac{x}{n^2}} - 1 \right)$$

kifejezés felső-becslésére van szükségünk ($x > 0$), mert az alsó korlátot már ismerjük (ti. a kifejezés pozitív). Ezért a

$$\sqrt[1]{1 + \frac{x}{n^2}}$$

kifejezést kell felülről becsülnünk, ami a Bernoulli-féle egyenlőtlenség második alakja szerint

$$\sqrt[1]{1 + \frac{x}{n^2}} \leq 1 + \frac{x}{2n^2}, \text{ hacsak már } \frac{x}{2n^2} > -1, \text{ azaz minden } n\text{-re. Eszerint}$$

$$0 \leq n \left(\sqrt[1]{1 + \frac{x}{n^2}} - 1 \right) \leq n \left(1 + \frac{x}{2n^2} - 1 \right) = \frac{x}{2n},$$

ha $x \geq 0$, és $n > 0$; azaz ha n elég nagy, ti. ha $n > \frac{x}{2\pi}$, akkor argumentumuk valóban 0 és π közé esik. Ha viszont $x < 0$, akkor az

$$n \left(\sqrt[1]{1 + \frac{x}{n^2}} - 1 \right)$$

kifejezés csak akkor valós, ha $n \geq \sqrt{|x|}$. Ha már $n \geq \sqrt{|x|}$, akkor utóbbi kifejezés biztosan negatív, azaz a 0 egyik felső korlátja. Alsó korlátot igen könnyen kapunk, mert ha $n \geq \sqrt{|x|}$, akkor

$$0 \leq 1 + \frac{x}{n^2} < 1, \text{ és így } \sqrt[1]{1 + \frac{x}{n^2}} \leq 1 + \frac{x}{n^2}, \text{ következésképp}$$

$$n \left(1 + \frac{x}{n^2} - 1 \right) = \frac{x}{n} \leq n \left(\sqrt[1]{1 + \frac{x}{n^2}} - 1 \right) < 0;$$

ha tehát még $n > \frac{|x|}{\pi}$, akkor $n \left(\sqrt[1]{1 + \frac{x}{n^2}} - 1 \right)$ valóban $-\pi$ és 0 közé esik.

Az összehasonlító kritériumnak a 2. § a) β) 7. feladatban megismert alakját felhasználva, most már nagyon könnyen igazolhatjuk, hogy a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{x+n^2}-n)}{\ln^2 n}$$

sor x minden értékére konvergens.

Az előbb levezetett egyenlőtlenségekből ugyanis az is kiolvasható, hogy

$$|\sqrt{x+n^2}-n| \leq \frac{|x|}{n}, \text{ hacsak } n \geq \sqrt{|x|}. \text{ Jól ismert az a tény is, hogy}$$

$$|\sin x| \leq |x|, \text{ így tehát az adott sor tagjait a } \sum \frac{|x|}{n \ln^2 n}, \text{ illetve } \sum \frac{-|x|}{n \ln^2 n}$$

sor tagjai majorálják, illetve minorálják, ha csak $n \geq \max \left\{ \sqrt{|x|}; \frac{|x|}{\pi} \right\}$.

Így tehát, figyelembe véve a 2 § a) β) 16. feladat eredményeit, a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{x+n^2}-n)}{\ln^2 n}$$

sor x minden értékénél (abszolút) konvergens.

32. Az

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^p + \dots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}\right)^p + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p$$

sor p mely értékeinél konvergens?

33. p mely értékei mellett konvergens a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)(2n+3)} \right]^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!} \right]^p$$

sor?

34. α milyen értékeinél konvergens az

$$a) \sum_{v=1}^{\infty} \alpha^{\ln v}, \text{ illetve } b) \sum_{v=1}^{\infty} \alpha^{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{v}\right)} = \sum_{v=1}^{\infty} \alpha^{\left(\sum_{n=1}^v \frac{1}{n}\right)} \text{ sor?}$$

35. Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$a) \frac{2}{9} + \frac{2^2}{28} + \frac{2^3}{65} + \dots + \frac{2^{n-1}}{n^3+1} + \dots$$

$$b) \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{n}{2(n+1)(n+2)} + \dots$$

$$c) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

36. x mely értékeinél konvergensek az alábbi sorok:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5-x}} \quad b) \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2x-2} \right)^v \quad c) \sum_{s=1}^{\infty} s^{3x-4}$$

37. Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

sor?

38. Konvergens-e a

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin v \ln v}{v^3}$$

sor?

39. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha$ sor α valamilyen értékénél?

40. Legyen az

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots = \{a_n\}$$

pozitív elemű sorozat nullsorozat! Milyen feltételnek kell teljesülnie még a fenti sorozatra, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin a_n$$

sor konvergens legyen?

41. Határozzuk meg, hogy azon végtelen sorok között, amelyeknek általános tagját: a_n -et az alábbiakban megadjuk, vannak-e konvergensek, és melyek azok?

$$a) a_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}; \quad d) a_n = \frac{n^7}{n!}; \quad g) a_n = [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}];$$

$$b) a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad e) a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}; \quad h) a_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n};$$

$$c) a_n = \left(\frac{5+n}{n} \right); \quad f) a_n = \frac{n + \sqrt{n}}{n^2 - n}; \quad k) a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}.$$

42. x mely pozitív értékeinél konvergensek az alábbi sorok:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \binom{x+n}{n}; \quad b) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v^x}{v!}; \quad c) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^s}; \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{x} - 1);$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{x} - 1 - \frac{1}{n} \right); \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^x.$$

43. Konvergensek-e az alább megadott sorok:

$$a) (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{1}) + (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) + \dots + (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) + \dots$$

$$b) (1-1)^{1,0} + (\sqrt{2}-1)^{1,2} + (\sqrt[3]{3}-1)^{1,4} + \dots + (\sqrt[n]{n}-1)^{1+0,2(n-1)} + \dots$$

$$c) (1-1)^1 + (\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt[3]{3}-1)^3 + \dots + (\sqrt[n]{n}-1)^n + \dots$$

44. Összetartóak-e az alábbi sorok:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1};$$

$$c) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s}{s^3 + 1};$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}};$$

$$b) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v - 1};$$

$$d) \sum_{z=2}^{\infty} \frac{z}{z^3 - 1};$$

$$f) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}};$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$$

45. Állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek, és melyek nem:

$$a) \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n^2 + 3} + \dots \quad b) \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{26} + \dots + \frac{1}{3^n - 1} + \dots$$

$$c) \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{28} + \dots + \frac{1}{3^n + 1} + \dots$$

46. Keressük ki az alábbi sorok közül a konvergenseket:

$$a) \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{3}} + \dots \quad b) \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{5n} + \dots$$

$$c) \frac{4}{2 \cdot 3} + \frac{8}{3 \cdot 4} + \frac{12}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{4n}{(n+1)(n+2)} + \dots$$

$$d) \frac{4}{2 \cdot 3} - \frac{8}{3 \cdot 4} + \frac{12}{4 \cdot 5} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{4n}{(n+1)(n+2)} \pm \dots$$

$$e) \frac{3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{7}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots + \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots$$

47. Mely sorok konvergensek az alábbiak közül:

$$a) \frac{2}{1} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{2}{n^n} + \dots \quad c) \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n^3]{n^3}} + \dots$$

$$b) \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{3}{n(n+1)} + \dots$$

$$d) \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

$$e) \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{2+4n} + \dots$$

48. x mely pozitív értékeinél konvergensek a következő sorok:

$$a) \frac{1}{x+1} + \frac{1 \cdot 2}{(x+1)(x+2)} + \dots + \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} + \dots$$

$$b) x + 2! \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 3! \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \dots + n! \left(\frac{x}{n}\right)^n + \dots$$

49. p milyen értékeinél konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^p} \left(\frac{e}{n}\right)^n$ sor?

50. x milyen pozitív értékeinél konvergens az

$$\frac{1!x}{x+a} + \frac{2!x^2}{(x+a)(2x+a)} + \dots + \frac{n!x^n}{(x+a)(2x+a)(3x+a)\dots(nx+a)} + \dots$$

sor? ($a > 0$.)

51. Igazoljuk, hogy pozitív tagú sor esetén — ha a sortagok monoton csökkenő sorozatot képeznek — a konvergenciának szükséges (de nem elégséges!) feltétele, hogy az $\{x_n\} = \{a_n\}$ -en kívül az $\{y_n\} = \{na_n\}$ sorozat is 0 sorozat legyen!

52. α milyen (pozitív és π -nél kisebb) értékeinél lesz konvergens az

$$a) \sin \alpha + \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{3} + \dots + \sin \frac{\alpha}{n} + \dots \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\alpha}{n} \text{ sor?}$$

53. Igazoljuk, hogy — ha a pozitív tagú $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ sor konvergens, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} \text{ és a } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{(\sqrt{n})^{1+\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0)$$

sorok is konvergensek, bármilyen kicsi is az ε szám.

54. Határozzuk meg, hogy az ún. *Bertrand-féle* sorok:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\sigma} n}; \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^{\sigma}} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln_1 n \ln_2^{\sigma} n};$$

(szokásos jelölés)

$$\sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n (\ln \ln \ln n)^{\sigma}} = \sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{n \ln_1 n \ln_2 n \ln_3^{\sigma} n} \text{ stb.};$$

σ milyen értékeire konvergensek.*

* L. pl. Szász Pál: Diff. és int. számítás, I. 591. o.

55. Igazoljuk, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}$$

sor $\sigma > 1$ esetben konvergens, $\sigma \leq 1$ esetben divergens. Becsüljük meg a konvergens sorok értékét, és a becslésnél elkövetett felső hibakorlátot adjuk meg.

56. σ milyen értékeinél konvergens a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt[n]{\sigma}}}{n \cdot \ln^{\sigma} n}$ sor?

57. Konvergensek-e a következő sorok:

a) $\sin 3 + 4 \sin^2 1,5 + 27 \sin^3 1 + \dots + n^n \sin^n \frac{3}{n} + \dots$

b) $\frac{3}{2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} 1} + \frac{9}{4 \operatorname{Arc} \operatorname{tg}^2 2} + \dots + \frac{3^n}{2^n \operatorname{Arc} \operatorname{tg}^n n} + \dots$

γ | 1. Határozzuk meg, hogy az

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + + - \dots$$

sor konvergens-e?

Megoldás: Megkíséreljük a konvergenciavizsgálatot a *Cauchy-Bolzano*-féle kritérium segítségével elvégezni (ami lényegében azt jelenti, hogy a részletösszegek sorozatának konvergenciáját vizsgáljuk a *Cauchy*-féle kritérium alapján). Nyilvánvaló, hogy olyan szeletek különbségét igyekszünk először megbecsülni, amelyeket zárt alakban könnyen elő tudunk állítani, vagy legalábbis amelyekre jó alsó és felső becslést tudunk adni. Így pl. az

$$|a_{3n+1} + a_{3n+2} + \dots + a_{6n+2}|$$

kifejezés értékét könnyen tudjuk becsülni, mert ebben a (véges) összegben a negatív

előjelű tagok az $\left\{ \frac{1}{\sqrt{k}} \right\}$ sorozat egyik részsorozatának elemei $k = 2n + 2$ -től $k = 4n$ -ig

bezárólag, a pozitív előjelű tagok ugyanezen sorozat másik részsorozatának elemei

$k = 4n + 1$ -től $k = 8n + 3$ -ig bezárólag, s így külön a pozitív és külön a negatív tagok összegére is jó becslést tudunk adni.

A pozitív, illetve a negatív tagok összegének becsléséhez a *Mac Laurin-Cauchy*-féle integrálkritériumot, pontosabban az azzal kapcsolatban levezetett becslő-formulákat (2. § a) β) 23.) használhatjuk:

$$\int_0^{2n+2} \frac{1}{\sqrt{4n+1+2x}} dx \leq \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{4n+1+2k}} \leq \int_{-1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{4n+1+2x}} dx$$

és

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{2n+2x}} dx \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{2n+2k}} \leq \int_0^n \frac{1}{\sqrt{2n+2x}} dx,$$

azaz

$$[\sqrt{8n+5} - \sqrt{4n+1}] \leq \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{4n+1+2k}} \leq [\sqrt{8n+3} - \sqrt{4n-1}]$$

és

$$[\sqrt{4n+2} - \sqrt{2n+2}] \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2n+2k}} \leq [\sqrt{4n} - \sqrt{2n}]$$

Így tehát

$$\begin{aligned} & [\sqrt{8n+5} - \sqrt{4n+1}] - [\sqrt{4n} - \sqrt{2n}] \leq \\ & \leq \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{4n+1+2k}} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2n+2k}} = |a_{3n+1} + a_{3n+2} + \dots + a_{6n+2}| \leq \\ & \leq [\sqrt{8n+3} - \sqrt{4n-1}] - [\sqrt{4n+2} - \sqrt{2n+2}]. \end{aligned}$$

Könnyen belátható (az igazolást az olvasóra bizzuk), hogy

$$\sqrt{8n} - \sqrt{4n} \leq \sqrt{8n+5} - \sqrt{4n+1}.$$

Ezért

$$\begin{aligned} & |a_{3n+1} + \dots + a_{6n+2}| \geq [\sqrt{8n+5} - \sqrt{4n+1}] - [\sqrt{4n} - \sqrt{2n}] \geq \\ & \geq [\sqrt{8n} - \sqrt{4n}] - [\sqrt{4n} - \sqrt{2n}] = \sqrt{2n} (2 - 2\sqrt{2} + 1) = (3 - 2\sqrt{2})\sqrt{2n}. \end{aligned}$$

A sor tehát divergens, mert az $|a_{3n+1} + a_{3n+2} + \dots + a_{6n+2}|$ kifejezés nemcsak, hogy nem válik tetszőlegesen kicsivé, ha n már elég nagy, hanem ellenkezően, minden határon túl nő, s így a *Cauchy–Bolzano*-kritérium értelmében a sor biztosan divergens.

(Megjegyezzük, hogy ha azt mutattuk volna ki, hogy

$$|a_{3n+1} + a_{3n+2} + \dots + a_{6n+2}|$$

tetszőlegesen kicsivé válik, ha n elég nagy, ezzel még nem bizonyítottuk volna a konvergenciát, mert csak p egy speciális alakjára mutattuk volna ki, hogy

$$|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}|$$

tetszőlegesen kicsi, ti. a $3p = 3n + 2$ -re. Ez esetben tehát tovább kellene folytatni a vizsgálatot.)

2. Határozzuk meg, hogy az

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \dots$$

sor konvergens-e?

3. Állapítsuk meg, hogy az

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 6} + \frac{1}{\ln 8} - \frac{1}{\ln 5} + + - \dots$$

sor konvergens-e?

4. Legyen a $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ sor olyan tulajdonságú, hogy részletösszegeinek sorozata korlátos:

$$|s_n| = \left| \sum_{v=1}^n a_v \right| \leq C$$

(ahol C nem függ n -től!) Az ε_v sorozat tartson monoton csökkenően a 0-hoz. Igazoljuk, hogy egyrészt a

$$\sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon_v a_v$$

sor konvergens, másrészt a Cauchy–Bolzano-féle konvergencia-kritériumban szereplő

$$\left| \sum_{v=n}^{n+p} \varepsilon_v a_v \right|$$

összegre (p -től függetlenül) a következő becslés adható meg:

$$\left| \sum_{v=n}^{n+p} \varepsilon_v a_v \right| \leq 2 C \varepsilon_n.$$

Útbaigazítás: Az igazolandó egyenlőtlenség (és ebből a Cauchy–Bolzano-kritérium alapján a sor konvergenciája) az Abel-féle átrendezés segítségével könnyen adódik.

5. Az $\{\varepsilon_v\}$ sorozat legyen monoton csökkenő nullsorozat. Igazoljuk, hogy ekkor a

$$\sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon_v \cos v x \quad \text{és} \quad \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon_v \sin v x$$

sorok konvergenssek, ha $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Megoldás: Abel tétele értelmében ehhez csak az szükséges, hogy a

$$\sum \cos v x, \quad \text{illetve} \quad \sum \sin v x$$

sor szeletei közös korlát alatt maradjanak.

Mindkét véges összeg zárt alakban is előállítható:*

* Mindkét formula könnyen levezethető. Ugyanis

$$2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin x = \cos \frac{x}{2} - \cos 3 \frac{x}{2}; \quad 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos x = \sin 3 \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2};$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin 2x = \cos 3 \frac{x}{2} - \cos 5 \frac{x}{2}; \quad 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos 2x = \sin 5 \frac{x}{2} - \sin 3 \frac{x}{2};$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \sin nx = \cos \frac{2n-1}{2} x - \cos \frac{2n+1}{2} x; \quad 2 \sin \frac{x}{2} \cos nx = \sin \frac{2n+1}{2} x - \sin \frac{2n-1}{2} x.$$

Fentj azonosságokat összeadva, és $2 \sin \frac{x}{2}$ -vel osztva, kapjuk a kívánt zárt alakú előállítást.

$$\sum_{\nu=1}^n \sin \nu x = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$\sum_{\nu=1}^n \cos \nu x = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\cos (n+1) \frac{x}{2} \sin n \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Ebből következik, hogy $x \neq 0$ esetben a szeletek sorozatának közös korlátja: $\frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$.

$x = 0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \dots$ esetben viszont a $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_{\nu} \cos \nu x$ sor a $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_{\nu}$ sorral együtt konvergens vagy divergens, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_{\nu} \sin \nu x$ konvergens, és összege 0.

Vagyis $x \neq 0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \dots$ esetben mindkét sor konvergens; $x = 0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \dots$ esetben az első sor $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_{\nu}$ -vel együtt konvergál vagy divergál, a második biztosan konvergens x minden értékére!

6. Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-0,108} e^{-2} \cos nx$$

sor?

7. Igazoljuk, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad (a_n \geq 0)$$

sor esetében — ha a sor a Leibnitz-féle feltételeket teljesíti, azaz $\{a_n\}$ monoton csökkenő nullsorozat — a sor összege és a k -adik szelet különbségének előjele egyezik a $k+1$ -ik tag, a_{k+1} előjelével, a különbség abszolút értéke pedig kisebb, mint $\frac{1}{2} |a_{k+1}|$.

8. Határozzuk meg az előző feladatban igazolt tétel és a 2. § a) β) 25. feladat segítségével a C (Euler-konstans) második tizedesjegye pontos értékét!

9. S milyen értékeire konvergens a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu^S}$$

sor?

Megoldás: Láttuk a Raabe-kritériummal kapcsolatban kidolgozott feladatban, hogy $S > 1$ esetben a sor abszolút konvergens.

$0 < S \leq 1$ esetében — tekintettel arra, hogy ekkor $a_n = \frac{1}{n^s} \rightarrow 0$ monoton fogyó módon — a Leibnitz-szabály értelmében konvergens a sor.

$S \leq 0$ esetében $\{a_n\}$ nem 0 sorozat, így a sor divergens.

Tehát $S > 0$ esetben konvergál, $S \leq 0$ esetben divergál a sor.

10. Konvergens-e a

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{\nu\pi}{2}}{\ln \nu}$$

sor?

11. Konvergens-e a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \ln \frac{\nu}{\nu+1}$$

sor?

12. Konvergens-e az

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[1 - a^{\frac{1}{n}} \right] \quad (a > 0)$$

sor?

13. Konvergens-e az alábbi sor:

$$\frac{1}{2} \ln \ln 2 - \frac{1}{3} \ln \ln 3 + \dots + (-1)^n \frac{\ln \ln n}{n} + \dots$$

14. Konvergens-e az

$$1 + \frac{\sin 2}{3} + \frac{\sin 8}{27} + \dots + \frac{\sin (2^k)}{3^k} + \dots$$

sor?

15. Konvergens-e az

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + + - \dots$$

sor?

16. x mely pozitív értékeinél konvergens a következő sor:

$$1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3+x} + - \dots$$

Útbaigazítás: Vizsgáljuk a sort pl. abban az esetben, ha $n \leq x < n+1$. Igazolni fogjuk, hogy a sor konvergens. Ugyanis az $n \leq x < n+1$ feltétel mellett.

$$\frac{1}{l+n+1} < \frac{1}{l+x} \leq \frac{1}{l+n} \quad (l = 1, 2, \dots)$$

tehát

$$0 \leq \frac{1}{l+x} - \frac{1}{l+n} < \frac{1}{l+x} - \frac{1}{l+n+1} = \frac{1}{(l+n)(l+n+1)}$$

Tekintsük most a sor $2k$ -adik ($k > n$) szeletét:

$$\begin{aligned} S_{2k} &= 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x+2} \pm \dots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k-1+x} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+1} \right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{n+(k-1-n)} + \frac{1}{x+(k-1-n)} \right) - \left\{ \frac{1}{x+(k-n)} + \dots + \frac{1}{x+(k-1)} \right\}. \end{aligned}$$

Ebben a kifejezésben az $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ összeg független k -tól. A kerek zárójelben levő tagok összege a fenti egyenlőtlenségek alapján becsülhető, és $k \rightarrow \infty$ esetén konvergál, minthogy a $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(l+n)(l+n+1)}$ sor konvergens. A kapcsos zárójelek között pontosan n darab tag áll, azok összege 0-hoz tart, ha $k \rightarrow \infty$. Ezek alapján már könnyen megállapíthatjuk a konvergenciaviszonyokat.

17. Határozzuk meg, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n}{2n}$$

sor konvergens-e.

18. Határozzuk meg, hogy a

$$\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \frac{3^{(-1)^v}}{v}$$

sor konvergens-e.

22. Konvergens-e a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ sor, ha $a_n = 1 - \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2$?

b) Műveletek sorokkal

a) Az abszolút konvergencia és jelentősége

Említettük, hogy azokat a sorokat nevezzük abszolút konvergensnek, amelyeknél a tagok abszolút értékeiből álló végtelen sor konvergens. A nem abszolút konvergens, de konvergens sorokat feltételesen konvergensnek nevezzük. A Cauchy–Bolzano-féle konvergencia-kritérium alapján azonnal belátható, hogy bármely végtelen sor, amely abszolút konvergens, egyszersmind konvergens is. Következésképp egy olyan végtelen sor esetében, amelynek végtelen sok negatív és pozitív tagja van, először – a pozitív tagú sorokra vonatkozó konvergencia-kritériumok segítségével – azt kell megnéznünk, hogy a sor abszolút konvergens-e. Ha a sor nem abszolút

konvergens, akkor természetesen a 2. § a) részben ismertetett módszerekkel megvizsgáljuk, hogy feltételesen konvergens-e.

Az abszolút konvergencia fogalma azonban nemcsak azért jelentős, mert — mint az előbb láttuk — a pozitív tagú sorokra vonatkozó konvergencia-kritériumok segítségével esetleg egy tetszőleges sor konvergens voltát is ki tudjuk mutatni, hanem azért is, mert a soroknál is felvethetjük az *átrendezhetőség* kérdését, és e szempontból az abszolút konvergens soroknak kitüntetett szerepük van. Lássuk először is azt, hogy mit értünk átrendezésen. Tekintsük tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort, és a természetes számok egy olyan $\{i_n\}$ végtelen sorozatát, amelyben minden természetes szám egyszer és csakis egyszer fordul elő. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n}$ sor ez esetben az eredeti sor átrendezett alakja.

Ha a sor abszolút konvergens, akkor bármely átrendezéséből származó $\sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n}$ sor is abszolút konvergens, és összege változatlan.

Ha a sor feltételesen konvergens, akkor átrendezhető mindig úgy, hogy összege egy előre adott tetszőleges szám legyen.

β) Sorokkal végzett műveletek

Néhány egyszerű tételt közlünk itt. Igen egyszerűen belátható, hogy konvergens sorokban (feltételesen konvergens sorokban is) szabad zárójelezni, azaz több tagot egyetlen taggá összevonni, ezzel sem a konvergenciaviszonyokat, sem a sorösszeget nem változtatjuk meg. Ezt az egyszerű tételt elsősorban azért emeltük ki e rész élére, mert a tétel nem fordítható meg általában, azaz egy konvergens sorban szereplő zárójelek általában nem hagyhatók el.*

Egy közismert és igen egyszerű példa: a $0 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots$ végtelen sor, vagy másképp: az $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots + (1 - 1) + \dots$ sor nyilván konvergens, és összege 0. Ha azonban a zárójeleket elhagyjuk, az

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots \pm 1 \mp 1 + \dots$$

sor divergens, mert páros indexű részletösszegei 0-val, páratlan indexű szeletei viszont 1-gyel egyenlők.**

Megjegyezzük azonban, hogy bizonyos feltételek mellett elhagyhatók valamely konvergens sorban szereplő zárójelek; éspedig ha az egyes sortagok többtagúak, azaz a végtelen sor ilyen alakú:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{r_n=1}^{k_n} a_{r_n} \right) = (a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1}) + (a_1 + a_2 + \dots + a_{k_2}) + \dots$$

(ahol a $\{k_n\}$ számsorozat a természetes számok tetszőleges sorozata), akkor és csakis akkor hagyhatók el a zárójelek, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz megadható egy olyan $N = N(\varepsilon)$

* Ha tehát az egyes sortagokat magukat valamely (véges vagy végtelen) összeg alakjában írjuk fel, akkor ezeket az összegeket zárójelbe kell tennünk, mint egyetlen sortagot kell kezelnünk, és általában nem szabad elhagynunk a zárójeleket.

** Az érdekesség kedvéért megjegyezzük, hogy a XIV. században, amikor a konvergencia fogalma még nem volt tisztázott, egy „matematikus” a fenti példával akarta matematikailag igazolni, hogy a „világot a semmiből is lehetett teremteni”, hiszen íme, a 0-ból milyen egyszerű 1-et „teremteni”.

természetes szám, hogy az N -nél nagyobb indexű zárójelben levő összegek bármely szelete abszolút értékre kisebb ε -nál, azaz, ha

$$|a_{1_n} + a_{2_n} + \dots + a_{s_n}| < \varepsilon, \text{ ha csak } n > N(\varepsilon),$$

ahol $s_n \leq k_n$ tetszőleges természetes szám.

Ha viszont az egyes sortagok maguk is végtelen sorok, azaz a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{v_n=1}^{\infty} a_{v_n} \right)$ konvergens sorról van szó, akkor nem ismerünk olyan szükséges és elégséges feltételt, amely megmondaná, hogy mikor szabad elhagyni a zárójeleket. Egy elégséges feltételt azonban megadunk: ha a $\sum_{v_n=1}^{\infty} a_{v_n}$ sorok n minden értékénél abszolút konvergensek, és a $\sum_{v_n=1}^{\infty} |a_{v_n}|$ sor összegét σ_n -nel jelölve, a $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ sor is konvergens, akkor a zárójelek elhagyhatók.

A legegyszerűbb alpművelettel, az összeadással kapcsolatban igen egyszerű tételt mondhatunk ki (ha csak véges számú sor összegezéséről van szó):

$$A \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)}; \quad \dots; \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}$$

konvergens sorok összege legyen rendre: $a^{(1)}; a^{(2)}; \dots; a^{(k)}$. Ekkor

$$\begin{aligned} a^{(1)} + a^{(2)} + \dots + a^{(k)} &= \sum_{s=1}^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(s)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)} + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \dots + a_n^{(k)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^k a_n^{(s)} \right) \end{aligned}$$

(és a két legutolsó képletben a zárójelek el is hagyhatók), amit szavakban vagy úgy fejezünk ki, hogy konvergens sorokat szabad tagonként összegezni, vagy úgy, hogy a véges sokszor ismételt összeadás sorrendre felcserélhető a szummációval, amennyiben konvergens sorokról van szó.

Ha viszont végtelen sok sor összegéről van szó, akkor a felcserélhetőségre vonatkozó előző állításunk csak bizonyos feltételek mellett igaz. Két ilyen tételt ismertetünk. Legyenek a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(s)}$$

sorok s minden értékénél konvergensek, és összegüket jelöljük $a^{(s)}$ -sel. Tegyük fel, hogy a $\sum_{s=1}^{\infty} a^{(s)} = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(s)} \right)$ sor konvergens. Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{\infty} a_n^{(s)} \right)$ sort;

felvetjük egyrészt azt a kérdést, hogy mikor lehet a

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(s)} \right) \text{ sor konvergenciájából a } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{\infty} a_n^{(s)} \right)$$

sor konvergenciájára következtetni, továbbá, hogy e két sor összege mikor egyenlő egymással.

A két tétel közül az egyszerűbb, az ún. „nagy átrendezési tétel” így szól:

Amennyiben a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(s)}$ sorok valamennyien abszolút konvergensek, és a

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(s)}| \right) \text{ sor is konvergens, akkor a } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{\infty} a_n^{(s)} \right)$$

sor is konvergens (éspedig abszolút), és

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(s)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{\infty} a_n^{(s)} \right).$$

E tételt igen szemléletesé tehetjük a következő felírással:

$$\begin{array}{ccccccc} a^{(1)} & = & a_1^{(1)} & + & a_2^{(1)} & + & \dots + a_n^{(1)} + \dots \\ a^{(2)} & = & a_1^{(2)} & + & a_2^{(2)} & + & \dots + a_n^{(2)} + \dots \\ & & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ a^{(s)} & = & a_1^{(s)} & + & a_2^{(s)} & + & \dots + a_n^{(s)} + \dots \\ & & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & & \end{array}$$

b_1
 b_2
 b_n

Itt b_n -nel jelöltük az n -edik oszlopban elhelyezkedő számok összegét (amennyiben ez létezik), azaz:

$$b_n = \sum_{s=1}^{\infty} a_n^{(s)}.$$

Ha még a

$$\sigma^{(s)} = |a_1^{(s)}| + \dots + |a_n^{(s)}| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(s)}|$$

jelölést is bevezetjük, akkor tételünk így fogalmazható:

Amennyiben a $\sum_{s=1}^{\infty} \sigma^{(s)}$ sor konvergens, konvergens valamennyi oszlopból készült végtelen sor is, továbbá a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ és a $\sum_{s=1}^{\infty} a^{(s)}$ sorok is, és a sorösszegek összege egyenlő az oszlopösszegek összegével.

A másik tétel, amelyet *Markov-féle* sortranszformációnak is hívnak, általában sokkal használhatóbb, mert nem kell feltételeznünk abszolút konvergenciát.* E tétel így szól:

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(s)}$ sor k indexű maradékát $m_k^{(s)}$ -sel jelölve: $m_k^{(s)} = \sum_{n=k}^{\infty} a_n^{(s)} = a^{(s)} - \sum_{n=1}^{k-1} a_n^{(s)}$; tekintsük e sormaradékok összegét, az $M_k = \sum_{s=1}^{\infty} m_k^{(s)}$ mennyiséget. (Hogy M_k létezik, azaz, hogy a $\sum_{s=1}^{\infty} m_k^{(s)}$ sor konvergens, azonnal következik a $\sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(s)} \right)$ sor konvergenciájából.) Mármint a tétel szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{\infty} a_n^{(s)} \right)$ sor, azaz az oszlopösszegek összege akkor és csak akkor konvergens és egyenlő $\sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(s)} \right)$ -sel, a sorösszegek összegével, ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = 0.$$

Közvetlenül belátható az a tétel, hogy

$$c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c a_n,$$

azaz, hogy a konstansszal szorzás és az összegezés egymással felcserélhető műveletek. Ebből pedig azonnal következik, hogy az előbb az összeadással kapcsolatban ismertté tett tételek érvényben maradnak akkor is, ha a szereplő sorok helyett azok konstansszorosait, pl. részben $+1$ -, részben -1 -szereseit szerepeltetjük. Így a kivonással külön nem kell foglalkoznunk.

Ami két konvergens sor szorzatát illeti, két kérdés merül fel:

1. Érvényes-e a *disztributivitás* két végtelen összeg szorzásánál is?
2. Ha igen, milyen sorrendben kell a részletszorzatokat összegezni ahhoz, hogy az előálló végtelen sor összege éppen a két összeszorozott sor összegének szorzata legyen?

E két kérdésre három tétellel válaszolunk. E tételek abból indulnak ki, hogy a részletszorzatokat valamely adott módon rendezzük. Hogy e rendezésről szemléletes képünk is legyen, a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

sorok formális összeszorzásánál keletkező részletszorzatokat először az alábbi négyzetes sémába rendezzük:

$$\begin{array}{ccc} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \dots a_1 b_n \dots \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \dots a_2 b_n \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & a_n b_3 \dots a_n b_n \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

* L. pl. Szász Pál: Differenciál és integrálszámítás, I. 558.

(azért beszélünk formális szorzásról, mert a disztributivitás érvényessége általában nem bizonyítható, s így a formális szorzás nem feltétlenül jelenti a két sor tulajdonképpeni szorzását). Jelöljük továbbá a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, illetve a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor n -edik szeletét A_n -

nel, illetve B_n -nel: $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$; $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Első tételünk így szól:

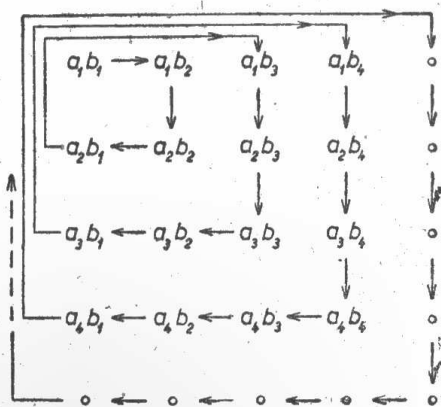
Ha a részletszorzatokat úgy rendezzük, hogy azokat a tagokat, amelyekkel az $A_n B_n$ szorzat az $A_{n-1} B_{n-1}$ szorzathoz képest bővül, azaz az $a_n (b_1 + b_2 + \dots + b_n) + b_n (a_1 + \dots + a_{n-1})$ tagokat adjuk hozzá az $A_{n-1} B_{n-1}$ szorzathoz (amelyet sorrendben ugyanezen szabály szerint építettünk fel), akkor az így kapott végtelen sor előállítja a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok szorzatát, feltéve, hogy a két sor maga is konvergens. Jelemben:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sum_{k=1}^n b_k + b_n \sum_{k=n-1}^1 a_k \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \sum_{k=1}^n a_k + a_n \sum_{k=n-1}^1 b_k \right)$$

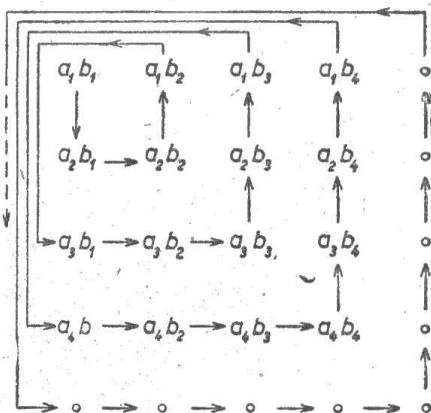
és itt a jobb oldalon a zárójel el is hagyható.

A négyzetes sémára tekintve, ez azt jelenti, hogy az alábbi két ábra (4., ill. 3. ábra) egyikén berajzolt nyílrendszer mentén haladva, összegezzük a tagokat:

Igen könnyen belátható második tételünk, amely szerint abszolút konvergens (és így tetszőlegesen átrendezhető) a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok formális szorzataként előbb felírt sor, ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is abszolút konvergens sorok.

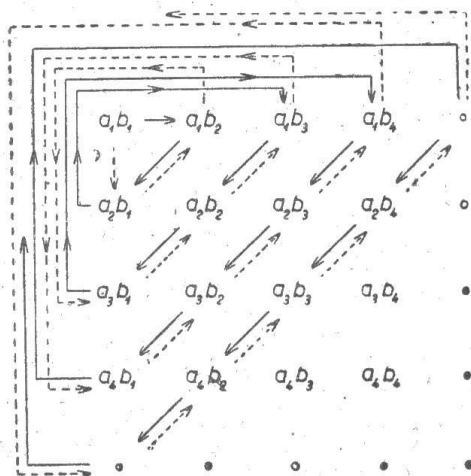


3. ábra



4. ábra

Szívesebben rendezzük azonban a részletszorzatokat a négyzetes séma átlós vonalai mentén, azaz az 5. ábra szerint (Cauchy-féle rendezés). Ennek az az oka, hogy ha a két összeszorozott sor hatványsor, azaz



5. ábra

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, illetve $\sum \beta_n x^n$ alakú, akkor az átlók mentén elhelyezkedő tagokban x kitevője ugyanaz, s így ezek összevonhatók. Erre a rendezési típusra vonatkozik harmadik tételünk (Mertens tétele). A $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$

sorokat formálisan összeszorozva, és a részletszorzatokat az alábbi módon csoportosítva,

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n a_{n-k} b_k \right)$, illetve $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \right)$ a kapott végtelen sorok — még a zárójelek elhagyása esetén is — konvergálnak, és összegük a $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)$ értékét adja, ha a

két konvergens sor közül legalább az egyik abszolút konvergens.

Példák és feladatok

a | 1. Igazoljuk, hogy bármely abszolút konvergens sor egyszerűen feltélesen is konvergens!

2. Bizonyítsuk be, hogy bármely abszolút konvergens sor átrendezhető anélkül, hogy ezáltal a konvergenciaviszonyokat vagy a sor összegét megváltoztattuk volna, azaz:

Legyen $\{i_n\}$ a természetes számok egy olyan végtelen sorozata, amelyben minden természetes szám egyszer és csakis egyszer előfordul, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pedig egy abszolút konvergens sor. Mutassuk ki, hogy ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n}$ is abszolút konvergens, és

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n}.$$

4. Konvergens, illetve abszolút konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left[\frac{1}{4^{n-1}} \right]^{1 + \frac{3}{2} [1 + (-1)^{n+1}]} = 1 - \frac{1}{4} + \sqrt[4]{\frac{1}{16}} - \frac{1}{64} + \sqrt[4]{\frac{1}{256}} - + \dots$$

sor? Állapítsuk meg a sorösszeget is!

Megoldás: Hogy a sor abszolút konvergens-e, az az adott sor tagjainak abszolút értékéből álló

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{4^{n-1}} \right]^{1 + \frac{3}{2} [1 + (-1)^{n+1}]}$$

sor vizsgálatából azonnal kiderül. Így pl. azonnal belátható, hogy utóbbi sor majorálható a konvergens, $\frac{1}{4}$ hányadosú $\sqrt[4]{4}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{4}} \right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{4^{k-1}} \right]^{\frac{1}{4}}$$

geometriai sorral. Hogy ez a sor majoránsa az előbbinek, igen könnyen belátható. Minden második tag ugyanis egyezik a két sorban, a köztük levő (a páratlan indexű) tagok pedig az első sorban 1, a második sorban $\frac{1}{4}$ hatványkitevővel rendelkező, azonos alapú számok. Mivel pedig ezek az alapok egynél kisebbek, világos, hogy $\frac{1}{4}$ -ik hatványuk nagyobb, mint első hatványuk. A sorösszeg is könnyen kiszámítható átrendezéssel, ami az abszolút konvergencia miatt megengedett. E célból képezzük a természetes számok következő sorozatát:

$$i_1 = 1; i_2 = 3; i_3 = 5; i_4 = 2; i_5 = 7; i_6 = 9; i_7 = 11,$$

$$i_8 = 13; i_9 = 4; i_{10} = 15; i_{11} = 17; i_{12} = 19; i_{13} = 21; i_{14} = 6; i_{15} = 23; \dots$$

(A sorozat képzési szabálya a következő: négy egymást követő páratlan szám után egy páros következik, ezután ott folytatva a páratlan számokat, ahol az imént abbahagytuk, ismét négy egymást követő páratlan számot írunk le, majd azt a páros számot, amely a legutóbb leírt páros számra következik stb.; e szabály alól csak a sorozat eleje kivétel.)
Azaz:

$$\begin{aligned} i_{5k-1} &= 2k \\ i_{5k} &= 8k - 1 \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \\ i_{5k+1} &= 8k + 1 \\ i_{5k+2} &= 8k + 3 \\ i_{5k+3} &= 8k + 5. \end{aligned}$$

Az átrendezést elvégezve, a következő sort kapjuk:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \\ + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} - \frac{1}{1024} + + + - \dots \end{aligned}$$

Ennek a sornak az összegét azonban igen könnyen meghatározhatjuk. Ez ti. nem más, mint az

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p-1}}$$

és az

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{64} + \frac{1}{1024} + \dots = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{256} + \dots \right) = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{16^{p-1}}$$

sorok különbsége. Az első sor összege, mint ismeretes

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p-1}} = 2, \text{ a másodiké: } \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{16^{p-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{16}{15},$$

és így

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[\frac{1}{4^{n-1}} \right]^{\frac{1}{1 + \frac{3}{2} [1 + (-1)^{n+1}]}} = 2 - \frac{1}{4} \frac{16}{15} = \frac{26}{15}.$$

5. Konvergens, illetve abszolút konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{3^{n-1}} \right]^{\frac{1}{1 + \frac{3}{2} [1 + (-1)^{n+1}]}}$$

sor. Állapítsuk meg a sorösszeget!

6. Mutassuk ki, hogy egy (csak) feltételesen konvergens sor pozitív előjelű tagjaiból alkotott sor is, negatív tagjaiból alkotott sor is (éspedig nyilvánvalóan mindkettő határozottan) divergens.

7. Bizonyítsuk be, hogy bármely (csak) feltételesen konvergens sor megfelelő módon átrendezhető úgy, hogy összege egy tetszőlegesen előírt szám legyen.

8. A

$$\sum_{n=1}^{\infty} (+1)^n \frac{1}{n}$$

sor abszolút, vagy csak feltételesen konvergens? Át lehet-e úgy rendezni, hogy összeg 4 legyen, s ha igen, hogyan?

9. Igazoljuk, hogy feltételesen konvergens sorból megfelelő zárójelezéssel — azaz több tag egyetlen taggá történő összevonásával — abszolút konvergens sor készíthető anélkül, hogy így az eredeti határértéket megváltoztatnók.

β 1. Mutassuk meg, hogy konvergens sorban szabad zárójelezni, azaz tagokat összevonni.

2. Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{s_n=1}^{k_n} a_{s_n} \right)$ alakú konvergens sorban az összeg megváltoztatása nélkül akkor és csak akkor hagyhatók el a zárójelek, ha az így kapott sor is konvergens.

3. Elhagyhatók-e a zárójelek az alábbi sorban (anélkül, hogy a sorösszeget megváltoztatnók)?

$$\sum_{n=n}^{\infty} \left[\sum_{s_n=n}^{n^2} (-1)^{s_n} \ln \left(1 + \frac{1}{s_n} \right) \right].$$

Megoldás: Mint tudjuk, e sorban a zárójelek akkor és csakis akkor hagyhatók el, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz megadható egy olyan $N = N(\varepsilon)$ természetes szám, hogy $\left| \sum_{z=n}^{n+p} (-1)^z \ln \left(1 + \frac{1}{z} \right) \right| < \varepsilon$, ha $n > N$ tetszőleges $0 < p \leq n^2 - n$ természetes szám mellett.

Az adott sornál azonban ez bekövetkezik. A

$$\sum_{z=n}^{n+p} (-1)^z \ln \left(1 + \frac{1}{z} \right)$$

összeg ugyanis monoton csökkenő abszolút értékű tagokból álló, alternáló előjelű összeg, s így egyik szelete sem lehet abszolút értékben nagyobb, mint első tagjának abszolút értéke, azaz

$$\left| \sum_{z=n}^{n+p} (-1)^z \ln \left(1 + \frac{1}{z} \right) \right| \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Ismeretes továbbá, hogy $\ln(1+x) \leq x$, ha $0 \leq x$, és így

$$\left| \sum_{z=n}^{n+p} (-1)^z \ln \left(1 + \frac{1}{z} \right) \right| \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{n},$$

tehát bármely $\varepsilon > 0$ esetén az $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ választás mellett a zárójelelhagyás szükséges és elégséges feltétele teljesül. Itt $\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ jelenti az $\frac{1}{\varepsilon}$ -nél nem kisebb legkisebb természetes számot.

4. Elhagyhatók-e a zárójelek az alábbi sorokban :

$$\begin{aligned} a) & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{s_n=1}^{n^2} (-1)^{s_n} \ln \left(1 + \frac{1}{s_n} \right) \right]; & b) & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{s_n=1}^n (-1)^{s_n} \ln s_n \right]; \\ c) & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{s_n=n^2}^{n^3} (-1)^{s_n} e^{-\left(1 + \frac{1}{s_n}\right)} \right]; & d) & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{s_n=n}^{n^2} (-1)^{s_n} \sin \frac{1}{\sqrt{s_n}} \right]. \end{aligned}$$

5. Igazoljuk, hogy tetszőleges, de az $|ax| < 1$ és $|x| < 1$ relációknak eleget tevő x értéknél fennáll a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ax^n}{1-ax^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k x^k}{1-x^k}$$

egyenlőség.

Megoldás: A bizonyítandó egyenlőségre tekintve, azonnal láthatjuk, hogy mindkét oldalon az egyes sortagok úgy tekinthetők, mint egy megfelelő geometriai sor összege. Ez inspirálja, hogy az egyenlőséget a nagy átrendezési tétel, illetve a Markov-féle sor-transzformáció segítségével kíséreljük igazolni.

Először a formális igazolást végezzük el, ami gyakorlatilag semmiféle nehézséget nem jelent. Kiindulva pl. a bal oldalon szereplő

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ax^n}{1 - ax^n}$$

sorból, ennek általános tagját így írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \frac{ax^n}{1 - ax^n} &= ax^n (1 + ax^n + a^2x^{2n} + \dots) = ax^n \sum_{k=0}^{\infty} (ax^n)^k = \\ &= ax^n + a^2x^{2n} + a^3x^{3n} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a^k x^{nk}. \end{aligned}$$

Így a jólismert négyzetes mátrixsémába a következőképp rendezhetjük el a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ax^n}{1 - ax^n} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a^k x^{nk} \right)$$

sor tagjait (a \approx jellel azt akarjuk jelezni, hogy még nem bizonyítottuk sem azt, hogy a bal oldalon szereplő $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ax^n}{1 - ax^n}$ sor, sem azt, hogy a jobb oldalon felírt $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a^k x^{nk} \right)$ sor konvergens, mégkevésbé azt, hogy egyenlő egymással. Az egyenlet egyelőre csak normális, ti. a geometriai sor összegképletének formális — konvergenzia-megfontolások nélkül történt — alkalmazása alapján lett felírva):

$\frac{ax}{1 - ax} =$	$ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \dots + a^nx^n + \dots$
$\frac{ax^2}{1 - ax^2} =$	$ax^2 + a^2x^4 + a^3x^6 + \dots + a^nx^{2n} + \dots$
$\frac{ax^3}{1 - ax^3} =$	$ax^3 + a^2x^6 + a^3x^9 + \dots + a^nx^{3n} + \dots$
\vdots	\vdots
$\frac{ax^k}{1 - ax^k} =$	$ax^k + a^2x^{2k} + a^3x^{3k} + \dots + a^nx^{nk} + \dots$
\vdots	\vdots
\vdots	\vdots
\vdots	\vdots
	$a \frac{x}{1 - x} + a^2 \frac{x^2}{1 - x^2} + a^3 \frac{x^3}{1 - x^3} + \dots + a^n \frac{x^n}{1 - x^n} + \dots$

Az oszlopösszegeket azonnal tudtuk írni az egyes oszlopok alá (ismét formálisan), mert geometriai sorokat kellett összegezni.

A következőkben megvizsgáljuk (a módszerek összehasonlítása kedvéért), hogy

1. a nagy átrendezési tétellel kapcsolatban kimondott elégséges feltételek teljesülnek-e?

2. a Markov-féle sortranszformációval kapcsolatban kimondott szükséges és elégséges feltételek teljesülnek-e?

1. A nagy átrendezési tétellel kapcsolatban csak a bizonyítandó egyenlőség egyik oldalán szereplő végtelen sorral kell foglalkoznunk. Tekintettel arra, hogy a szükséges konvergencia-megfontolásokat a jobb oldalon szereplő

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k x^k}{1 - x^k}$$

sorral kapcsolatban láthatóan egyszerűbb elvégezni, ezt választjuk „sorösszeg-összegnek”. Az igazolandó elégséges feltételek a következők:

α) Maga a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k x^k}{1 - x^k}$ sor konvergens.

β) Az egyes sorok abszolút konvergenssek, azaz k valamennyi értékére létezik az

$$\alpha^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} |a^k x^{nk}| \text{ mennyiség.}$$

γ) Konvergens a $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{(k)}$ sor.

α) Hogy a sor konvergens, sőt abszolút konvergens, az legegyszerűbben a 2. §

a) β) 1. feladatban igazolt majorálással történhetik. Ugyanis a $\sum_{k=1}^{\infty} |ax|^k$ konvergens geometriai sor felhasználható majoránsnak. Hogy ez a geometriai sor konvergens, az az $|ax| < 1$ feltételből következik. A részleteket az olvasóra bízunk.

β) Az $\alpha^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} |a^k x^{nk}|$ sorok akkor és csak akkor konvergenssek k bármely értékénél, ha az $|x| < 1$ reláció teljesül. Ugyanis $\sum_{n=1}^{\infty} |a^k x^{nk}| = |a^k| \sum_{n=1}^{\infty} |x^k|^n$, s ez a geometriai sor csakis $|x|^k < 1$, azaz $|x| < 1$ esetben konvergál. Ez esetben

$$\alpha^{(k)} = |a|^k \sum_{n=1}^{\infty} |x^k|^n = \frac{|ax|^k}{1 - |x|^k}.$$

γ) A $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{(k)}$ sor éppúgy, mint ahogy azt a β) részben a $\sum |ax|^k$ majoráló geometriai sor kapcsán beláttuk, akkor és csakis akkor konvergál, ha $|ax| < 1$, és $|x| \neq 1$. Ezzel a tételt az $|x| < 1$; $|ax| < 1$ feltételek mellett igazoltuk.

2. Hogy a Markov-féle sortranszformációt alkalmazhassuk, a következőket kell igazolnunk:

α) Mindegyik sor konvergens, azaz fennállnak az

$$\frac{a^k x^k}{1 - x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} a^k (x^k)^n$$

relációk k minden (természetes egész) értékére.

β) Mindegyik oszlop konvergens, azaz fennállanak az $\frac{ax^n}{1-ax^n} = \sum_{s=1}^{\infty} (ax^n)^s$ relációk.

γ) Konvergens a sorösszegek sora és az oszlopösszegek sora is, azaz léteznek a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k x^k}{1-x^k}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ax^n}{1-ax^n}$ mennyiségek.

δ) A k indexű maradékok összege 0-hoz tart k növekedésekor, azaz

$$\lim_{\rightarrow \infty} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n^{(s)} \right) = 0, \text{ ahol } a_n^{(s)} = a^s x^{ns}.$$

α) A

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^k (x^k)^n$$

sorok akkor és csakis akkor konvergálnak (és pedig az $\frac{a^k x^k}{1-x^k}$ értékhez), ha a kvóciens abszolút értékben 1-nél kisebb, azaz ha $|x^k| < 1$, tehát ha $|x| < 1$, és pedig ekkor abszolút konvergensek k bármilyen értékénél.

β) A $\sum_{s=1}^{\infty} (ax^n)^s$ sorok akkor és csakis akkor konvergálnak, ha n minden értékre fennáll az $|ax^n| < 1$ egyenlőtlenség. Ennek szükséges feltétele nyilván, hogy $|ax| < 1$ legyen. (Ti. ez az $n=1$ speciális eset.) Az $|x| < 1$ feltétellel együtt azonban már szükséges és elégséges ez a feltétel, hiszen ekkor

$$|ax^n| = |ax| \cdot |x^{n-1}| < |ax| < 1.$$

E feltétel mellett abszolút konvergens is az oszlopösszegek összege.

γ) A $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k x^k}{1-x^k}$ sor konvergenciájáról már volt szó. Ami a $\sum_{s=1}^{\infty} \frac{ax^n}{1-ax^n}$ sor konvergenciáját illeti, itt is az abszolút konvergenciát könnyű kimutatni a már tett $|ax| < 1$ és $|x| < 1$ feltételek mellett, és pedig a majoráló

$$\sum_{n=1}^{\infty} |ax^n| = |ax| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |x|^n$$

sor felhasználásával. A nevezőben szereplő $|1-ax^n|$ kifejezést éppúgy becsülhetjük alulról, mint ahogy az $|1-x^n|$ kifejezést becsültük.

δ) Ami a sormaradékok összegét illeti, annak a becslése is könnyen megy az eddigiek felhasználásával. Ugyanis

$$m_k^{(p)} = \sum_{s=k}^{\infty} a_s^{(p)} = \sum_{s=k}^{\infty} a^p x^{sp} = \frac{a^p x^{kp}}{1-x^k}$$

és

$$M_k = \sum_{p=1}^{\infty} m_k^{(p)} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a^p (x^k)^p}{1 - x^p} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(ax^k)^p}{1 - x^p} \leq$$

$$\leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|ax^k|^p}{|1 - x^p|} \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|ax^k|^p}{|1 - |x||^p},$$

minthogy az $|x| < 1$ reláció következtében $|1 - x^p| \geq |1 - |x||^p \geq |1 - |x||$, ha $p \geq 1$. Így tehát

$$M_k \leq \frac{1}{|1 - |x||} \sum_{p=1}^{\infty} |ax^k|^p = \frac{|ax^k|}{\{1 - |ax^k|\} |1 - |x||}.$$

Minthogy pedig $|x| < 1$, és $|ax| < 1$, azért

$$|ax^k| = |ax| \cdot |x^{k-1}| \leq |x|^{k-1},$$

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |ax^k| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |x|^{k-1} = 0,$$

tehát

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} M_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|ax^k|}{\{1 - |ax^k|\} |1 - |x||} =$$

$$= \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} |ax^k|}{\{1 - \lim_{k \rightarrow \infty} |ax^k|\} |1 - |x||} = \frac{0}{1 \cdot |1 - |x||} = 0,$$

tehát a Markov-féle sortranszformáció szükséges és elégséges feltételei teljesülnek.

Megjegyezzük még, hogy a Markov-féle sortranszformációval kapcsolatban megadott feltételek szükséges és elégséges feltételek, e feltételek pedig feladatunkban akkor és csakis akkor teljesültek, ha fennállottak az $|x| < 1$ és $|ax| < 1$ relációk. Ebből következik, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ax^n}{1 - ax^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k x^k}{1 - x^k}$$

egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha mindkét egyenlőtlenségünk teljesül, jöllehet — mint láttuk — az $|ax| < 1$ feltétel mellett a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k x^k}{1 - x^k}$ sor konvergál (sőt abszolút konvergens) $|x| > 1$ esetén is. Ennyivel tehát többet mond a — jelen példánkban kissé nehézkesen alkalmazható — Markov-féle sortranszformációs tétel, mint a nagy átrendezi tétel.

6. Tekintsük a következő négyzetes mátrixba rendezett számsorozatot:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) & \left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)\right] & \dots & \left[\frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right) - \frac{1}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right)\right] & \dots \\ \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2\right] & \left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2\right] & \dots & \left[\frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^2 - \frac{1}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right)^2\right] & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^s - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^s\right] & \left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^s - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^s\right] & \dots & \left[\frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^s - \frac{1}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right)^s\right] & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Vizsgáljuk meg, hogy az egyes sorok, illetve oszlopok elemeiből álló végtelen sorok konvergensek-e, s ha igen, összegeik összegezhetőek és egymással egyenlők-e? Ha nem, mi ennek az oka?

7. Írjuk fel zárt alakban a

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + kx^k + \dots$$

sor összegét valamely tetszőleges x értékre, amelyre teljesül az $|x| < 1$ kikötés.

Útmutatás: Írjuk fel a sort így:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^k x^n \right) = x + (x^2 + x^2) + (x^3 + x^3 + x^3) + \dots$$

Könnyen belátható, hogy a nagy átrendezési tétel feltételei teljesülnek. A $\sum_{s=k}^{\infty} x^s$ sorok összegét zárt alakban is elő tudjuk állítani, az „oszlopösszegek” összege pedig ismét geometriai sor. Így

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

8. Tekintsük a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n x^n = x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 2x^5 + 4x^6 + \dots$$

(ún. Lambert-féle) sort, ahol τ_n jelenti az n természetes szám összes osztóinak számát, és legyen $|x| < 1$. Mutassuk ki, hogy e sor átírható

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$$

alakba, amelyben tehát már nem szerepel az n osztóinak számától függő együttható.

9. Tekintsük a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n^* x^n = x + 3x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 6x^5 + 12x^6 + \dots$$

sor az $|x| < 1$ feltétel mellett, ahol τ_n^* az n természetes szám összes osztójának összegét jelenti. Bizonyítsuk be, hogy a sor konvergens, továbbá, hogy átírható a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n}$$

alakba.

10. Az $|x| < 1$ feltétel mellett igazoljuk a következő egyenlőségeket:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^{2k}}; \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{1-x^{2k+1}};$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(1-x^k)^2}; \quad d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n+1}}{1-x^{4n+2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}(1+x^{4k+2})}{(1-x^{4k+2})^2},$$

11. Jelentsen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

egy tetszőleges konvergens sort, x pedig egy tetszőleges, az $|x| < 1$ relációnak eleget tevő számot.

Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ sor is konvergens, és mivel mindkét sor értéke x -től függ, az első $f(x)$ -szel, a másodikat $g(x)$ -szel jelölhetjük:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n; \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}.$$

Bizonyítsuk be, hogy fennáll a következő egyenlőség: $g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f(x^m)$.

12. Az $\{x_n\}$ számsorozathoz ($n = 0; 1; 2; \dots$) képezhetjük az első differenciák sorozatát:

$$\{\Delta x_0 = x_0 - x_1; \Delta x_1 = x_1 - x_2; \dots; \Delta x_k = x_k - x_{k+1}; \dots\},$$

majd az új sorozat differenciasorozatát, az eredeti sorozat második differenciasorozatát stb. Általában a k -adik differenciasorozat m -edik elemét a következőképp írhatjuk fel:

$$\Delta^k x_m = \Delta^{k-1} x_m - \Delta^{k-1} x_{m+1} = \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} (-1)^s x_{m+s}.$$

Tekintsük a konvergens $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ sort, és képezzük ennek segítségével a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}}$$

sor. Igazoljuk, hogy utóbbi is konvergens, és $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}}$

(Euler-féle sortranszformáció).*

13. Igazoljuk, hogy a Cauchy-féle szorzattétel feltétele (amely szerint két abszolút konvergens sor szorzata — Cauchy szerint, azaz átlósan rendezve a részletszorzatokat — abszolút konvergens sort ad) szükséges is olyan értelemben, hogy egy abszolút és egy feltételesen konvergens sor szorzata (ha a részletszorzatokat átlósan rendezzük) nem adhat abszolút konvergens sort.

14. Konvergens-e a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} \quad \text{és a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

sor Cauchy-féle (tehát átlók mentén rendezett) szorzata?

15. Konvergens-e a feltételesen konvergens

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$$

sornak önmagával vett és Cauchy szerint rendezett szorzata?

16. Készítsünk olyan feltételesen konvergens sorokat, amelyeknek Cauchy szerint rendezett szorzata konvergens sort ad. Hogyan lehetséges ez? Ilyen-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

sor Cauchy szerint rendezett négyzete?

* L. pl. Knopp: Unendliche Reihen, 237. és 255. o.

3. §. FOURIER-SOROK

a) Általános megjegyzések

a) A kérdés feltevése | A függvények *Taylor*-polinomokkal, illetve *Taylor*-sorokkal történő approximációjának komoly hátrányai is vannak. Ezek közül talán nem is az a legfontosabb, hogy csak analitikus függvényeknél lehet az approximáció jóságát — még egy intervallumon is — minden határon túl növelni. Inkább az a tény akadályozza a *Taylor*-polinomok széleskörű alkalmazását, hogy az alapul választott pont elég kis környezetében ugyan általában kitűnő approximációt kapunk, de a távolsággal rohamosan fokozódik a pontatlanság.

Nagyon sok olyan függvénytani probléma is felvetődik, amely egy jól meghatározott intervallumon kívánja meg az approximáció jóságát, s ez az intervallum már nem tekinthető egy pont kis környezetének. Emellett a technikai jellegű problémák esetleg olyan kívánalmat is felvetnek, hogy a tekintett függvényt nem polinomokkal, hanem más függvényekből álló összegekkel kell approximálni. Így pl. a váltakozóáramok elméletében és a rezgésstanban — hamarosan látni fogjuk, hogy miért — trigonometrikus függvényekből álló összegekkel, pontosabban

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

alakú, ún. trigonometrikus sorokkal célszerű approximálni* a függvényeket.

Rögzített $[a, b]$ intervallum felett approximálva az $f(x)$ függvényt valamely

$$\sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)$$

összeeggel, az approximáció jóságát kétféleképp szoktuk megítélni. *Csebisjev*-típusú approximációról beszélünk akkor, ha a

$$\max \left| f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) \right|_{a \leq x \leq b}$$

mennyiséggel, azaz a függvény és az approximáló összeg eltérésének abszolút maximumával jellemezzük a közelítés jóságát; *Fourier*-típusú approximációról, ha az

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) \right]^2 dx$$

* Más szóval: közelíteni.

integrál nagyságával, azaz szemléletesen a két függvény ordinátadifferenciái négyzete által lefedett terület nagyságával jellemezzük a közelítés jóságát. Maga az approximáció lényegében azt jelenti, hogy rögzített $\{\varphi_k(x)\}$ függvénysorozat mellett úgy igyekezzünk megválasztani az $\{a_k\}$ együtthatórendszer, hogy a

$$\max \left| f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) \right|_{a \leq x \leq b} \quad \text{illetve az} \quad \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) \right]^2 dx$$

a lehető legkisebb legyen. Ebben a kötetben mi csak az utóbbi kérdéssel foglalkozunk.

$\beta)$ Az ortogonalitás és jelentősége

Már a *Taylor*-polinomok, illetve *Taylor*-sorok konstrukciójánál láttuk, hogy milyen nagy jelentőségű az approximáló összeg tagjainak megfelelő választása. Csak megfelelő választás mellett tudtuk elérni, hogy

a) az approximáció finomításakor — az összeg tagszámának emelésekor — a már kiszámított együtthatókat nem kell újra számolni, mert a nagyobb tagszámú összeg megfelelő szelete azonos az eredeti approximáló polinommal;

b) a keresett együtthatókat nem egy n egyenlethől álló egyenletrendszer megoldása árán kell kiszámítani, hanem egymást követően, mindegyiket egy-egy egyenlet megoldása árán.

E két tény akkor és csakis akkor következik be *Fourier*-típusú approximáció esetén, ha a $\{\varphi_k(x)\}$ függvénysorozat kielégíti az

$$\int_a^b \varphi_m(\xi) \cdot \varphi_n(\xi) d\xi \begin{cases} = 0, & \text{ha } m \neq n \\ \neq 0, & \text{ha } m = n \end{cases}$$

relációkat, amit úgy szoktunk kifejezni: a $\{\varphi_k(x)\}$ rendszer függvényei ortogonálisak egymásra az $[a, b]$ intervallumon.

Ha még az

$$\int_a^b \varphi_n^2(\xi) d\xi = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

relációk is teljesülnek, a $\{\varphi_k(x)\}$ függvényrendszert ortogonális és normált, röviden ortonormált függvényrendszernek nevezzük. Azonnal belátható, hogy ha egy függvényrendszer ortogonális, akkor az egyes függvényeket alkalmasan választott konstansokkal megszorozva ortonormált rendszert tudunk felépíteni.

b) Szorosabb értelemben vett Fourier-sorok

a) Definíciók, általános megjegyzések

Az

$$\{1; \sin x; \cos x; \sin 2x; \cos 2x; \dots; \sin nx; \cos nx; \dots\},$$

illetve az

$$\left\{ 1; \sin \frac{\pi}{l} x; \cos \frac{\pi}{l} x; \sin 2 \frac{\pi}{l} x; \cos 2 \frac{\pi}{l} x; \dots; \sin n \frac{\pi}{l} x; \cos n \frac{\pi}{l} x; \dots \right\}$$

függvényrendszer felhasználásával konstruált (*Fourier*-értelemben) legjobban approximáló sorokat nevezzük szűkebb értelemben vett *Fourier*-soroknak.

A konstrukció kérdése mellett az alábbi 4 kérdést vethetjük fel:

1. Milyen jó az approximáció?
2. Milyen tulajdonságú függvényeknél nőhet minden határon túl az approximáció jósága?
3. Mennyire tér el az approximáló polinom, illetve sor a függvénytől az egyes pontokban (az approximáció jóságát ti. a definíció szerint ezen eltérések négyzetének integrálja méri, ez utóbbi pedig — mivel a sorbafejtett függvény folytonosságát nem kötöttük ki, még kevésbé tudjuk, hogy a sor konvergál-e, s ha igen, egyenletesen-e — 0 lehet akkor is, ha nem mindenütt 0 az eltérés)?
4. Egyértelmű-e az eljárás?

Megjegyezzük, hogy az eddigiek szerint csak olyan függvényekhez rendelhetünk Fourier-sort, amelyekre az

$$\int_a^{a+2\pi} \left[f(t) - a_0 - \sum_{k=0}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right]^2 dt$$

integrálnak értelme van n minden értékére, azaz csak az $[a, a+2\pi]$ intervallumon négyzetesen integrálható függvényekhez. Könnyen belátható, hogy a legjobban approximáló polinom együtthatóit ez esetben az alábbi integrálok definiálják:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) dt; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) \cos nt dt; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) \sin nt dt \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Mint hogy ez utóbbi együtthatósorozatot akkor is képezni tudjuk, ha $f(x)$ az $[a, a+2\pi]$ intervallumon (csak) integrálható, ilyen f -ekhez is hozzárendelünk Fourier-sort (ez esetben azonban a trigonometrikus sor nem Fourier-értelemben legjobban approximáló sor).

β) A Bessel-egyenlőség és a maradéktag

A sorbafejtés intervallumán négyzetesen integrálható függvényt Fourier-sorának n -edik szelete ilyen mértékben approximálja:

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi} \left[f(x) - a_0 - \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right]^2 dx = \\ = \int_a^{a+2\pi} f^2(x) dx - \pi \left(2a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right). \end{aligned}$$

Mint hogy pedig

$$\int_a^{a+2\pi} f^2(t) dt = \pi \left(2a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

(Bessel-féle egyenlőség), azért minden négyzetesen integrálható függvényt *Fourier-sora* 0-hibával approximál.

Ami az $r_n(x)$, illetve $r(x)$ „maradéktagokat“, azaz a függvény és *Fourier-sora* eltérését illeti, azokat a következő integrálokkal tudjuk megadni:

$$\begin{aligned} r_n(x) &= f(x) - a_0 - \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} [f(x) - f(t)] \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} dt, \end{aligned}$$

illetve

$$r(x) = f(x) - a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x).$$

Ezen maradéktagok alapján azonban sokkal nehezebb általában becsléseket megadni, mint a *Taylor-sorok* esetében; ez indokolja, hogy viszonylag sok módszer alapján becsüljük az eltéréseket. Lényeges megjegyezni, hogy *Fourier-sorok* esetén a függvény és *Fourier-sora* n -edik szeletének bármely pontban mért eltérését befolyásolja a függvény egész menete (legalább is az alapintervallumon, az $[a, a + 2\pi]$ intervallumon mutatott viselkedése), ezért becslést csak akkor tudunk adni, ha a függvény viselkedését általában tudjuk jellemezni. Ilyen becsléseket a feladatok között találunk.

Igen érdekes, hogy ugyanekkor valamely pontban a függvény és *Fourier-sorának* különbségét csak az adott pont egy tetszőlegesen kis környezetében felvett függvényértékek befolyásolják (*Riemann-féle lokalizációs tétel*).

A második kérdésre a feleletet már megadtuk. Arra viszont, hogy a tekintett függvényt valamely pontban mikor állítja elő *Fourier-sora*, általános, szükséges és elégséges kritériumunk nincs. Néhány elégséges kritériumot közlünk, bizonyításukat illetően az irodalomra utalunk.

Legyen x_0 a sorbafejtési intervallum egy belső pontja ($a < x_0 < a + 2\pi$). Ahhoz, hogy az $f(x)$ függvény *Fourier-sora* az x_0 helyen (éspedig az $f(x_0)$ értékhez, ha $f(x)$ ezen a helyen folytonos, illetve általában az $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ értékhez) konvergáljon, elegendő, ha az $f(x)$ függvénynek az $x = x_0$ helyen véges jobboldali és véges baloldali deriváltja van, azaz létezik a

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0 + 0)}{x - x_0} \quad \text{és a} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0 - 0)}{x - x_0}$$

határérték. Elegendő azonban az is, ha (*Lipschitz-feltétel*) az $f(x)$ függvény az $x = x_0$ hely egy kis környezetében valamely $\alpha (\alpha > 0)$ -rendű *Lipschitz-feltételnek* tesz eleget.*

* Az $y(x)$ függvény az $[a, \beta]$ intervallumon egy $\alpha > 0$ rendű (vagy α kitevőjű) *Lipschitz-feltételnek* tesz eleget, ha megadható egy olyan K konstans, amelyre fennáll az

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq K |x_2 - x_1|^\alpha$$

egyenlőtlenség, bármely x_2, x_1 számpárral, amelyek benne vannak az $[a, \beta]$ intervallumban, azaz amelyekre fennáll az $a \leq x_1 \leq \beta$ és az $a \leq x_2 \leq \beta$ egyenlőtlenség.

Megjegyezzük, hogy ha a tekintett függvény *Fourier*-sora valamely pontban egyáltalán konvergál, akkor a függvény e pontbeli értékéhez konvergál, ha ott a függvény folytonos, illetve bal- és jobboldali határértékének számtani közepéhez, ha ez utóbbiak léteznek.

Az egyértelműség kérdésére nem térünk ki, csak annyit jegyzünk meg, hogy a *Fourier*-sor — amint az konstrukciójából kiderül — egyértelműen van a tekintett függvényhez rendelve.*

Megjegyezzük még, hogy bármely integrálható függvény *Fourier*-együtthatói 0 sorozatot alkotnak; ezt a tényt fejezi ki az ún. *Riemann*-lemma. Feladatként igazolja az olvasó (parciális integrálással pl. könnyen meg), hogy egy 2π periódusú és k -szor differenciálható függvény *Fourier*-együtthatói $O\left(\frac{1}{n^k}\right)$ nagyságrendűek, ha a k -adik derivált integrálható függvény.

γ) A sorbafejtés technikája

A *Taylor*-sorokkal szemben *Fourier*-soroknál általánosságban nagyon kevés olyan módszert ismertethetünk, amely megkönnyítené az együtthatók kiszámítását. Erre persze kevésbé is van szükségünk. Általában ugyanis vagy zárt alakban meg tudjuk adni az általános együtthatót meghatározó integrál integrandusának primitív függvényét, és akkor az általános, az n -edik együttható közvetlenül rendelkezésünkre áll, vagy pedig csak numerikus vagy grafikus integrálással (l. pl. a sorozat B. VIII. kötetét) tudjuk — de ekkor külön-külön — az egyes együtthatókat megállapítani. Mindössze a függvény bizonyos szimmetriatulajdonságait szoktuk tudni felhasználni. Ezeket, továbbá egyéb speciális lehetőségeket illetően is az e ponthoz tartozó bő példaanyagra utalunk.

δ) A *Fourier*-sorok (trigonometrikus sorok) gyakorlati alkalmazásai

Két olyan területe van a műszaki gyakorlatnak, ahol kiterjedten alkalmazzuk a *Fourier*-sorokat. Az egyik a differenciálegyenletekkel kapcsolatos; ezzel a sorozat B. VI.—VIII. kötetében foglalkozunk részletesen. A másik: a rezgések — ezen belül elsősorban az elektromos és mechanikai rezgések — elmélete. Ezzel kissé részletesebben foglalkozunk.

Az elektromos áramkörök, illetve mechanikai rezgőkörök viselkedését egyszerű számítások alapján (tehát differenciálegyenlet-megoldás nélkül) jellemezni tudjuk, ha a (rezgést) gerjesztő feszültség, illetve áram, illetve erő az idő függvényében, $A \cos \omega t$, illetve $B \sin \omega t$ alakú függvényvel írható le; elektromos áramkörök esetében pl. ekkor és csakis ekkor alkalmazhatjuk az általánosított *Ohm*-törvényt. Más lefutású gerjesztések esetén az *Ohm*-törvény már nem érvényes, ilyen esetben elvileg már a komplikált differenciálegyenletet kellene megoldanunk, hogy az áramkör viselkedését jellemeznünk tudjuk.

Abban az esetben azonban, ha a gerjesztés periodikus függvénye az időnek, amelynek *Fourier*-sora mindenütt konvergál a függvényhez (ezt mindig feltehetjük, mert fizikailag csak olyan gerjesztő hatásokat tudunk megvalósítani, amelyeknek az idő függvényében minden pontban van jobb-, illetve bal oldali deriváltjuk; ez pedig az 5. § b) a) részben mondottak szerint elégséges feltétele a *Fourier*-sor konvergenciájának), akkor a rezgőkör viselkedését leíró differenciálegyenlet linearitása következtében jogos a következő eljárás: A gerjesztő függvényt *Fourier*-sorba fejtjük; a *Fourier*-sor egyes tagjai (mint gerjesztések) által a kérdéses körben keltett hatást könnyen tudjuk számítani; pl. alkalmazhatjuk az *Ohm*-törvényt. A gerjesztő függvény ezen tagok sora; az általa a körben keltett hatást az egyes tagok által keltett hatásokból álló sor összege adja. (Azt szoktuk röviden mondani: a szuperpozíció elvét alkalmazzuk.) A leírt eljárás helyességének szigorú matematikai bizonyítását csak a differenciálegyenletek elméletének felhasználásával a sorozat B. VI. kötetében fogjuk megadni, de bizonyos feltételekhez kötötten már az e részhez tartozó példaanyagban is elvégezzük a szigorú matematikai igazolást.

* Az itt elmondottak részletes tárgyalását találjuk pl. Szász Pál: Differenciál- és integrálszámítás könyve II. kötetében, *Fourier*-sorok címszó alatt.

Példák és feladatok

β | 1. Tekintsük az

$$y = \ln(1 + x)$$

függvényt a $0 \leq x \leq 1$ intervallumon. Határozzuk meg azt a legfeljebb első-, másod- illetve harmadfokú polinomot, amely ezen intervallumon a kérdéses függvényt Fourier-értelemben legjobban approximálja. Számítsuk ki az approximációk jóságára jellemző integrált. Ábrázoljuk a függvényt, az approximáló polinomokat és az approximáció jóságára jellemző területet.

2. Határozzuk meg azon elsőfokú polinomot, amely a $[0, 1]$ intervallumon ortogonális az $y \equiv 1$ függvényre és a normája 1. Ezután azt a másodfokú polinomot, amely ortogonális az $y \equiv 1$ -re is és az imént konstruált elsőfokú polinomra is, továbbá a normája 1, stb. Adjuk meg a további konstrukció általános gondolatmenetét.

3. Tekintsük az

$$y = \ln(1 + x) \quad \text{és az} \quad y = \sin x$$

függvényt a $0 \leq x \leq 1$ intervallumon és adjuk meg a 2. feladatban konstruált ortonormált rendszer szerinti első néhány Fourier-együtthatójukat.

γ | 1. Igazoljuk, hogy a sorbafejtés intervallumának felezőpontjára szimmetrikus függvény Fourier-sora tiszta cosinus-sor [azaz $b_k = 0$; $k = 1, 2, \dots$], e pontra antiszimmetrikus függvény sora tiszta sinus-sor [azaz $a_k = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)], feltéve, hogy e felező pont abszcisszája a π -nek egész számú többszöröse.

2. Tekintsük az $a \leq x \leq a + 2\pi$ intervallumban integrálható $f(x)$ függvényt, és tegyük fel, hogy $f(x)$ az $a < x < a + \pi$ intervallumon szimmetrikus az $x = a + \frac{\pi}{2}$ helyre, és ugyanígy az $a + \pi < x < a + 2\pi$ intervallumon szimmetrikus az $x = a + \frac{3\pi}{2}$ helyre.

Igazoljuk, hogy ez esetben $f(x)$ páros indexű sinus-együtthatói és páratlan indexű cosinus-együtthatói 0-val egyenlőek, azaz

$$a_{2k-1} = 0; \quad b_{2k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

feltéve, hogy az a abszcissza a π -nek egész számú többszöröse.

3. Megtartva a 2. feladat jelöléseit, tegyük fel, hogy a kérdéses intervallumok felező pontjára $f(x)$ (nem szimmetrikus, hanem) antiszimmetrikus. Igazoljuk, hogy ez esetben a páros indexű cosinus-együtthatók és a páratlan indexű sinus-együtthatók egyenlőek 0-val, azaz

$$a_{2k} = 0; \quad b_{2k+1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

feltéve, hogy az a abszcissza a π -nek egész számú többszöröse.

4. Határozzuk meg az

$$y(x) \equiv \begin{cases} -1, & \text{ha } -\pi < x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ 1, & \text{ha } 0 < x < \pi \\ y(x + 2k\pi); & k = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots \end{cases}$$

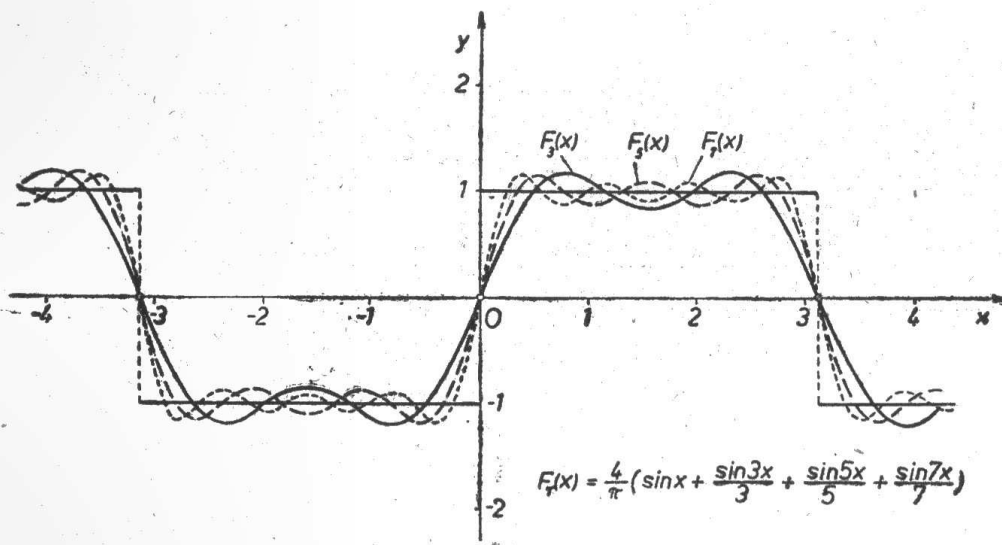
* Más szóval y 2π periódusú függvény.

függvény *Fourier*-sorát. Mely pontokban konvergál a *Fourier*-sor a függvényhez? Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken egyenletes a konvergencia. Ábrázoljuk a függvényt és *Fourier*-sorának második, harmadik és negyedik szeletét.

Megoldás: Tekintettel arra, hogy a függvény 2π periódusú, tetszőlegesen választhatjuk ki azt a 2π hosszúságú szakaszt, amelyre támaszkodva meghatározzuk a *Fourier*-együtthatókat. Célszerű tehát olyan intervallumot választani, ahol a számításokat a szimmetriaviszonyok kihasználásával az 1., 2. és 3. feladatok szellemében meg tudjuk rövidíteni. Így pl. a $(-\pi, \pi)$ intervallumot választva, a *Fourier*-sor nyilván tiszta sinusos sor lesz, mert a függvény az origóra antiszimmetrikus, továbbá e sinus-sor páros indexű együtthatói is 0-val lesznek egyenlők, minthogy a függvény a $(-\pi, 0)$ szakaszon a $-\frac{\pi}{2}$ helyre, a

$(0, \pi)$ szakaszon a $\frac{\pi}{2}$ helyre szimmetrikus. Így — annak ismételt felhasználásával, hogy a függvény antiszimmetrikus —

$$\begin{aligned} b_{2n+1} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin(2n+1)\xi \, d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi) \sin(2n+1)\xi \, d\xi = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2n+1)\xi \, d\xi = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(2n+1)\xi}{(2n+1)} \right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{2n+1}, \end{aligned}$$



6. ábra

a függvény *Fourier*-sora tehát:

$$y(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

A 3. § b) a) részben ismerttetett elégséges kritériumok bármelyike alapján következik, hogy a sor mindenütt konvergens és a függvényt állítja elő; az $x = 0$ helyen speciálisan azért, mert a függvényértéket is a jobb- és baloldali határérték számtani közepeként definiáltuk.

A sor nyilván egyetlen olyan intervallumban sem lehet egyenletesen konvergens amely a szakadási helyeket $(0; \pm \pi; \pm 2\pi; \dots)$ tartalmazza; hiszen folytonos függvényekből álló egyenletesen konvergens függvénysor összege maga is folytonos. Minden olyan zárt intervallumban azonban, amely e szakadási pontokat nem tartalmazza, egyenletes a konvergencia. Ennek bizonyítására elegendő megmutatni, hogy a $[\delta; \pi - \delta]$ intervallumon $(0 < \delta < \pi; \text{tetszőleges})$ egyenletes a konvergencia; ebből és a sor páratlanságából és periodicitásából következik az általánosabb állítás is.

Az *Abel*-féle átalakítást célszerű használni az említett szakaszon az egyenletes konvergencia igazolásához. A *Cauchy–Bolzano* kritérium szerint a kérdéses sor a $[\delta; \pi - \delta]$ szakaszon akkor és csakis akkor konvergál egyenletesen, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz megadható az $n_0 = n_0(\varepsilon; \delta)$ küszöbszám úgy, hogy bármely természetes k számra és a $\delta \leq x \leq \pi - \delta$ köz bármely x helyére fennáll az

$$\left| \sum_{s=n}^{n+k} \frac{\sin(2s+1)x}{2s+1} \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség, hacsak már $n \geq n_0$. Az *Abel*-féle átalakítást használva tehát:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{s=n}^{n+k} \frac{\sin(2s+1)x}{2s+1} \right| &\leq \left| \sum_{s=n}^{n+k} \left(\frac{1}{2s+1} - \frac{1}{2s+3} \right) \frac{\sin^2(n+k+1)x}{\sin x} \right| + \\ &+ \left| \frac{\sin^2(n+k+1)x}{\sin x} \cdot \frac{1}{2n+2k+3} - \frac{\sin^2 nx}{\sin x} \frac{1}{2n+1} \right| < \\ &< \frac{1}{\sin \delta} \cdot \left\{ \sum_{s=n}^{n+k} \frac{2}{(2s+1)(2s+3)} + \frac{1}{2n+2k+3} + \frac{1}{2n+1} \right\} < \\ &< \frac{1}{2 \sin \delta} \left\{ \sum_{s=n}^{n+k} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \right\} \leq \frac{1}{(n-1) \sin \delta} \end{aligned}$$

Ezen átalakítások közben a következő relációkat használtuk fel: $|\sin^2 kx| \leq 1$;

$$\sum_{n=0}^{k-1} \sin(2n+1)x = \frac{\sin^2 kx}{\sin x} \quad \sum_{s=n}^{n+k} \frac{1}{n^2} \leq \int_{n-1}^{n+k} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n-1}.$$

Így tehát az $n_0 \geq 1 + \frac{1}{\varepsilon \sin \delta}$ választás mellett a *Cauchy–Bolzano* kritérium teljesül, a *Fourier*-sor tehát a $[\delta; \pi - \delta]$ szakaszon és így minden zárt szakaszon, amely nem tartalmazza a $0; \pm \pi; \pm 2\pi; \dots$ helyeket, egyenletesen konvergál a függvényhez, amelynek a *Fourier*-sora.

5. Határozzuk meg az

$$y(x) \equiv \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & \text{ha } 0 \leq x < 2\pi \\ y(x + 2k\pi), & k = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots \end{cases}$$

függvény *Fourier*-sorát. Adjuk meg a sor konvergenciatartományát. Mely intervallumokon egyenletes a konvergencia? Ábrázoljuk a függvényt és *Fourier*-sorának második, harmadik, illetve ötödik szeletét.

6. Tekintsük az 5. feladatban felírt *Fourier*-sort és határozzuk meg azt a $0 < \xi_n$ helyet, ahol a sor n -edik szelete először veszi fel szélső értékét, továbbá e szélső érték η_n nagyságát. Igazoljuk, hogy míg a várakozásnak megfelelően

$$\xi_n \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty \text{ addig — meglepő módon — } \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n > \frac{\pi}{2}.$$

Mivel magyarázható ez a különleges (ún. *Gibbs-féle*) jelenség? (L. pl. Knopp: Unendliche Reihen, 365. o., 469. o.)

7. Írjuk fel az

$$y = x^2$$

függvénynek a $[0, 2\pi]$, illetve a $[-\pi, \pi]$ intervallumra támaszkodó *Fourier*-sorát. Mely tartományokban konvergensek, illetve mely intervallumokon egyenletesen konvergensek e sorok? Ábrázoljuk a függvényt és a két *Fourier*-sor által előállított függvényt.

8. Írjuk fel az

$$y = (x - 1)^2$$

függvénynek a $[-2, 4]$ intervallumra támaszkodó *Fourier*-sorát. Hol konvergensek, illetve mely intervallumokon egyenletesen konvergensek e sor? Ábrázoljuk a függvényt, *Fourier*-sorát, és annak második és negyedik szeletét.

Megoldás: Minthogy nem 2π hosszúságú intervallumra támaszkodunk, nem a trigonometrikus rendszert, hanem az ebből lineáris transzformációval származó, a 3. § b) α) részben ismertetett rendszert használjuk. Emellett a számítások egyszerűbbé tétele végett célszerű a $\xi = x - 1$ lineáris transzformációt elvégezni, az $y(\xi)$ függvény *Fourier*-sorát meghatározni és azután visszatranszformálni; így a szimmetriatulajdonságokat is fel tudjuk használni.

Tekintsük tehát az

$$y = \xi^2$$

függvényt a $-3 \leq \xi \leq 3$ intervallumon. Tekintettel a függvény páros voltára, sora tiszta cosinus-sor:

$$a_0 = \frac{1}{6} \int_{-3}^{+3} f(\xi) d\xi = \frac{1}{6} \left[\frac{\xi^3}{3} \right]_{-3}^3 = 3.$$

$$a_n = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(\xi) \cos n \frac{\pi}{3} \xi d\xi = \frac{2}{3} \int_0^3 \xi^2 \cos n \frac{\pi}{3} \xi d\xi = (-1)^n \frac{36}{n^2 \pi^2},$$

minthogy $\cos n\pi = (-1)^n$. Így

$$y(\xi) \sim 3 + \frac{36}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n \frac{\pi}{3} \xi}{n^2}.$$

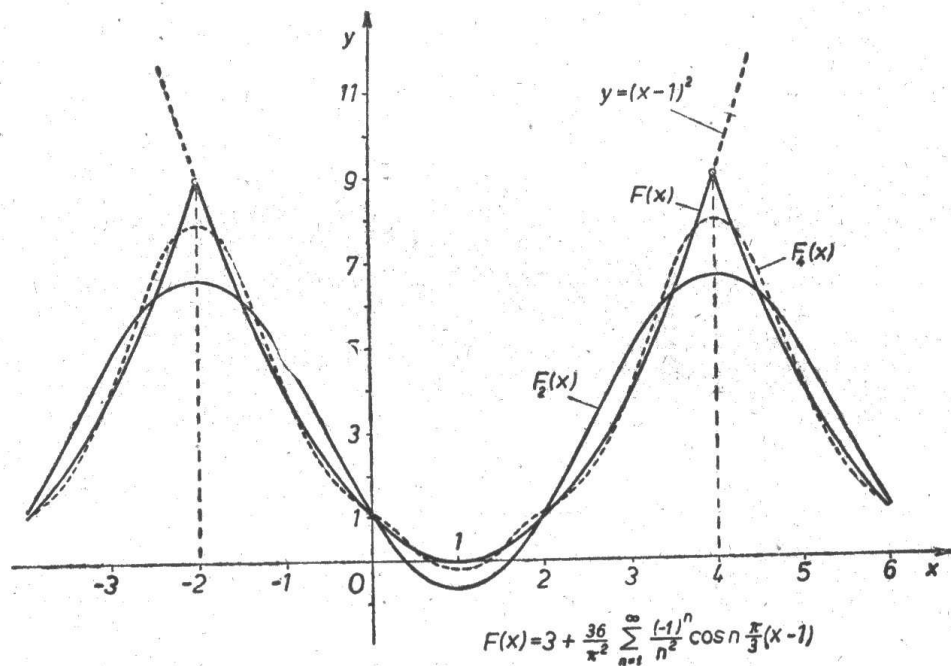
* A \sim szimbólummal azt akarjuk kifejezni, hogy a formálisan felírt *Fourier*-sor nem szükségképp állítja elő azt a függvényt, amelyhez konstruáltuk.

A 2. § a) γ) 6., ill. 7. feladata alapján tehát e sor a $-\infty < x < \infty$ intervallumon abszolút és egyenletesen konvergál. Ezen a $\xi = x-1$ lineáris transzformáció nyilván nem változtat.

Így

$$y(x) \sim 3 + \frac{36}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \cos n \frac{\pi}{3} (x-1) =$$

$$= 3 + \frac{36}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n \cos n \frac{\pi}{3}}{n^2} \cos n \frac{\pi}{3} x + \frac{(-1)^n \sin n \frac{\pi}{3}}{n^2} \sin n \frac{\pi}{3} x \right]$$



7. ábra

9. Írjuk fel az

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi x}{4}, & \text{ha } 0 \leq x \leq \pi, \\ \frac{\pi x}{4} - \frac{3\pi^2}{8}, & \text{ha } \pi \leq x \leq 2\pi, \\ y(x + 2k\pi); & k = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots \end{cases}$$

függvény Fourier-sorát. Adjuk meg a sor konvergenciatartományát, az abszolút konvergenciatartományát és azon intervallumokat, amelyek fölött a sor egyenletesen konvergál.

10. Tekintsük az

$$y = \begin{cases} \cos \alpha x, & \text{ha } -\pi \leq x \leq \pi. \\ y(x + 2k\pi); & k = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots \end{cases}$$

függvényt, ahol α tetszőleges valós szám. Írjuk fel a függvény *Fourier*-sorát, állapítsuk meg a konvergenciatartományt és azon intervallumokat, amelyek fölött a sor egyenletesen konvergál. Írjuk fel a kapott eredmény alapján a

$$\pi \frac{\cos \alpha \pi}{\sin \alpha \pi}; \quad a \quad \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \quad \text{és} \quad a \quad \pi \operatorname{tg} \frac{\alpha \pi}{2}$$

függvényeket előállító végtelen sorokat.

11. Írjuk fel az

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} & \text{ha } -\pi \leq x \leq \pi, \\ y(x + 2k\pi); & k = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots \end{cases}$$

függvény *Fourier*-sorát.

12. Írjuk fel az

$$y(x) = \begin{cases} \frac{(x + \pi)^3}{3\pi^2}, & \text{ha } -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{(x - \pi)^3}{3\pi^2}, & \text{ha } 0 \leq x \leq \pi \\ y(x + 2k\pi), & k = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots \end{cases}$$

függvény *Fourier*-sorát. Adjuk meg a sor konvergenciatartományát és azon intervallumokat, amelyeken egyenletes a konvergencia. Folytonos-e a függvény, illetve első, illetve második differenciálhányadosa? Differenciálható-e egyszer, illetve kétszer a kapott *Fourier*-sor tagonként? Ha konvergensek a kapott sorok, előállítják-e az $y(x)$ függvény első illetve második deriváltját?

13. Adjuk meg a következő függvények *Fourier*-sorát, e sorok konvergenciatartományát, illetve azon intervallumokat, amelyek fölött egyenletesen konvergálnak a sorok! Adjuk meg azt a tartományt is, ahol a sor előállítja a sorbafejtett függvényt!

a) $y = \cos^2 \frac{x}{2}.$

b)

$$z(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & \text{ha } 0 \leq x < y, \\ \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, & \text{ha } x = y \\ \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}, & \text{ha } y < x \leq \pi \\ -z(-x), & \text{ha } -\infty < x < \infty \\ z(x + k\pi), & k = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots \end{cases}$$

c) $y(x) = \left| \cos \frac{x}{2} \right|.$

d) $y(x) = |\sin x|.$

e)

$$y(x) = \begin{cases} \int_0^x |\sin \xi| d\xi & \text{ha } -\pi \leq x \leq \pi \\ y(x + 2k\pi); & k = \pm 1; \pm 2; \dots \end{cases}$$

14. A Taylor-sorokkal kapcsolatban definiáltuk a Bernoulli-polinomokat, illetve a megfelelő periodikus függvényeket a következő relációk alapján: B_n^* az a legfeljebb n -ed fokú polinom, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$a) \quad B_{n-1}(x) = \frac{d}{dx} B_n^*(x); \quad b) \quad \int_0^1 B_n^*(\xi) d\xi = 0$$

c) $B_n^*(x)$ amelynél a b) feltétel nem teljesülhet, legyen azonosan 1. Legyen továbbá $B_n(x)$ olyan 1 periódusú függvény, amely a $0 \leq x \leq 1$ szakaszon (ha $n > 1$, illetve a $0 < x < 1$ szakaszon, ha $n = 1$) azonosan megegyezik $B_n^*(x)$ -szel, írjuk fel $B_n(x)$ Fourier-sorát!

8

1. Tekintsük a következő differenciálegyenletet:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + a \frac{dy(x)}{dx} + by(x) = f(x),$$

ahol a és b tetszőleges konstansok és

$$f(x) \equiv \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx \quad (-\infty < x < \infty),$$

(azaz $f(x)$ -et a fenti feltételeink szerint mindenütt konvergens trigonometrikus sor definiálja).

Keressük meg azt az

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

trigonometrikus sort, amelyet $y(x)$ helyébe helyettesítve a fenti egyenletben ($y'(x)$ és $y''(x)$ -et pedig formálisan, tagonkénti differenciálással számítva), az egyenlet két oldalán ugyanaz a végtelen sor szerepel. Milyen elégséges feltételt tudunk adni arra vonatkozóan, hogy az általunk kiszámított

$$\eta(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

sor konvergens legyen, továbbá, hogy összeg: az $\eta(x)$ függvény értelmezési tartományában kielégítse a differenciálegyenletet?

Megoldás: A számítás formális részét nem nagyon részletezzük.

$$\eta'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx),$$

$$\eta''(x) \sim - \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 a_n \sin nx + n^2 b_n \cos nx).$$

$$ba_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(-n^2 a_n + a_n b_n + b_n a_n) \cos nx + (b_n b_n - a_n a_n - n^2 b_n) \sin nx] =$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

amiből:

$$a_0 = \frac{a_0}{b},$$

$$a_n(b - n^2) + b_n a_n = a_n,$$

$$-a_n a_n + b_n(b - n^2) = 0,$$

azaz
$$a_n = \frac{a_n(b - n^2)}{(b - n^2)^2 + a^2 n^2} = a_n \frac{1}{(b - n^2) + \frac{a^2 n^2}{b - n^2}}, \quad b_n = \frac{a_n a_n}{(b - n^2)^2 + a^2 n^2}.$$

Elsősorban azt kell meggondolnunk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat szükségképp 0-sorozat, minthogy másképp az $f(x)$ -et definiáló sor nem lehetne mindenütt konvergens. Ugyanis pl. az $x = 0$ helyen

$$f(0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

amiből következik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (1. a 2. § a) $\gamma)$ 2. feladatot). Így $a_n = o(1)$, tehát

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right); \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Ebből azonban az következik, hogy az

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

sor abszolút és egyenletesen konvergens, és az általa előállított $\eta(x)$ függvény legalábbis folytonos. Tekintsük most a formális differenciálással nyert

$$\eta'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx) \text{ sort. Ennek páros része, a } \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx$$

sor nyilván abszolút és egyenletesen konvergens a $-\infty < x < \infty$ szakaszon, minthogy

$$nb_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

A sor páratlan része, a

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n \sin nx$$

sor szintén egyenletesen konvergens a $-\infty < x < \infty$ szakaszon. (Ennek a sornak az abszolút konvergenciáját nagyon körülményes lenne kimutatni; minthogy erre a továbbiakban úgy sincs szükségünk, nem igazoljuk.) Ezt a következőképp láthatjuk be: na_n felírható ilyen alakban is:

$$na_n = -\frac{a_n}{n} + \frac{C_n}{n^2},$$

ahol $\{C_n\}$ egy korlátos 0-sorozat. Ugyanis

$$\begin{aligned} na_n &= \alpha_n \frac{bn - n^3}{n^4 - (2b - a^2)n^2 + b^2} = -\frac{\alpha_n}{n} \cdot \frac{n^4 - bn^2}{n^4 - (2b - a^2)n^2 + b^2} = \\ &= -\frac{\alpha_n}{n} \left[1 + \frac{b - a^2}{n^2} \cdot \frac{n^4 - b^2n^2}{n^4 - (2b - a^2)n^2 + b^2} \right]; \\ \frac{C_n}{n^2} &= -\frac{\alpha_n}{n} (b - a^2) \cdot \frac{n^4 - b^2n^2}{n^4 - (2b - a^2)n^2 + b^2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Így tehát a $-\sum_{n=1}^{\infty} na_n \sin nx$ sor így is írható:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} na_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} \sin nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{n^2} \sin nx.$$

Az összeg második tagja mármost abszolút és egyenletesen konvergál a $-\infty < x < \infty$ intervallumon, a 2. § a) γ) 6., ill. 7. feladata szerint. Az első tag pedig nyilván, az $\eta(x)$ függvény primitív függvényének formális Fourier-sora. Azon intervallumokon tehát, ahol $\eta(x)$ egyenletesen konvergál,* egyenletesen konvergál a tagonkénti integrálásából származó sor is.

Az η'' -t definiáló trigonometrikus sort már nem is kell vizsgálnunk, ugyanis ez a sor a konstrukció következtében nem más, mint az $f(x)$ -et definiáló sor és az $(a\eta' + b\eta)$ -t definiáló sor különbsége. Az $b\eta$ -t definiáló sor mindenütt egyenletesen konvergens, az $a\eta'$ -t definiáló sor pedig legalább azon intervallumok felett konvergál egyenletesen, ahol $f(x)$ sora is egyenletesen konvergens. Így ezen intervallumokon lineáris kombinációjuk, η'' sora is egyenletesen konvergál, ott tehát az $\eta(x)$ függvény második deriváltját állítja elő.

A megoldásként kapott

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

sor tehát a $-\infty < x < \infty$ intervallumon abszolút és egyenletesen konvergens, és mindazon intervallumokon, ahol az $f(x)$ függvényt definiáló sor egyenletesen konvergál, a differenciálegyenlet egy megoldását állítja elő.**

2. Tekintsük ismét az

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

differenciálegyenletet, ahol az $f(x)$ függvényt az

$$f(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nx \quad (-\infty < x < \infty)$$

trigonometrikus sor definiálja.

Az 1. feladat mintájára írjuk fel formális számolás alapján azt az

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

* Ez egyáltalán nem szükséges feltétel!

** Ez csak elégséges, távolról sem szükséges feltétel. A B. VII. kötetben enyhébb feltételek mellett is igazoljuk majd az állítást.

trigonometrikus sort, amely formálisan kielégíti a differenciálegyenletet. Igazoljuk, hogy e sor a $-\infty < x < \infty$ intervallumon egyenletesen és abszolút konvergens, és azon intervallumokon, amelyeken a $\sum \beta_k \sin kx$ sor egyenletesen konvergál, a differenciálegyenlet egy megoldását állítja elő.

3. Megtartva az 1., illetve 2. feladat jelöléseit, igazoljuk, hogy — ha a differenciálegyenlet jobb oldalán szereplő $f(x)$ ún. inhomogén tagot általánosan az

$$f(x) \equiv \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \quad (-\infty < x < \infty)$$

trigonometrikus sor definiálja — a differenciálegyenlethez formálisan konstruált

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

alakú trigonometrikus polinom a $-\infty < x < \infty$ intervallumon abszolút és egyenletesen konvergál, és azon intervallumokon, ahol az inhomogén tag sora egyenletesen konvergál, a differenciálegyenlet megoldását adja.

4. Tekintsük ismét az

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

differenciálegyenletet, és tegyük fel, hogy $f(x) \equiv 0$. Mi a feltétele annak, hogy ezen ún. homogén differenciálegyenlethez található legyen az eddigiekben bemutatott módszerrel trigonometrikus sor alakjában megoldás? Ha e feltétel teljesül, a formálisan számított trigonometrikus sor konvergál-e, és ha igen, a megoldást állítja-e elő?

Mi a feltétele annak, hogy általánosabban a $2l$ periódusú trigonometrikus rendszer szerinti sorfejtésben (azaz az

$$1; \sin \frac{\pi}{l} x; \cos \frac{\pi}{l} x; \sin 2 \frac{\pi}{l} x; \dots; \sin k \frac{\pi}{l} x; \cos k \frac{\pi}{l} x; \dots$$

rendszer szerinti sorfejtésben) legyen a homogén differenciálegyenletnek trigonometrikus sor alakjában felírható megoldása?

E megoldásokat a mechanikai vagy elektromos rezgő rendszert leíró differenciálegyenlet önrezgéseinek, azon legnagyobb l mennyiség kétszeresét, amelynél még találunk önrezgést, a rezgőrendszer alaprezgése hullámhosszának, a $\frac{\pi}{l}$ mennyiséget pedig a rendszer legkisebb saját frekvenciájának nevezzük.

Rátekintve az 1., illetve 2., illetve 3. feladat megoldására, pontosabban a megoldás azon alakjára, amelyben az a_n és b_n mennyiségeket kifejezzük az α_n, β_n együtthatókkal, átható, hogy ha az a és b mennyiségek olyan értékeket vesznek fel, amelyek közel vannak egy olyan a, b értékrendszerhez, amelynél a homogén egyenletnek van megoldása, akkor az inhomogén egyenlet megoldásában az együtthatók nagy értéket vesznek fel. Ha a jobb oldalon az inhomogén tag egy olyan trigonometrikus függvény, amelynek frekvenciája egyenlő a rendszer valamelyik saját frekvenciájával, vagy pedig az inhomogén függvény Fourier-sora egyik tagjának egyenlő a frekvenciája a rendszer valamelyik saját frekvenciájával, a formálisan felírt megoldásor egyes együtthatói relatíve hatalmas értéket vesznek fel — s ez nemcsak matematikai, hanem fizikai jelenség is. Ilyenkor beszélünk rezonanciáról, illetve rezonanciaközelségről. Ez az oka annak, hogy az inhomogén tagot a gyakorlatban gondos Fourier-analízisnek szokták alávetni, mert ha az inhomogén függvény Fourier-sorában rezonanciaközelségben nagy amplitudójú: nagy együtthatójú összetevőt találunk, a rendszer esetleg olyan nagy amplitudójú rezgésekbe kezd, hogy összetörik.

5. Tegyük fel, hogy egy szinkrongenerátort a következő lefutású feszültséggel gerjesztünk:

$$U(t) \begin{cases} = \frac{y_m}{\alpha} t, & \text{ha } 0 \leq t \leq \alpha, \\ \equiv y_m, & \text{ha } \alpha \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ = U(\pi - t), & \text{ha } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi, \\ = -U(2\pi - t), & \text{ha } \pi \leq t \leq 2\pi, \\ = U(t + 2k\pi); & k = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots \end{cases}$$

Határozzuk meg e függvény Fourier-sorát, és adjuk meg az $U(t)$ függvény maximumának százalékában az egyes felharmonikusok amplitudóját.

6. A szinkrongenerátor rotorjának forgásegyenletét a következő nyomatékok figyelembevételével írjuk fel:

1. Az ún. reakciónyomaték: $M_r = -I \frac{d^2\Theta}{dt^2}$, ahol I a rotor tehetetlenségi momentuma, Θ a szögfordulás az idő függvényében;

2. a szinkronizáló nyomaték: $M_s = T_s(\omega t - \Theta)$;

3. a csillapító nyomaték: $M_c = T_d \cdot \frac{d}{dt}(\omega t - \Theta)$,

ahol a T_s és T_d bizonyos, a gépre jellemző momentumok, ω az áram, illetve feszültség körfrekvenciája (a generátor rá van kapcsolva az országos hálózatra, így nem maga határozza meg a feszültség, illetve áram körfrekvenciáját), és t az időt jelenti. A hajtógép M_h nyomatékát az $f(t)$ függvénnyel írjuk le. A rotor mozgásegyenlete azt fejezi ki, hogy a nyomatékok összege 0:

$$-I \frac{d^2\Theta}{dt^2} + T_d \frac{d}{dt}(\omega t - \Theta) + T_s(\omega t - \Theta) + f(t) = 0.$$

Az M_h nyomatékot írja le a következő függvény:

$$f(t) \begin{cases} = -1 - \frac{t}{8}, & \text{ha } 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{4\omega} \\ = -1 - \frac{3\pi}{8\omega} + \frac{3}{8}t, & \text{ha } \frac{3\pi}{4\omega} \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} \\ = -f\left(\frac{2\pi}{\omega} - t\right), & \text{ha } \frac{\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega} \\ = f\left(t + k\frac{2\pi}{\omega}\right), & k = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots \end{cases}$$

Határozzuk meg az ún. elcsavarodás: $\gamma(t) = [\omega t - \Theta(t)]$ Fourier-sorát, és ennek alapján számítsuk ki a maximális elcsavarodás, $|\omega t - \Theta(t)|_{\max}$ közelítő értékét.

Megoldás: A differenciálegyenletet célszerű úgy átalakítani, hogy csak a keresett függvény, $\gamma(t)$ szerepeljen benne. Minthogy

$$\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(\omega t - \Theta) = -\frac{d^2\Theta}{dt^2},$$

az átírás közvetlenül megy:

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \frac{T_d}{I} \frac{d\gamma}{dt} + \frac{T_s}{I} \gamma = -\frac{1}{I} f(t).$$

Meghatározva az $f(t)$ függvény *Fourier*-sorát, és az 5. § b) γ) 2. feladat mintájára megoldva a differenciálegyenletet (az $f(t)$ függvény *Fourier*-sora mindenütt egyenletesen konvergens, amint az könnyen igazolható, így a trigonometrikus sor a differenciálegyenlet megoldását állítja elő), a következő adódik:

$$\gamma(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -\frac{T_d \omega \cdot \cos n\omega t}{\pi [(T_s - I_n^2 \omega^2)^2 + T_d^2 n^2 \omega^2]} \left[1 + (-1)^{n+1} + \frac{\sin n \frac{3\pi}{4}}{2\omega n} \right] + \right. \\ \left. + \frac{(T_s - I_n^2 \omega^2) \left[1 + (-1)^{n+1} + \frac{\sin n \frac{3\pi}{4}}{2\omega n} \right]}{\pi n [(T_s - I_n^2 \omega^2)^2 + T_d^2 n^2 \omega^2]} \sin n\omega t \right\}.$$

A maximum helyét, illetve nagyságát a következőképpen lehet megállapítani: A legegyszerűbb a grafikus eljárás; elég jól konvergál $\gamma(t)$ sora, az együtthatók legfeljebb $\frac{1}{n^2}$

nagyságrendűek (még ez is csak rezonanciaközelenben, azaz a $\sqrt{\frac{T_s}{I}} \cdot \frac{1}{\omega}$ közelében levő n -ekre van így, ennél sokkal kisebb, illetve sokkal nagyobb n -ekre az a_n együtthatók $\frac{1}{n^4}$, a b_n együtthatók $\frac{1}{n^5}$ nagyságrendűek), tehát nem kell túl sok tagot figyelembe venni ahhoz,

hogy az elcsavarodást mint az idő függvényét jó közelítéssel ábrázoljuk. Ezt mindenképp meg kell tennünk, mert a maximum helyét és nagyságát csak közelítő módszerrel lehet meghatározni, és ehhez jó közelítő értékekre szükségünk van. Mármint, ha a közelítő érték elég jó, pl. a következő módon finomíthatjuk ezt a közelítő értéket: A $\gamma(t)$ *Fourier*-sorát $F(t; \gamma)$ -val jelölve, differenciálással meghatározzuk $\frac{d}{dt} F(t; \gamma)$ -t; helyettesítjük a maximumot közelítő első τ_1 közelítő értéket, és megállapítjuk, hogy

$$\frac{d}{dt} F(\tau_1; \gamma)$$

negatív-e vagy pozitív. Ha negatív, a maximumhely után, ha pozitív, előtte vagyunk; tehát eszerint változtatjuk a közelítő értéket, és így egyre szorosabb „villába” fogjuk a keresett szélsőérték-helyet. Minthogy a szélsőérték-hely elég kis környezetében a függvény lassan változik, ezen a módon elég gyorsan jó közelítő értéket kapunk a tulajdonképpen keresett mennyiségre, az elcsavarodás maximális értékére.

A $\gamma(t)$ -t definiáló trigonometrikus sorra tekintve leolvashatjuk, hogy általában annál nagyobb a maximális elcsavarodás, minél kisebb a $\sqrt{\frac{T_s}{I}} \cdot \frac{1}{\omega}$ mennyiség, s minél nagyobb T_d , ami fizikailag is világos.

4. §. A SORÖSSZEGEK SZÁMÍTÁSTECHNIKÁJA

a) A sorösszegek számítástechnikája

Azokat a módszereket, amelyekkel egy végtelen sor konvergens vagy divergens voltát kimutathatjuk, a 2. §-ban részletesen tárgyaltuk. A végtelen sorokkal kapcsolatos másik feladat: a sor összegének kiszámítása — más szóval a szeletek határértékének számítása. A sor valamely szeletét — véges számú művelet elvégzése útján — numerikusan is, minden további nélkül számítani tudjuk. Ha a sor konvergens és a szelet indexe már elegendően nagy, akkor az így számított mennyiség a keresett összeg jó közelítése; a sormaradék becslésével pedig az elkövetett hibáról is tájékozódni tudunk.

Az esetek döntő részében mindössze ennyi a feladatunk. A végtelen sor összege azonban gyakran egy jól ismert racionális vagy irracionális szám. Az előbbi esetben természetesen sokkal helyesebb, ha a racionális szám valamely közelítő értéke helyett magát a számot — a sorösszeget — adjuk meg. Az utóbbi esetben a sorösszeget természetesen nem tudjuk másképp, csak az irracionális szám szimbolumával megadni; ezt azonban érdemes ismerünk. Innét tudjuk meg, hogy melyik számnak közelítő értékeit számolhatjuk a sor segítségével. A sorösszeget azonban csak ritkán és akkor is csak a legkülönbözőbb segéd-eszközök igénybevételével tudjuk pontosan megadni. A legfontosabbakat a következőkben megismerjük.

Ha — és ez általában így van — nem tudjuk pontosan megadni a sorösszeget, hanem a sor valamely szeletével közelítjük azt, akkor annál kevesebb számolással kapunk jó közelítést, minél gyorsabban konvergál a végtelen sor. Hiszen ahhoz, hogy az n -edik szelet értékét kiszámíthassuk, legalább is n darab összeadást kell végeznünk. Vannak olyan eljárások, amelyek bizonyos esetekben gyorsítani tudják a sor konvergenciáját; pontosabban szólva: bizonyos sorokhoz hozzá tudunk rendelni olyan más sorokat, amelyeknek ugyanaz az összege, mint az eredetinek, de amelyek gyorsabban konvergálnak. Praktikus szempontból ennek óriási a jelentősége. Ezekkel a módszerekkel is részletesen foglalkozunk.

a) Sorok összegének közvetlen számítása

Bizonyos esetekben a konvergens $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor n -edik tagját elő tudjuk állítani egy $\{b_k\}$ sorozat n -edik és $(n+1)$ -edik eleme különbségeként:

$$a_n = b_n - b_{n+1}.$$

A sor összege ekkor közvetlenül számítható a sorozat határértékének segítségével:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_0 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

A feladatok között igazolni fogjuk, hogy ha a sor konvergens, akkor szükségképp a sorozat is az, és ez meg is fordítható: a sorozat konvergenciájából következik a sor konvergenciája.

Ez a módszer persze általánosítható: tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor tagjai bizonyos rögzített c_1, c_2, \dots, c_k számok és a $\{d_n\}$ sorozat segítségével ilyen alakban állíthatók elő:

$$a_n = c_1 d_{n+1} + c_2 d_{n+2} + \dots + c_k d_{n+k},$$

és a c számok algebrai összege 0, azaz $c_1 + c_2 + \dots + c_k = 0$.

Ekkor a sorozat konvergenciájából következik a sor konvergenciája, továbbá konvergencia esetén érvényes a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = c_1 d_1 + (c_1 + c_2) d_2 + (c_1 + c_2 + c_3) d_3 + \dots + d_{k-1} (c_1 + c_2 + \dots + c_{k-1}) + \lim_{n \rightarrow \infty} d_n \cdot [c_2 + 2c_3 + 3c_4 + \dots + (k-1)c_k].$$

reláció. Ha a sor tagjai tört alakjában vannak adva, e tört részléttörtekre bontásával gyakran közvetlenül megkapjuk a kérdéses $\{d_n\}$ sorozatot; illetve a c_1, c_2, \dots, c_k számokat.

β) Függvénysorok felhasználása

Sok esetben a sorösszeget úgy tudjuk zárt alakban megadni, ha látszólag lényegesen komplikáljuk a feladatot — ti. az összegezendő sor segítségével egy függvénysort írunk fel, és ennek az összegfüggvényét határozzuk meg; ennek ismeretében általában könnyű az eredeti sorösszeget megadni.

Legtöbbször az Abel-tétel alkalmazásával érünk célt. Tegyük fel ugyanis, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergenciájáról meggyőződünk. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor a $-1 < x \leq 1$ közön biztosan konvergens, ott egy folytonos $f(x)$ függvényt állít elő, és Abel-tétele értelmében

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Ez az eljárás elvileg persze mindig alkalmazható; a kérdés csak az, hogy a hatványsorával definiált $f(x)$ függvényt zárt alakban fel tudjuk-e írni. Általában a következő eljárásokkal kísérletezhetünk:

Ha az eredeti hatványsort magát nem is tudjuk zárt alakban felírni, esetleg a deriváltjai, illetve primitív függvényei közül az egyik könnyen összegezzhető.

Lehetséges, hogy a sor — esetleg pl. a tagok részléttörtekre bontásával — olyan sorok összegére bontható, amelyeket már összegezni tudunk.

Lehetséges, hogy az együtthatók között bizonyos rekurziós formula áll fenn. Ennek alapján általában található egy olyan polinom, amellyel a hatványsort megszorozva, eredményül egy polinomot kapunk. Így pl. ha az együtthatók között egy

$$\alpha_0 a_n + \alpha_1 a_{n+1} + \dots + \alpha_k a_{n+k} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

típusú rekurziós formula áll fenn, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsort az

$$\alpha_0 x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} x + \alpha_k$$

polinommal szorozva, eredményül az

$$\alpha_k a_0 + x(\alpha_k a_1 + \alpha_{k+1} a_0) + \dots + x^{k-1}(\alpha_1 a_0 + \alpha_2 a_1 + \dots + \alpha_k a_{k-1})$$

polinomot kapjuk, minthogy a szorzatban az x^{k+n} tag együtthatója:

$$\alpha_0 a_n + \alpha_1 a_{n+1} + \dots + \alpha_k a_{n+k} = 0, \quad \text{ha } n > 0.$$

Végül igen gyakran a hatványsorból és néhány deriváltjából egy olyan lineáris kifejezést tudunk összeállítani, amelynek hatványsora egy polinomra redukálódik. Ekkor a hatványsor összegfüggvénye szükségképp a differenciálegyenlet megoldása.

γ) A Bernoulli-számok, illetve polinomok felhasználása

A 3. § b) γ) 14. feladatban a $2k$ -adrendű Bernoulli-függvényt a következő végtelen sor (Fourier-sor) alakjában állítottuk elő:

$$B_{2k}(x) \equiv \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos 2n\pi x}{n^{2k}} \quad (-\infty < x < \infty).$$

Ismeretes (l. pl. az A. VIII. kötetet), hogy

$$B_{2k}(x)|_{x=0} = B_{2k}(0) = \frac{B_{2k}}{(2k)!},$$

ahol B_{2k} a $2k$ -adik Bernoulli-szám. Így tehát az előző Fourier-sorban elvégezve az $x = 0$ helyettesítést, a következő relációt kapjuk:

$$\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{B_{2k}}{(2k)!} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Ezeknek az egyenlőségeknek a segítségével nagyon sok sor összegét tudjuk zárt alakban előállítani.

Megjegyezzük, hogy ez a módszer is általánosítható; a Fourier-sorokat is fel tudjuk használni sorösszegek kiszámítására körülbelül ugyanazon gondolatmenet alapján, mint a

6. § a) β) részben a Taylor-sorokat. Így pl. a konvergens $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor mellett tekinthetjük a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$$

trigonometrikus sort; ha ennek összegfüggvényét sikerül zárt alakban előállítani (ha a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, akkor a 2. § a) γ) 7. feladata szerint annyi legalább biztos, hogy a felírt trigonometrikus sor konvergál mindenütt; egyébként csak az $x = 0$ helyen konvergál biztosan a sor), akkor az $x = 0$ helyettesítés a keresett sor összegét adja. Ugyanígy tekinthetjük a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \sin (2n+1)x$$

sort is, az $x = \frac{\pi}{2}$ helyettesítés mellett. Ezen eljárásnál azonban az összegfüggvény előállítására általánosságban csak azt a tanácsot tudjuk adni, amellyel a 4. § a) β) pont végén foglalkoztunk. Kíséreljünk meg a sor és a differenciálhányadosai segítségével (feltételezzük, hogy a szóba jövő, a tagok differenciálhányadosaiból álló trigonometrikus sorok az $x = 0$

hely, illetőleg az $x = \frac{\pi}{2}$ hely egy kis környezetében egyenletesen konvergálnak, amikor

is a tagonkénti differenciálás megengedett) egy olyan lineáris kifejezést előállítani, amely véges összeggé redukálódik. Ekkor a keresett függvény a lineáris kifejezéseknek megfelelő lineáris differenciálegyenlet megoldása (az egyenletes konvergenciatartományban). Itt a 4. § a) γ) 10. stb. feladatokra, illetőleg a részleteket illetően a sorozat B. VII. kötetére utalunk.

δ) Sorösszegek számítása az eddig megismert sorösszegek felhasználásával

Sok esetben kombinálni tudjuk az eddig bemutatott módszereket. Meg kell jegyeznünk ezzel kapcsolatban, hogy a Bernoulli-számok mellett az Euler-számokat és általában a Taylor-sorfejtés eredményeit gyakran használjuk. (L. az A. VIII. kötetet.)

ε) Sorösszegek közelítő számítása

A bevezetésben említettük, hogy ha a sorösszeget a sor valamely szeletének értékével vagyunk kénytelenek közelíteni, óriási jelentőségű a konvergencia sebességének kérdése.

Itt néhány olyan eljárást mutatunk be, amelyek segítségével valamely lassan konvergáló sorhoz olyan sorokat tudunk rendelni, amelyeknek sorösszege azonos az eredetivel, de amelyek sokkal gyorsabban konvergálnak.

A legegyszerűbb ilyen eljárás a következő: A konvergens $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor közelítő értékét keresve, gyakran meg tudunk adni egy olyan ismert összegű

$$b = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

sor, amelynek tagjai igen jó közelítésben azonos nagyságrendűek a $\sum a_n$ sor azonos indexű tagjaival. Minthogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n + b = b + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n),$$

a $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)$ sor általában igen gyorsan konvergál, mert tagjai nagyon gyorsan tartanak 0-hoz.

A 2. §-ban bemutatott nagy átrendezési tételt, illetve *Markov-féle* sortranszformációt is gyakran alkalmazhatjuk oly módon, hogy a végtelen sor egyes tagjait mint véges vagy végtelen sorokat állítjuk elő, és a sorokról oszlopokra rendezünk át. Míg az elméleti vizsgálatoknál az eljárás helyességét inkább a nagy átrendezési tétellel kapcsolatos elégséges feltételek teljesülésének kimutatásával végeztük, numerikus feladatoknál mindig könnyebb a *Markov-féle* transzformációval kapcsolatos szükséges és elégséges feltételek teljesülésének igazolása.

A többi eljárás az 1. § c) γ) részben, illetve a 2. § b) β) 12. stb. feladataiban megismert tételeken alapul. Ezek segítségével ti. más alakú, de azonos összegű sorokat tudunk származtatni. A tételeket a feladatok között — részben a sorokra átfogalmazott megfelelő alakban — bemutatjuk. Itt csak arra hívjuk fel a figyelmet, amit már az 1. § feladataival kapcsolatban is megjegyeztünk. Ezeket az itt említett ún. sortranszformációkat általában csak akkor szabad használnunk, ha meggyőződünk róla, hogy az eredeti sor konvergens. Könnyen megtörténhet ugyanis — ha erre nem ügyelünk —, hogy nem konvergens sorra alkalmazva a kérdéses transzformációt, konvergens sorra jutunk, s így egy nemlétező összeget „közelítünk” a transzformált sor közelítő összegével.

Példák és feladatok

- α | 1. α egy 0-tól és a negatív egész számoktól különböző valós szám. Határozzuk meg a következő sor összegét:

$$\frac{1}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \dots + \frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)} + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}.$$

Megoldás: Bontsuk az $a_n = \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}$ törtet részlettörtökre:

$$\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \frac{1}{\alpha+n} - \frac{1}{\alpha+n+1}$$

Ezzel

$$s_k = \sum_{n=0}^k \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+1} \right) + \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\alpha+k} - \frac{1}{\alpha+k+1} \right) = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+k+1}.$$

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \frac{1}{\alpha} - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha+k+1} = \frac{1}{\alpha}.$$

Tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \frac{1}{\alpha}.$$

2. Határozzuk meg a következő sor összegét:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + \frac{1}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)} + \dots$$

Megoldás: Részlettörtekre bontás előtt kíséreljük meg a nevezőből az összeg alakú tényezőt eltávolítani; itt a következő, már az 1. § b) a) 11. feladatban is alkalmazott összefüggést használhatjuk fel:

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = (n+1) - n = 1.$$

Tehát $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}$ így is írható:

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n(n+1)}[(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2]} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Ezért

$$s_k = \sum_{n=1}^k a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}; \quad s = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 1.$$

3. Határozzuk meg az

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

sor összegét.

4. Határozzuk meg a

$$\frac{3}{1 \cdot 2} - \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 4} - \frac{9}{4 \cdot 5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

sor összegét.

5. Konvergens-e az

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{4}{5 \cdot 6} + \frac{8}{9 \cdot 10} + \frac{13}{14 \cdot 15} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \frac{n}{2}(5+n)}{\left[2 + \frac{n}{2}(5+n)\right] \left[3 + \frac{n}{2}(5+n)\right]}$$

sor? Ha igen, mi a határértéke?

6. Állapítsuk meg, hogy x milyen értékeinél konvergens az

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1 \cdot 2}{(x+1)(x+2)} + \dots + \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} + \dots$$

sor; mi ezen x értékeknél a sor összege?

7. Mivel egyenlő $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{2}{n^2}$. A számításnál használjuk fel — de igazoljuk —, hogy

$$\arctg \frac{2}{n^2} = \arctg \frac{1}{n-1} - \arctg \frac{1}{n+1}.$$

8. Igazoljuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+q+n)\dots(\alpha+kq+n)} &= \\ = \frac{1}{k \cdot q} \sum_{r=0}^{q-1} \frac{1}{(\alpha+r)(\alpha+q+r)\dots[\alpha+(k-1)q+r]} \end{aligned}$$

9. Határozzuk meg az

$$\frac{1}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{1}{5 \cdot 9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+3)(2n+7)} + \dots$$

sor összegét.

10. a) ($y > x > 0$)

Határozzuk meg az

$$\frac{1}{y} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(x+1)\dots(x+n)}{y(y+1)\dots(y+n+1)} = \frac{1}{y} + \frac{x}{y(y+1)} + \frac{x(x+1)}{y(y+1)(y+2)} + \dots$$

sor összegét.

b) Határozzuk meg az

$$1 + \frac{a}{b} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)} + \dots + \frac{a(a+1)\dots(a+n)}{b(b+1)\dots(b+n)} + \dots$$

sor összegét ($b > a + 1 > 1$).

11. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor tagjai ilyen alakban állíthatók elő:

$$a_n = c_1 x_{n+1} + c_2 x_{n+2} + \dots + c_k x_{n+k}$$

($k \geq 2$, de adott esetben rögzített), ahol az $\{x_n\}_k$ sorozat konvergens és határértéke: x , a $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_k$ összegre pedig a $\sum_{s=1}^k c_s = 0$ feltétel teljesül. Igazoljuk, hogy

ez esetben a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens, és

$$s = c_1 x_1 + (c_1 + c_2) x_2 + \dots + (c_1 + c_2 + \dots + c_{k-1}) x_{k-1} + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n [c_2 + 2c_3 + 3c_4 + \dots + (k-1)c_k].$$

Igazoljuk továbbá, hogy ha nem tételezzük fel az $\{x_k\}$ sorozat konvergenciáját, ellenben a $\left\{ \sum_{\lambda=1}^{k-1} (c_{\lambda+1} + c_{\lambda+2} + \dots + c_k) x_{n+\lambda+1} \right\}$ sorozatát igen, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ szükségképp konvergens, és fennáll az

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = c_1 x_1 + (c_1 + c_2) x_2 + (c_1 + c_2 + c_3) x_3 + \dots + (c_1 + c_2 + \dots + c_{k-1}) x_{k-1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda=1}^{k-1} (c_{\lambda+1} + c_{\lambda+2} + \dots + c_k) x_{n+\lambda+1}$$

reláció.

12. Igazoljuk, hogy $|x| < 1$ esetben fennáll az

$$\frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \dots + \frac{2^n x^{2^n}}{1+x^{2^n}} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2^n}}{1+x^{2^n}} \equiv \frac{x}{1-x}$$

azonosság.

13. Mutassuk meg, hogy fennáll az

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} \equiv \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & \text{ha } |x| < 1, \\ \frac{1}{1-x}, & \text{ha } |x| > 1 \end{cases}$$

azonosság.

14. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{1}{n^2 + n + 1} = \frac{\pi}{4}.$$

15. Igazoljuk, hogy fennáll az

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} \equiv \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x$$

azonosság x minden értékére, amelyre a jobb oldal, illetve bal oldal minden tagja értelmezve van.

16. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+1)(2x+1)\dots(nx+1)} \equiv \frac{1}{x},$$

hacsak $x \neq 0$, illetve $x \neq -\frac{1}{k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).

17. Konvergens-e a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - n + 1}{(\sqrt{3} + 1 + n)(\sqrt{3} + 3 + n)(\sqrt{3} + 5 + n)(\sqrt{3} + 7 + n)}$$

sor? Ha igen, mennyi az összege?

Megoldás: A sort a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens sor majorálja, tehát konvergens.

Mint a bevezetésben említettük, célszerű a tagok részlettörtekre bontásával megkísérelni a sor összegezését.

$$\begin{aligned} \frac{n^2 - n + 1}{(\sqrt{3} + 1 + n)(\sqrt{3} + 3 + n)(\sqrt{3} + 5 + n)(\sqrt{3} + 7 + n)} &= \frac{\frac{3\sqrt{3} + 6}{2 \cdot 4 \cdot 6}}{\sqrt{3} + 1 + n} - \\ &- \frac{\frac{16 + 7\sqrt{3}}{2 \cdot 2 \cdot 4}}{\sqrt{3} + 3 + n} + \frac{\frac{34 + 11\sqrt{3}}{2 \cdot 2 \cdot 4}}{\sqrt{3} + 5 + n} - \frac{\frac{60 + 15\sqrt{3}}{2 \cdot 4 \cdot 6}}{\sqrt{3} + 7 + n}. \end{aligned}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a részlettörtek — nevezőiket tekintve — csak az

$$\left\{ x_k = \frac{1}{\sqrt{3} + k + 1} \right\}$$

sorozat $k = n$ -edik, $k = n + 2$ -edik, $k = n + 4$ -edik, illetve $k = n + 6$ -odik tagjával egyenlők, míg a számlálók összege 0-val egyenlő.

Alkalmazhatjuk tehát a 6. § a) α) 11. feladatban igazolt tételt a következő választással:

$$c_1 = \frac{3\sqrt{3} + 6}{2 \cdot 4 \cdot 6}; \quad c_3 = 0$$

(az $\{x_k\}$ sorozat minden második tagja azonosítható csak egy-egy részlettört-taggal, ezért minden második c -t 0-nak veszünk; ez mit sem változtat azon, hogy $\sum c_i = 0$.)

$$c_3 = -\frac{16 + 7\sqrt{3}}{2 \cdot 2 \cdot 4}; \quad c_4 = 0; \quad c_5 = \frac{34 + 11\sqrt{3}}{2 \cdot 2 \cdot 4}; \quad c_6 = 0; \quad c_7 = -\frac{60 + 15\sqrt{3}}{2 \cdot 4 \cdot 6}.$$

Emellett $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$. Így a 11. feladat szerint a sor összege:

$$\begin{aligned} s &= \frac{3\sqrt{3} + 6}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left[\frac{1}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 3)(\sqrt{3} + 5)(\sqrt{3} + 7)} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} + 4)(\sqrt{3} + 6)(\sqrt{3} + 8)} \right] + \left(\frac{3\sqrt{3} + 6}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{16 + 7\sqrt{3}}{2 \cdot 2 \cdot 4} \right) \cdot \\ &\cdot \left[\frac{1}{(\sqrt{3} + 3)(\sqrt{3} + 5)(\sqrt{3} + 7)(\sqrt{3} + 9)} + \frac{1}{(\sqrt{3} + 4)(\sqrt{3} + 6)(\sqrt{3} + 8)(\sqrt{3} + 10)} \right] + \\ &+ \left(\frac{3\sqrt{3} + 6}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{16 + 7\sqrt{3}}{2 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{34 + 11\sqrt{3}}{2 \cdot 2 \cdot 4} \right) \cdot \\ &\cdot \left[\frac{1}{(\sqrt{3} + 5)(\sqrt{3} + 7)(\sqrt{3} + 9)(\sqrt{3} + 11)} + \frac{1}{(\sqrt{3} + 6)(\sqrt{3} + 8)(\sqrt{3} + 10)(\sqrt{3} + 12)} \right]. \end{aligned}$$

18. Tekintsük a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{(\alpha + t_1 + n)(\alpha + t_2 + n)(\alpha + t_3 + n) \dots (\alpha + t_k + n)}$$

sort, amelyben $P(x)$ egy legfeljebb $(k-2)$ -edfokú polinomot jelöl; α egy 0-tól és a negatív egész számoktól különböző tetszőleges valós számot, t_1, t_2, \dots, t_k pedig k darab egymástól különböző természetes számot jelent.

Jelöljük továbbá a

$$\frac{P(n)}{(\alpha + t_1 + n)(\alpha + t_2 + n) \dots (\alpha + t_k + n)}$$

tört részlettörtekre bontásakor fellépő k darab tört számlálóját rendre $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ -val, azaz legyen

$$\frac{P(n)}{(\alpha + t_1 + n)(\alpha + t_2 + n) \dots (\alpha + t_k + n)} = - \sum_{s=1}^k \frac{c_s}{\alpha + t_s + n}.$$

Igazoljuk, hogy a megadott sor konvergens és

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{(\alpha + t_1 + n)(\alpha + t_2 + n) \dots (\alpha + t_k + n)} = \\ & = - \sum_{s=1}^k c_s \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\alpha + 2} + \dots + \frac{1}{\alpha + t_s - 1} \right]. \end{aligned}$$

19. Igazoljuk, hogy az

$$\frac{1^3}{1^4 + 4} - \frac{3^3}{3^4 + 4} + \frac{5^3}{5^4 + 4} - + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)^3}{4 + (2n+1)^4}$$

sor konvergens és összege 0-val egyenlő.

β

1. Határozzuk meg az

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

sor összegét.

Megoldás: A sor a Leibniz-szabály értelmében konvergens. Összegének számításához az

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

sort célszerű összegeznünk. Differenciálással ugyanis az

$$1 - x^2 + x^4 - + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

sorra jutunk, amelynek összege

$$s(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (|x| < 1)$$

és amely az $|x| \leq 1 - \varepsilon$ közön egyenletesen konvergál ($\varepsilon > 0$, tetszőleges). Így

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \dots \equiv \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc tg } x + C \quad (\text{ha } |x| < 1).$$

Az $x = 0$ helyettesítéssel $C = 0$ adódik. Így:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \dots = \lim_{x \rightarrow 1-0} \text{Arc tg } x = \frac{\pi}{4},$$

minthogy az *Abel*-tétel értelmében az $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \dots$ sor összegfüggvénye az $x = 1$ helyen balról folytonos, ha az $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots$ sor konvergens (l. a 3. § b) 11. feladatát).

2. Határozzuk meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n} \quad \text{és a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

sorok összegét.

Megoldás: A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

sorból egyszerűen (ti. integrálással, illetve x kiemelésével, majd az így kapott sor integrálásával) származtatni tudjuk a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \text{illetve a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n}$$

sor. Minthogy mindkét sor konvergens az $x = 1$ helyen, azért az *Abel*-tétel értelmében az utóbbi két sor összegfüggvényében az $x = 1$ helyettesítést elvégezve, megkapjuk a keresett összegeket. Elsősorban tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$ sor összegét kell zárt alakban felírunk. De

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots 2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \dots \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{1}{n!} = (-1)^n \left(-\frac{1}{2} \right)_n$$

és így

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(-\frac{1}{2} \right)_n x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)_n (-x^2)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)_n (-x^2)^n - 1 = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1, \end{aligned}$$

hacsak $|x| < 1$. De akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \right] dx = \text{Arc sin } x - x + C,$$

hacsak $|x| \leq 1$, minthogy a hatványsorok konvergenciaközükben tagonként integrálhatóak, az *Abel*-tétel szerint pedig az összegfüggvény a -1 helyen jobbról, az 1 helyen balról folytonos, ha a sor e helyeken konvergens. Emellett

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n-1} = \frac{1}{x} \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \right] \quad (|x| < 1),$$

és így

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n}}{2n} &= \int \frac{1}{x} \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \right] dx = \ln \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} - \ln x + C_2 = \\ &= \ln \frac{c_3}{1+\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{hacsak } |x| \leq 1, \end{aligned}$$

ahol az egyenlőség az $x = \pm 1$ helyeken az *Abel*-tétel következménye. A C_1 és C_3 állandót az $x = 0$ helyettesítés alapján határozhatjuk meg:

$$0 = 0 + C_1 \quad \text{azaz} \quad C_1 = 0; \quad 0 = \ln \frac{c_3}{2}; \quad 1 = \frac{c_3}{2}; \quad c_3 = 2.$$

Ezek alapján

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} &= \text{Arc sin } x - x \Big|_{x=1} = \frac{\pi}{2} - 1; \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n} &= \ln \frac{2}{1+\sqrt{x^2-1}} \Big|_{x=1} = \ln 2. \end{aligned}$$

3. Határozzuk meg a

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

sor összegét.

4. a) Határozzuk meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$$

sor összegét.

4. b) Határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n}$$

sor összegét.

Megoldás: A megadott sor az

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^n$$

hatványsor $x = \frac{1}{2}$ helyen vett helyettesítési értéke. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a sor

* Megjegyezzük, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, és az utóbbi két sor

$x = \frac{1}{2}$ helyen vett helyettesítési értéke is könnyen számítható.

konvergenciasugara $r = 1$; az $x = \frac{1}{2}$ helyen a sor tehát bizonyosan konvergens. A sor ilyen alakban írva:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

könnyen látható, hogy a következő összefüggés áll fenn az egyes együtthatók között:

$$a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = (2n+3) - 2(2n+1) + (2n-1) \equiv 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Ez a tény vezet bennünket arra a gondolatra, hogy az ismeretlen összegű sornak és az

$$1 \cdot x^2 - 2x + 1$$

függvénynek a szorzatát kíséreljük meg zárt alakban előállítani. A szorzatban ugyanis x^{n+1} együtthatója:

$$1 \cdot a_{n+1} \cdot 2a_n + a_{n-1} \equiv 0.$$

(ti. x^2 -et $a_{n-1} x^{n+1}$ -gyel, $-2x$ -et $a_n x^n$ -el, 1 -et pedig $a_{n+1} x^{n+1}$ -gyel kell szoroznunk). Ezek alapján a szorzat

$$y(x) \cdot [1 - 2x + x^2] = a_0 + (a_1 - 2a_0)x;$$

x magasabb hatványainak együtthatója ugyanis 0 . Így tehát

$$y(x) \cdot (1 - 2x + x^2) = 1 + (3 - 2 \cdot 1)x = 1 + x$$

$$y(x) = \frac{1+x}{(1-2x+x^2)} = \frac{1+x}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1),$$

a keresett összeg tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{\frac{1}{4}} = 6.*$$

5. Határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n} \quad \text{és a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{3^n}$$

sorok összegét.

6. Határozzuk meg az

$$1 + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4^2} + 4 \cdot \frac{1}{4^3} + 7 \cdot \frac{1}{4^4} + 13 \cdot \frac{1}{4^5} + 24 \cdot \frac{1}{4^6} + 44 \cdot \frac{1}{4^7} + 81 \cdot \frac{1}{4^8} + \dots$$

sor összegét, ahol az $\frac{1}{4}$ hatványainak együtthatói között az az összefüggés, hogy bármelyik az öt megelőző 3 együttható összege.

* Javasoljuk az olvasónak, hogy az eredményt ellenőrizze a következő módon is: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n} =$

$= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} \right\}_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}}$. Ennek a sornak az összegét tagonkénti integrálással, majd differenciálással kapjuk.

7. Határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{4^n}$$

sor összegét.

8. Határozzuk meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{1}{2n} \quad \text{és a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

sorok összegét.

9. Határozzuk meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} + \dots$$

sor összegét.

Megoldás: Látható, hogy a sor az

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n}$$

hatványsor által definiált analitikus függvény értékével egyenlő az $x = \frac{1}{2}$ helyen, amennyiben a hatványsor konvergens e helyen. Minthogy pedig a hatványsor a $-1 \leq x < 1$ közön konvergens, azért $y(x)$ explicit előállítás után közvetlenül megkapjuk a sor értékét. Az is látható, hogy differenciálással közvetlenül összegezhető sorra jutnánk, ha x hatványkitevője eggyel alacsonyabb lenne. Minthogy a sor így is felírható:

$$y(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

azért az $\frac{y(x)}{x}$ függvény is nyilván analitikus a $-1 \leq x < 1$ intervallumon. Differenciálással azt kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{y(x)}{x} \right] = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

ha $|x| < 1$.

Ebből a differenciálegyenletből $y(x)$ integrálással közvetlenül számítható:

$$\frac{y(x)}{x} = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C.$$

$$y(x) = -x \ln(1-x) + Cx. \quad (-1 \leq x < 1)$$

C értékét a jobb oldal sorbafejtésével és az eredeti sorral történő összehasonlítás alapján számíthatjuk:

$$\begin{aligned} -x \ln(1-x) + Cx &= -x \left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \right] + Cx = \\ &= Cx + \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{2} + \dots + \frac{x^{n+1}}{n} + \dots, \end{aligned}$$

amiből $C = 0$.

Így tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}.$$

10. Határozzuk meg az

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \frac{8}{3^5} + \frac{13}{3^6} + \frac{21}{3^7} + \dots$$

sor összegét, ahol az $\frac{1}{3}$ hatványainak együtthatói a megelőző két tag együtthatóinak összegével egyenlők.

11. Határozzuk meg az

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} + \dots$$

sor összegét.

Megoldás: A kérdéses sor az

$$f(x) = \frac{1}{2!} + \frac{2x}{3!} + \frac{3x^2}{4!} + \dots + \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!} + \dots$$

hatványsor $x=1$ helyen vett helyettesítési értéke (könnyen belátható ugyanis, hogy $f(x)$ minden x -értéknél értelmezve van). Az is látható, hogy $f(x)$ -et integrálva, a számlálóban lévő tényezőktől „megszabadulunk”; a tagonkénti integrálás pedig nyilván az egész x tengelyen előállítja $f(x)$ egyik primitív függvényét.

$$F(x) = \int f(x) dx = C + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \dots + \frac{x^n}{(n+1)!} + \dots$$

Ez már nagyon hasonlít az e^x függvény Mac Laurin-sorára.

$$\begin{aligned} xF(x) &= x \int f(x) dx = Cx + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots = \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots - 1 - (1-C)x = e^x - 1 - (1-C)x. \end{aligned}$$

Azaz:

$$F(x) = \frac{e^x - 1}{x} - (1-C);$$

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1) + 1}{x^2}.$$

Így tehát

$$f(1) = 1 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} + \dots$$

12. Adjuk meg zárt alakban a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{3k+2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{5} + \frac{x^2}{8} + \dots + \frac{x^k}{3k+2} + \dots$$

hatványsor által definiált függvényt, ennek értelmezési tartományát, továbbá analitikus folytatását, ha ilyen van.

Útbaigazítás: Jelöljük a hatványsor által előállított (definiált) függvényt (amelynek közvetlen értelmezési tartománya, amint ezt azonnal leolvashatjuk, a $-1 \leq x < 1$ intervallum) $f(x)$ -szel. $f(x)$ zárt alakban való előállítását úgy kíséreljük meg, hogy — közvetlenül kínálkozó módon — először olyan függvényt származtatunk $f(x)$ -ből, amelynek hatványsora

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^8}{8} + \dots$$

alakú; ebből tagonkénti differenciálással geometriai sort kapunk. Első lépésben meg kell háromszoroznunk a kitevőket. Ezt úgy érjük el, hogy az $f(z^3)$ függvény hatványsorát tekintjük:

$$f(z^3) = \frac{1}{2} + \frac{z^3}{5} + \frac{z^6}{8} + \dots + \frac{z^{3k}}{3k+2} + \dots \quad (-1 \leq z < 1)$$

A további részleteket az olvasóra bízva, a következő végeredményt kapjuk:

$$f(x) = \frac{1}{x^{2/3}} \ln \sqrt[6]{\frac{1+x^{1/3}+x^{2/3}}{1-2x^{1/3}+x^{2/3}}} - \frac{\sqrt[3]{3}}{x^{2/3}} \arctg \frac{3x^{2/3}}{2+x^{1/3}}.$$

A felírt függvény az eredeti hatványsor által definiált függvény analitikus folytatásának tekinthető x minden olyan értékére, ahol a függvénynek értelme van, vagyis ahol

$$\frac{1+x^{1/3}+x^{2/3}}{1-2x^{1/3}+x^{2/3}} > 0, \text{ ahol tehát } 1+x^{1/3}+x^{2/3} \geq 0 \text{ és ugyanakkor}$$

$$1-2x^{1/3}+x^{2/3} = \left(1-x^{1/3}\right)^2 \geq 0.$$

Az első egyenlőtlenségben, majd a másodikban a $\xi = x^{1/3}$ jelölést bevezetve, és az

$$1+\xi+\xi^2=0, \text{ majd az } 1-2\xi+\xi^2=(1-\xi)^2=0$$

egyenletet megoldva, azt találjuk, hogy $1+x^{1/3}+x^{2/3}$

mindenütt pozitív, (mert $1+\xi+\xi^2$ -nek nincs valós gyöke), a nevezőben szereplő

$$1-2x^{1/3}+x^{2/3}$$

kifejezés pedig mindenütt nem-negatív, az $x=1$ helyen 0 helyvel. Az $x=1$ hely kivételével tehát a felírt $f(x)$ analitikus mindenütt. A $-\infty < x < 1$ szakaszra közvetlen módon végezhető analitikus folytatás, az $1 < x < \infty$ szakaszra viszont csak úgy, ha a $-1 \leq x < 1$ szakaszon zárt alakban is felírt hatványsor-kifejezést úgy alakítjuk át, hogy az $\frac{1}{x}$ hatványai szerint sorbafejthető legyen.

13. Adjuk meg zárt alakban a következő hatványsorok által definiált analitikus függvényeket:

$$\frac{x^3}{1 \cdot 3} - \frac{x^5}{3 \cdot 5} + \frac{x^7}{5 \cdot 7} - + \dots$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

$$x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + + - - \dots$$

Mely intervallumokon folytathatóak analitikusan e függvények?

14. Írjuk fel az alábbi sorok összegét:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} + \dots$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} + - \dots$$

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + - \dots$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - - + + \dots$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{6} + \dots$$

$$1 - \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{11 \cdot 3^5} + \frac{1}{13 \cdot 3^6} - - + + \dots$$

7 1. Számítsuk ki a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$$

sor összegét (k egész szám).

Megoldás: A feladatban a $B_{2k}(x)$ Bernoulli-polinomra a következő összefüggést találtuk:

$$B(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos 2n\pi x}{n^{2k}}.$$

Az $x = 0$ helyettesítéssel, figyelembevéve, hogy $B_{2k}(0) = \frac{B_{2k}}{(2k)!}$, kapjuk:

$$\frac{B_{2k}}{(2k)!} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{2k}}.$$

Ebből

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{B_{2k} \cdot (2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!} = \frac{(B_{2k}) \cdot (2\pi)^{2k}}{2(2k)!}.$$

2. Számítsuk ki az

$$\frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \frac{1}{6^{2k}} + \frac{1}{8^{2k}} + \dots + \frac{1}{(2n)^{2k}} + \dots$$

sor összegét.

3. Igazoljuk, hogy

$$+ \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^{2k}} + \dots = \frac{2^{2k} - 1}{2(2k)!} B_{2k} \cdot \pi^{2k}$$

4. Számítsuk ki a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{2k}}$$

sor összegét az előző sorok segítségével.

5. Írjuk fel a nagy átrendezési tétel segítségével az

$$y(x) = 1 + 2x^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - (\nu\pi)^2}$$

Mac Laurin-sorát és igazoljuk, hogy megegyezik az x ctg x függvénynek az A. VIII. kötetben talált sorával, azaz

$$1 + 2x^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - (\nu\pi)^2} \equiv x \operatorname{ctg} x$$

(ha $|x| < \pi$). Igazoljuk, hogy az azonosság x minden értékére fennáll.

6. Igazoljuk, hogy — egyforma széles résekből és elnyelőkből álló optikai rács esetén — a spektrumkép energiája, az elnyelt energia és a beeső fénnel érkező energia egyensúlyban vannak.

Megoldás: Az elnyelt energia nyilvánvalóan 50%-a a rácsra érkező energiának. A hullámoptika szerint a direkt képre eső fény amplitúdója (direkt az a kép, amelyet a geometriai optika szerint kapunk) fele a rácsra érkező fény amplitúdójának; az elsőrendű elhajlási képé $\frac{1}{\pi}$ -szerese. Párosrendű elhajlási képek nem jönnek létre. A $(2n+1)$ -edrendű

elhajlási kép amplitúdója $\frac{1}{(2n+1)\pi}$ -szerese a beeső fény amplitúdójának.*

A beeső energiát ki tudjuk fejezni a beeső fény amplitúdójával, A -val: $E_{be} = A^2$. Az elnyelt energia: $\frac{A^2}{2}$. A direkt kép energiája: $\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4}$. Az elhajlási képeké:

$$E_{el} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^2}{(2n+1)^2 \pi^2} = \frac{2A^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}. **$$

* L. pl.: Joos: Lehrbuch der Theoretischen Physik c. könyvében. Drittes Buch, zehntes Kapitel.

** A 2-es faktor azt jelenti, hogy két darab elsőrendű, két harmadrendű stb. elhajlási kép jön létre a direkt kép két oldalán.

Az utóbbi sor számításánál abból indulhatunk ki, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

ez a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{|B_{2k}| (2\pi)^{2k}}{2(2k)!}$ formulából azonnal adódik $k=1$ helyettesítésnél.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24}.$$

Ennek következtében

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{3}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ezzel az elhajlási képek összes energiája:

$$E_{el} = \sum E_n = \frac{2A^2}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{A^2}{4}.$$

Az energiamegmaradás törvénye tehát itt is érvényes. A beeső energiának pontosan fele elnyelődik, egy negyede a direkt sugár energiáját, egy negyede az elhajlási képek energiáját szolgáltatja.

7. A szinkron motorok mágneses légrésszórásának számításánál szükségünk van a következő sor összegére:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t_n^2}$$

ahol t_n jelenti az n -edik olyan természetes számot, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal.

Számítsuk ki a sor összegét.

8. Igazoljuk, hogy az

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-2y} + \frac{1}{x+2y} + \dots + \frac{1}{x-ky} + \frac{1}{x+ky} + \\ + \dots \equiv \frac{\pi}{y} \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{y} \end{aligned}$$

azonosság érvényes x és y tetszőleges értékénél.

9. Számítsuk ki a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} \quad \text{és a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^3}$$

sor összegét.

10. Állítsuk elő zárt alakban a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 - \alpha^2}$$

sor által definiált függvényt, és adjuk meg az értelmezési tartományát.

9*

Megoldás:* A sor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 - \alpha^2} \sin nx$$

alakú trigonometrikus sor helyettesítési értéke az $x = \frac{\pi}{2}$ helyen. Könnyen kimutathatjuk, hogy a felírt trigonometrikus sor egyenletesen konvergál minden olyan zárt intervallumon, amely nem tartalmazza a $0, \pm 2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi; \dots$ helyek egyikét sem. Ha tehát α nem természetes szám, (illetve annak -1 -szerese), folytonos függvényt állít elő ezen intervallumokon, illetve ilyen függvény Fourier-sora. Mindenesetre páratlan függvényé. A keresett függvényt $\sin kx$ -szel megszorozva és a $(0, \pi)$ szakaszon integrálva (így kapjuk ti. a k -adik Fourier-együtthatót; l. az 5. § b) β) részt) a fentiek szerint

$$C \cdot \frac{k}{k^2 - \alpha^2} = \frac{C}{2} \left\{ \frac{1}{k + \alpha} + \frac{1}{-\alpha} \right\}$$

-t kell kapnunk, ahol C bármilyen k -tól független állandó lehet. Ilyen függvényt azonban könnyen találhatunk. Hiszen

$$\int_0^{\pi} \sin(k + \alpha)x \, dx = \frac{\cos(k + \alpha)x}{k + \alpha} \Big|_0^{\pi} = \frac{\cos k\pi \cdot \cos \alpha\pi - 1}{k + \alpha} = \frac{(-1)^k \cos \alpha\pi - 1}{k + \alpha}$$

Tehát a keresett függvénynek olyannak kell lennie, amely $\sin kx$ -szel szorozva, eredményül

$$C_1 [\sin(k + \alpha)x + \sin(k - \alpha)x]$$

t ad. De

$$[\sin(k + \alpha)x + \sin(k - \alpha)x] = 2 \cos \alpha x \sin kx.$$

A keresett függvény tehát a $\cos \alpha x$, pontosabban — mivel páratlan függvényt kell keresnünk — az

$$f(x) = \begin{cases} -C \cos \alpha x, & \text{ha } -\pi < x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0; \pm \pi; \pm 2\pi; \dots \\ C \cos \alpha x, & \text{ha } 0 < x < \pi \\ f(x + 2k\pi), & k = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots \end{cases}$$

E függvény Fourier-sora (ha α nem természetes szám):

$$f(x) \equiv \frac{1 + \cos \alpha\pi}{\pi} \left\{ \frac{2}{1 - \alpha^2} \sin x + \frac{6}{3^2 - \alpha^2} \sin 3x + \frac{10}{5^2 - \alpha^2} \sin 5x + \dots \right\} + \\ + \frac{1 - \cos \alpha\pi}{\pi} \left\{ \frac{4}{2^2 - \alpha^2} \sin 2x + \frac{8}{4^2 - \alpha^2} \sin 4x + \dots \right\}.$$

* Szisztematikusan — de az itt bemutatottnál komplikáltabb úton — így kellene eljárunk: Az adott Fourier-sorból és annak formálisan képzett differenciálhányadosaiból, illetve primitív függvényeiből megkísérelünk olyan kifejezést összeállítani, amelynek együttható-sémája egyszerűbb, és így több a remény zárt alakban történő előállítására. Így pl. f -fel jelölve a keresett függvényt, a formálisan képezett

$$f'' + \alpha^2 f$$

kifejezés Fourier-sora: $f'' + \alpha^2 f \sim \sum_{n=1}^{\infty} n \sin nx \sim g$. g második primitív függvénye már előállítható. Ebből kétszeri differenciálással származtatva g -t, és a differenciálegyenletet megoldva, szintén megkapjuk a keresett függvényt. Konvergenciavizsgálatok helyett inkább sorbafejtéssel ellenőrizzük az eredményt.

Ebből már könnyen kapjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 - \alpha^2} \equiv \frac{\pi \cos \alpha \frac{\pi}{2}}{2(1 + \cos \alpha \pi)} = \frac{\pi \cos \alpha \frac{\pi}{2}}{2 \cdot 2 \cos^2 \alpha \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \frac{1}{\cos \frac{\alpha \pi}{2}}.$$

Igy tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 - x^2} \equiv \frac{\pi}{4} \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{2}}.$$

11. Az előző feladat eredményét és a nagy átrendezési tételt felhasználva igazoljuk, hogy

$$E_{2k} = \frac{(-1)^k}{\pi^{2k+1}} \cdot 2^{2k+2} \cdot (2k)! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}.$$

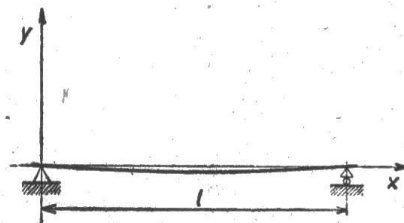
12. Határozzuk meg az alábbi sorok összegét :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)^2} \\ & \frac{1^3}{1^4+4} - \frac{3^3}{3^4+4} + \frac{5^3}{5^4+4} - + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)^3}{(2n+1)^4+4} \\ & \frac{1}{1(1^4+4)} - \frac{1}{3(3^4+4)} + \frac{1}{5(5^4+4)} - + \dots \\ & \frac{1}{1(4 \cdot 1^4+1)} - \frac{1}{2(4 \cdot 2^4+1)} + \frac{1}{3(4 \cdot 3^4+1)} - + \dots \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)} \end{aligned}$$

13. Egy l hosszúságú, kéttámaszú tartót az alátámasztástól c távolságra P koncentrált erő terhel. Számítsuk ki a munkatétel alapján* a rúd rugalmas szálának egyenletét, illetve a lehajlást a rúd közepén, ha a koncentrált erő ugyanott támad.

Megoldás: A koordinátarendszert így vesszük fel: A rugalmas szál egyenletét $y = f(x)$ -szel jelölve, a függvény $[0, l]$ intervallumbeli szakaszát egy $2l$ periódusú páratlan függvénné folytatva, a függvény Fourier-sora:

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \frac{\pi}{l} x.$$



8. ábra

* Az itt közölt feladat egyszerűbb módon is megoldható. A munkatételt inkább olyan feladatok esetében szokták alkalmazni, amelyeknél egyszerűbb eszközökkel nem érünk célt. Ilyen feladatoknál viszont a kapott sort nem lehet zárt alakban összegezni; ezért választottunk olyan feladatot, amelynél (ha a munkatételt alkalmazva komplikáltabb is a megoldás, mint más módszerek esetében) be tudjuk mutatni a megoldás általános módját.

A lehajlott rúd rugalmas energiája :

$$V = \frac{E \cdot I}{2} \int_0^l f''^2(x) dx = \frac{EI \cdot \pi^4}{4 l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 b_n^2.$$

(formálisan). A rugalmas energia megváltozása, ha a rúd alakja elemien kicsit változik :

$$\Delta V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial V}{\partial b_n} \Delta b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{EI \pi^4}{2 l^3} n^4 b_n \cdot \Delta b_n;$$

ugyanekkor

$$\Delta V = P \cdot \Delta S = P \sum_{n=1}^{\infty} \Delta b_n \cdot \sin n \frac{\pi}{l} c,$$

ahol Δs a P erő „alatti” elmozdulását jelenti a kérdéses keresztmetszetnek. Ezek alapján :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{EI \pi^4}{2 l^3} n^4 \cdot b_n \Delta b_n = \sum_{n=1}^{\infty} P \cdot \sin n \frac{\pi}{l} c \cdot \Delta b_n.$$

Mint hogy ez az egyenlőség $\Delta b_1; \Delta b_2; \dots$ bármely értékeire fenn kell, hogy álljon, azért

$$\frac{EI \pi^4}{2 l^3} n^4 b_n = P \sin n \frac{\pi}{l} c \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2 P l^3}{EI \pi^4} \cdot \frac{1}{n^4} \cdot \sin n \frac{\pi}{l} c.$$

Ennek alapján könnyen ellenőrizhetjük, hogy eddigi számításaink nem voltak formálisak. A rúd rugalmas szálának alakja pedig

$$f^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 P l^3}{EI \pi^4} \cdot \frac{1}{n^4} \cdot \sin n \frac{\pi}{l} c \cdot \sin n \frac{\pi}{l} x = \frac{P l^3}{EI \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \frac{\pi}{l} (x - c) - \cos n \frac{\pi}{l} (x + c)}{n^4}, & \text{ha } 0 < x < 2l, \\ f^*(x + k 2l); & k = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots \end{cases}$$

A sor összegének előállítására céljából először az N -edik szelet negyedik deriváltját adjuk meg zárt alakban :

$$s_N^{(4)} = \frac{P}{EI l} \left\{ \frac{\sin n \frac{\pi}{l} \frac{x - c}{2} \cdot \cos (n + 1) \frac{\pi}{l} \frac{x - c}{2}}{\sin \frac{\pi}{l} \frac{x - c}{2}} - \frac{\sin n \frac{\pi}{l} \frac{x + c}{2} \cdot \cos (n + 1) \frac{\pi}{l} \frac{x + c}{2}}{\sin \frac{\pi}{l} \frac{x + c}{2}} \right\}.$$

Ennek alapján

$$f_{(x)}^{*(3)}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int S_N^{(4)} dx = \frac{P}{EI l} \{f_1(x) + f_2(x)\} + A,$$

ahol

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = c \\ \frac{\pi - \left(x - \frac{\pi c}{l}\right) \frac{l}{\pi}}{2}, & \text{ha } c < x < c + 2l; \\ f_1(x + k 2l); & k = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = -c \\ \frac{\pi + \left(x + \frac{\pi c}{l}\right) \frac{l}{\pi}}{2}, & \text{ha } -c < x < -c + 2l, \\ f_2(x + k 2l); & k = \pm 1; \pm 2; \dots \end{cases}$$

A még hátralevő számítást, azaz a háromszor egymásután történő integrálást és az integrációs konstansok megállapítását (ami pl. annak figyelembevételével történhet, hogy a függvény páratlan és legalább kétszer folytonosan differenciálható, hiszen a *Fourier*-sor együtthatói $\frac{1}{n^4}$ nagyságrendűek) az olvasóra bizzuk. Ami a feladat második részét illeti, a speciális $C = \frac{l}{2}$, $x = \frac{l}{2}$ esetben a lejjebb f^* -ra kapott végképletből, akár pedig az

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Pl^3}{EI \pi^4 n^4} \sin n \frac{\pi}{l} c \sin n \frac{\pi}{l} x$$

képlet alapján számíthatjuk helyettesítéssel. Az utóbbi esetben :

$$\begin{aligned} f^*\left(x = \frac{l}{2}, c = \frac{l}{2}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Pl^3}{EI \pi^4 (2n-1)^4} (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{n-1} = \\ &= \frac{2Pl^3}{EI \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{2Pl^3}{EI \pi^4} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} \right\} = \\ &= \frac{2Pl^3}{EI \pi^4} \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{15}{8} \cdot \frac{Pl^3}{EI \pi^4} \cdot \frac{|B_4| \cdot (2\pi)^4}{2 \cdot 4!} = \\ &= \frac{15 \cdot 16 \cdot \pi^4 \frac{1}{30} \cdot Pl^3}{8 \cdot 2 \cdot 24 \cdot EI \cdot \pi^4} = \frac{Pl^3}{48 EI}. \end{aligned}$$

δ . Igazoljuk, hogy

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} - 1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m} - \frac{1}{2} \pm \dots + \\ + \frac{1}{nm+1} + \frac{1}{nm+2} + \frac{1}{nm+3} + \dots + \frac{1}{(n+1)m} - \frac{1}{n+1} \pm \dots = \ln m. \end{aligned}$$

2. Igazoljuk, hogy

$$+\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + + - \dots = \ln 3.$$

Megoldás: Jelöljük az itt megadott sor n -edik szeletét s_n nel, a harmonikus sor n -edik szeletét h_n -nel; azaz

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n},$$

és

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + + - \dots \pm \frac{1}{n}.$$

Mivel n értékétől függ a legutolsó tag előjele, azért célszerű lesz s_{3n} , illetve h_{3n} -nel számolni:

$$\begin{aligned} s_{3n} &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + + - \dots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3n} - \frac{3}{3} - \frac{3}{6} - \frac{3}{9} - \dots - \frac{3}{3n} = h_{3n} - h_n. \end{aligned}$$

Ismeretes, hogy $h_{3n} = \ln 3n + \delta_{3n}$ és $h_n = \ln n + \delta_n$, ahol δ_{3n} és δ_n monoton csökkenő számok, amelyeknek közös határértéke: C (ún. Euler-állandó). $\delta_{3n} < \delta_n \leq 1$, így $|\delta_{3n} - \delta_n| < 1$, és $\lim_{n \rightarrow \infty} |\delta_{3n} - \delta_n| = 0$. Ennek alapján:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (h_{3n} - h_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln 3n - \ln n + \delta_{3n} - \delta_n] = \ln 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} (\delta_{3n} - \delta_n) = \ln 3$$

Igazoltuk tehát, hogy az eredeti sor szeleteiből alkotott sorozat egyik részsorozata a $\ln 3$ értékhez konvergál. Ha a szeletek sorozata (azaz a végtelen sor) konvergál, csak ehhez a határértékhez konvergálhat. Minthogy azonban

$$s_{3n+1} - s_{3n} = \frac{1}{3n+1} \rightarrow 0,$$

azért az $\{s_{3n+1}\}$ részsorozat is konvergál az $\{s_{3n}\}$ részsorozattal együtt, és pedig ugyanahhoz a határértékhez. Ugyanígy

$$s_{3n+2} - s_{3n} = \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} \rightarrow 0,$$

tehát az $\{s_{3n+2}\}$ részsorozat is konvergál. Konvergál tehát a 3 sorozat egyesített sorozata, az eredeti sorozat is, és ezzel a bizonyítást befejeztük.

3. Rendezzük át a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

sor úgy, hogy a tagok előjelei változatlanok maradjanak, és annak a valószínűsége, hogy pozitív tagot találunk a sorozatban, ha azt minden határon túl folytatjuk, legyen v .

Igazoljuk, hogy az így átrendezett sor összege

$$s = \ln \left(2 \sqrt{\frac{v}{1-v}} \right)$$

4. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + + - \dots + (-1)^{3n-1} \frac{1}{3n-2} + (-1)^{3n} \frac{1}{3n-1} + \\ + (-1)^{3n+1} \frac{1}{3n+1} \pm \dots \end{aligned}$$

sor összegét.

5. Határozzuk meg az

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \dots$$

$$b) 1 + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{19^2} + \frac{1}{23^2} + \frac{1}{29^2} + \dots$$

$$c) -\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - - + \dots + (-1)^{3n-1} \frac{1}{(3n-2)^2} + \\ + (-1)^{3n} \frac{1}{(3n-1)^2} + (-1)^{3n+2} \frac{1}{(3n+1)^2} + \dots$$

sor összegét.

6. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \frac{\sqrt{2}}{8} [\pi + \ln(3 + 2\sqrt{2})].$$

7. Igazoljuk, hogy

$$a) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 11} - + \dots = \frac{1}{60} \left(\pi - \frac{149}{60} \right).$$

$$b) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} - + \dots = \frac{5}{36} - \frac{\ln 2}{6}.$$

$$c) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{1}{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} + \dots = \frac{\ln 2}{4} - \frac{\pi}{24}.$$

$$d) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9} + \dots = \pi \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{\ln 3}{4}.$$

8. Igazoljuk, hogy

$$a) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \dots = \frac{1}{36}.$$

$$b) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

$$c) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} - + \dots = \frac{1}{2} (1 - \ln 2).$$

9. Számítsuk ki a következő sorok értékét :

$$a) \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots + \frac{k!}{(2k-1)!!} + \dots$$

$$b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

$$c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k+2)!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots$$

$$d) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)^2}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n^2}$$

$$f) 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots$$

$$g) 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + - \dots$$

10. Vezessük be a következő jelöléseket :

$$E_p = \frac{1}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n!}, \text{ illetve } F_p = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n!}{(p+n)!} \right]^2, \quad (p = 1, 2, 3, \dots).$$

Számítsuk ki E_0, E_1, E_2, \dots , illetve F_1, F_2, F_3, \dots értékét, és kíséreljünk meg rekurziós formulát adni az $\{E_p\}$ illetve $\{F_p\}$ sorozat képzési szabályát illetően.

11. Határozzuk meg az

$$\left\{ a_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{pk\pi}{n+1} \cdot \sin \frac{qk\pi}{n+1} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \vartheta_k} \cdot \frac{1}{e^{(m-l)\vartheta_k}} \right\}$$

számsorozat határértékét, ha $n \rightarrow \infty$. Itt ϑ_k a következő egyenlőség által van definiálva :

$$\operatorname{sh} \frac{\vartheta_k}{2} = \sin \frac{k\pi}{2(n+1)},$$

míg az l, m, p és q számok n -nel együtt a végtelenhez tartanak; és pedig jelentse

l azt a legnagyobb természetes számot, amelyre még $0 < \frac{l}{n} \leq x$,

m azt a legkisebb természetes számot, amelyre még $0 < \xi \leq \frac{m}{n}$,

p azt a legnagyobb természetes számot, amelyre még $0 < \frac{p}{n} \leq y$,

q pedig azt a legkisebb természetes számot, amelyre még $0 < \eta \leq \frac{q}{n}$,

ahol $x < \xi$ és $y < \eta$ rögzített számok.

Megoldás: Az 1. § c) a) részben láttuk, hogy ilyen típusú feladatok esetében néha helyes eredményt kapunk akkor, ha először az összeg tagjaiban végezzük el a határátmenetet, majd a tagszámot növeljük minden határon túl, azaz az összegről végtelen sorra térünk át (ahelyett, hogy a feladat előírta módon a két határátmenetet szimultán végeznők). Azt is láttuk azonban, hogy így igen gyakran helytelen eredményre jutunk, tehát szigorúan ellenőriznünk kell, hogy a határátmenet-sorrendek önkényes megváltoztatása jogos-e.

Az összeg tagjait tekintve egyébként azt is láthatjuk, hogy értéküket akkor tudjuk könnyen becsülni, ha k még sokkal kisebb, így

$$\vartheta_k = 2 \operatorname{ar sh} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} < 2 \operatorname{ar sh} \frac{k\pi}{2(n+1)} < 2 \frac{k\pi}{2(n+1)} = \frac{k\pi}{n+1},$$

de

$$\vartheta_k = 2 \operatorname{ar sh} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} > 2 \operatorname{ar sh} \frac{k}{n+1} > 2 \left\{ \frac{k}{n+1} - \frac{1}{6} \frac{k^3}{(n+1)^3} \right\}.$$

Megjegyezzük, hogy az alsó becslés nagyon durva, ha $k \leq \sqrt{n}$, és n már elegendően nagy, ezért erre az esetre pontosabb becslést is levezetünk. A $\sin x$ függvény hatványsora: $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$ mindenütt konvergál és alternáló előjelű, továbbá tagjai monoton csökkenőek abszolút értékben, ha $0 < x \leq 1$. Így tehát

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} \quad \text{ha } 0 < x < 1.$$

Ennek alapján

$$\begin{aligned} \vartheta_k &= 2 \operatorname{ar sh} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} > 2 \left\{ \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} - \frac{1}{6} \sin^3 \frac{k\pi}{2(n+1)} \right\} > \\ &> 2 \frac{k\pi}{2(n+1)} - \frac{1}{3} \left(\frac{k\pi}{2(n+1)} \right)^3 = \frac{k\pi}{n+1} - \frac{1}{3} \left(\frac{k\pi}{2(n+1)} \right)^3. \end{aligned}$$

Végeredményben tehát

$$\frac{k\pi}{n+1} > \vartheta_k > \frac{k\pi}{n+1} - \frac{1}{12} \left(\frac{k\pi}{n+1} \right)^3.$$

a_n első részében tehát először az összeadandókban végezzük el az $n \rightarrow \infty$ határátmenetet. Könnyen belátható, hogy

$$\sin \frac{pk\pi}{n+1} \rightarrow \sin ky\pi, \quad \sin \frac{qk\pi}{n+1} \rightarrow \sin k\eta\pi, \quad \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \vartheta_k} \rightarrow \frac{1}{k\pi},$$

mint n . Ha viszont k már nagy, akkor — mint könnyen beláthatjuk — a nevezőben szereplő $e^{(m-1)\vartheta_k}$ alakú faktor oly nagy, hogy az összeg ezen tagjai alig befolyásolják az összeg értékét. Ez indít bennünket arra, hogy az összeget két részre bontsuk; az egyik részben szerepeljenek azok a tagok, amelyekben k relatíve kicsiny n -hez képest, a másikban a többiek. Így

$$a_n = b_n + c_n; \quad b_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \sin \frac{pk\pi}{n+1} \cdot \sin \frac{qk\pi}{n+1} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \vartheta_k} \cdot \frac{1}{e^{(m-1)\vartheta_k}}.*$$

Mindenekelőtt ϑ_k értékét kell tudnunk jól becsülni. A ϑ_k -t definiáló egyenletből

$$\vartheta_k = 2 \operatorname{ar sh} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}.$$

Mínt hogy $0 < k \leq n$, azért $0 < \frac{k\pi}{2(n+1)} < \frac{\pi}{2}$. A $\sin x$ függvényre pedig fennáll a $0 < x < \frac{\pi}{2}$ szakaszon a következő becslés:

$$\frac{2}{\pi} x < \sin x < x, \quad \text{ha } 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

* $[\sqrt{n}]$ jelenti a \sqrt{n} -nél még nem nagyobb legnagyobb természetes számot.

ami a $\sin x$ függvény első deriváltjának pozitív, második deriváltjának negatív voltából, továbbá a $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ egyenlőségekből azonnal következik. Minthogy pedig az $\operatorname{ar sh} x$ hatványsora:

$$x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - + \dots$$

konvergál, ha $|x| \leq 1$, továbbá alternáló előjelű, és tagjai monoton csökkennek, ha $0 \leq x \leq 1$, azért

$$x - \frac{x^3}{6} < \operatorname{ar sh} x < x, \quad \text{hacsak } 0 < x < 1$$

(ezt az imént adott becslések alapján láthatjuk be), és

$$e^{(m-l)\vartheta_k} = e^{\frac{m-l}{n} n \vartheta_k} \rightarrow e^{(\xi-x)k\pi}.$$

Így tehát a_n első része helyett a

$$\left\{ d_n = \sum_{k=1}^{[Vn]} \sin k\pi y \sin k\pi \eta \frac{1}{k\pi e^{(\xi-x)k\pi}} \right\}$$

sorozat határértékét, azaz az

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi y \sin k\pi \eta}{k \cdot e^{(\xi-x)k\pi}}$$

sor összegét állapítjuk meg. Ha itt felhasználjuk a $\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$ relációt,* akkor összegezendő sorunk szétesik $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k}$ ($|a| < 1$) alakú sorok összegére, minthogy $e^{-Ak} = (e^{-A})^k$. Az utóbbi sor összegezése céljából meghatározzuk az

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad (-1 \leq x < 1)$$

függvényt. Minthogy $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$; $(-1 < x < 1)$,

azért
Ennek alapján

$$f(x) = -\ln(1-x) \quad (-1 \leq x < 1).$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi y \sin k\pi \eta}{k} \cdot e^{-(\xi-x)k\pi} = \\ & = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{1 - 2e^{-\pi(\xi-x)} \cdot \cos \pi(\eta-y) + e^{-2\pi(\xi-x)}}{1 - 2e^{-\pi(\xi-x)} \cdot \cos \pi(\eta+y) + e^{-2\pi(\xi-x)}}, \quad (\xi > x). \end{aligned}$$

Ki kell mutatnunk még, hogy ez egyszersmind az $\{a_n\}$ sorozat határértéke is. a_n második része ugyanis egyenletesen 0-hoz tart, ha $n \rightarrow \infty$:

$$\sin \frac{pk\pi}{n+1} \cdot \sin \frac{qk\pi}{n+1} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \vartheta_k} \cdot \frac{1}{e^{(m-l)\vartheta_k}} \leq O\left(\frac{\sqrt{n}}{e^{\sqrt{n}}}\right), \quad \text{ha } k \leq [Vn],$$

* L. pl. *Bermant*: Matematikai analízis c. tankönyve I. kötetében a 462. lapot.

és így

$$c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^n \sin \frac{pk\pi}{n+1} \cdot \sin \frac{qk\pi}{n+1} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \vartheta_k} \cdot \frac{1}{e^{(m-l)\vartheta_k}} = \frac{n}{n+1} O\left(\frac{\sqrt{n}}{e^{\sqrt{n}}}\right)$$

$\sqrt{n} \cdot e^{-\sqrt{n}}$ pedig exponenciálisan 0-hoz tart. Azt kell tehát még kimutatnunk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - d_n) = 0$. De

$$\begin{aligned} b_n - d_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \left(\sin \frac{pk\pi}{n+1} \cdot \sin \frac{qk\pi}{n+1} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \vartheta_k} \cdot \frac{1}{e^{(m-l)\vartheta_k}} - \right. \\ &\quad \left. - \sin k\pi y \sin k\pi \eta \cdot \frac{1}{e^{(\xi-x)k\pi}} \cdot \frac{n+1}{k\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \left\{ \sin \frac{kp\pi}{n+1} \cdot \sin \frac{kq\pi}{n+1} \cdot \frac{1}{e^{(m-l)\vartheta_k}} \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{sh} \vartheta_k} - \frac{n+1}{k\pi} \right) + \right. \\ &\quad + \sin \frac{k\pi p}{n+1} \cdot \sin \frac{kq\pi}{n+1} \cdot \frac{n+1}{k\pi} \left(\frac{1}{e^{(m-l)\vartheta_k}} - \frac{1}{e^{(\xi-x)k\pi}} \right) + \\ &\quad + \sin \frac{kp\pi}{n+1} \cdot \frac{1}{e^{(\xi-x)k\pi}} \cdot \frac{n+1}{k\pi} \cdot \left(\sin \frac{kq\pi}{n+1} - \sin k\pi \eta \right) + \\ &\quad \left. + \sin k\pi \eta \cdot \frac{1}{e^{(\xi-x)k\pi}} \cdot \frac{n+1}{k\pi} \left(\sin \frac{kp\pi}{n+1} - \sin k\pi y \right) \right\}. \end{aligned}$$

Az eddigi becslések alapján könnyen adódik, hogy

$$\left| \frac{1}{\operatorname{sh} \vartheta_k} - \frac{n+1}{k\pi} \right| \leq O\left(\frac{k^2}{n^2}\right) \leq O\left(\frac{1}{n}\right),$$

ha $k \leq \sqrt{n}$, továbbá

$$\left| \frac{1}{e^{(m-l)\vartheta_k}} - \frac{1}{e^{(\xi-x)k\pi}} \right| = \left| \frac{e^{\frac{m-l}{n}\vartheta_k n} - e^{(\xi-x)k\pi}}{e^{(\xi-x)k\pi} \cdot e^{\frac{m-l}{n}\vartheta_k n}} \right| \leq O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

ahol $m > l$, (minthogy az m és l -re tett kikötések értelmében

$$\left| \left(\xi - x \right) - \frac{m-l}{n} \right| < \frac{2}{n},$$

továbbá

$$\left| \sin \frac{kp\pi}{n+1} - \sin k\pi y \right| \leq O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

(minthogy a p -re tett kikötés alapján

$$\left| \frac{p}{n+1} - y \right| \leq \left| \frac{p}{n+1} - \frac{p}{n} \right| + \left| \frac{p}{n} - y \right| \leq \frac{y}{n} + \frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right), \text{ és } k \leq \sqrt{n}$$

emellett pedig

$$\left| \sin \alpha - \sin \left(\alpha + \frac{b}{\sqrt{n}} \right) \right| = \left| \frac{b}{\sqrt{n}} \right| \cdot \left| \cos \left(\alpha + \frac{b}{\sqrt{n}} \right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

a középértéktétel szerint), és ugyanígy

$$\left| \sin \frac{kq\pi}{n+1} - \sin k\eta\pi \right| \leq O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Az $|b_n - d_n|$ összeg értékét tehát az

$$\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{O(\sqrt{n})}{k} = \frac{O(\sqrt{n}) O(\ln \sqrt{n})}{n+1}$$

értékkel becsülhetjük. (Az utóbbi relációt a *Cauchy–Mac Laurin*-féle integrálbecslés alapján kaptuk.) Végül tehát

$$|b_n - d_n| \leq \frac{O(\sqrt{n}) O(\ln n)}{n+1} = O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow 0,$$

s így $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - d_n) = 0$, q. e. d.

ε 1. Számítsuk ki 8 értékes számjegyre pontosan a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

sor összegét. Adjuk meg így a π^2 értékét 8 értékes jegyre.

Megoldás: A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

sor részlettörtökre bontás után közvetlenül összegezni tudjuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Tekintettel arra, hogy az utóbbi sor tagjai majdnem pontosan egyenlőek a számítandó sor tagjaival, érdemes az előbbi az utóbbiból kivonni és összegét újból hozzáadni.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)} \right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}. \end{aligned}$$

Ezen sor tagjai sokkal gyorsabban (ti. $\frac{1}{n^3}$ nagyságrendben) tartanak a 0-hoz, mint az eredeti sor tagjai (amelyek $\frac{1}{n^2}$ rendben tűnnek el), ezért azonos indexű sormaradékaik nagyság-

rendjében kb. egy $\frac{1}{n}$ faktor szerepel. 8 értékes számjegyre azonban még az utóbbi sor alapján is nehéz számolni. Ezért ugyanezt az eljárást még megismételjük. Felhasználhatjuk pl. hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2} \right];$$

felhasználva tehát a 6. § a) α) 11. feladatban ismertetett tételt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2},$$

és így

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} = 1 + \frac{1}{2^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right] = \\ &= 1 + \frac{1}{2^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{18}.$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= 1 + \frac{1}{2^2} + 2 \cdot \frac{1}{18} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \right] = \\ &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + 3! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

Az eljárást ugyanígy tovább folytatva, könnyű belátni, hogy p lépés után a következő eredményt kapjuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{p^2} + p! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)\dots(n+p)}.$$

Mínthogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ körülbelül 2 nagyságrendű (hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \sim 1,6$, azt a 6. § a) γ)

1. feladatából tudjuk), ha 8 értékes jegyre kell a sorösszeget számítanunk, majd ebből a π^2 -et (amikor még 6-tal szorzunk), akkor 10^{-8} pontossággal kell az eredményt kiszámítanunk. Ez annyit jelent, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)}$$

sor összegét $10^{-8} \frac{1}{p!}$ pontossággal kell közelítenünk. Tegyük fel, hogy az első k tagot kell ehhez figyelembe vennünk. A k -adik sormaradékot így becsülhetjük a 2. § a) β) 23-ban mondottak alapján:

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)\dots(n+p)} < \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{\left(n + \frac{p-3}{2}\right)^{p+2}},$$

ti.:

$$n(n+p) = n^2 + np > \left(n + \frac{p-3}{2}\right)^2 = n^2 + (p-3)n + \frac{(p-3)^2}{4}, \text{ ha } n \geq \frac{(p-3)^2}{12},$$

$$n(n+p-1) = n^2 + (p-1)n > \left(n + \frac{p-3}{2}\right)^2, \text{ ha } n \geq \frac{(p-3)^2}{8};$$

és

$$(n+s)(n+p-s-1) > (n+s-1)(n+p-s) > \dots > (n+1)(n+p-2) > n(n+p-1).$$

Így:

$$\begin{aligned} r_k &< \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{\left(n + \frac{p-3}{2}\right)^{p+1}} < \int_k^{\infty} \frac{dx}{\left(x + \frac{p-3}{2}\right)^{p+2}} = \\ &= -\frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{\left(x + \frac{p-3}{2}\right)^{p+1}} \Big|_k^{\infty} = \frac{1}{(p+1) \left(\frac{p-3}{2} + k\right)^{p+1}} \end{aligned}$$

Így tehát a $p = 11$ választás mellett pl. kell, hogy

$$\frac{10^{-8}}{11!} < \frac{1}{12 \cdot (k+4)^{12}} \quad \left(\text{ha } k \geq \frac{(p-3)^2}{8} = \frac{8^2}{8} = 8 \right)$$

legyen. Ebből némi próbálkozással az adódik, hogy a $k = 12$ még nem, de $k = 13$ már megfelel. Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx \sum_{n=1}^{11} \frac{1}{n^2} + 11! \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{k^2(k+1) \dots (k+11)} = 1,644\,934\,07$$

és ebből $\pi^2 \approx 9,869\,604\,4$.

2. Bevezetve az

$$S_{p-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2(n+1)^2 \dots (n+p-1)^2}$$

jelölést, mutassuk ki, hogy fennáll az

$$S_{p-1} = \frac{5p+2}{4(p+1)} \cdot \frac{1}{(p!)^2} - \frac{p(p+1)^3}{4} S_{p+1}$$

rekurziós formula, ahol p valamilyen természetes szám.

a) Igazoljuk ezt.

b) Határozzuk meg ennek alapján, hogy milyen összefüggés áll fenn

$$S_1 \text{ és } S_{2k+1}, \text{ illetve } S_0 \text{ és } S_{2k}$$

között.

c) Számítsuk ki e rekurziós formulák alapján S_0 , illetve S_1 értékét 5 értékes számjegynyi pontossággal.

d) A b)-ben levezetett rekurziós formula érvényese, ha a $k \rightarrow \infty$ határátmenetet elvégezzük? Milyen új alakot kapunk így S_p -re? Levezethető-e ez közvetlenül is a Markov-féle sortranszformáció alapján?

e) Számítsuk ki a

$$\sum_{p=0}^{\infty} S_p$$

értékét 3 tizedesjegynyi pontossággal:

Megoldás: ad a) A rekurziós formula igazolható az 1 feladat mintájára.

$$\begin{aligned} \text{ad b) } S_{p-1} &= \frac{5p+2}{4(p+1)} \cdot \frac{1}{(p!)^2} - \frac{p(p+1)^3}{4} S_{p+1} = \\ &= \frac{5p+2}{4(p+1)} \cdot \frac{1}{(p!)^2} - \frac{p(p+1)^3}{4} \left\{ \frac{5p+12}{4(p+3)} \cdot \frac{1}{[(p+2)!]^2} - \frac{(p+2)(p+3)^3}{4} S_{p+3} \right\} = \\ &= \frac{5p+2}{4(p+1)} \cdot \frac{1}{(p!)^2} - \frac{5p+12}{4^2(p+3)} \cdot \frac{p(p+1)^3}{[(p+2)!]^2} + \\ &\quad + \frac{p(p+1)^3(p+2)(p+3)^3}{4^3} S_{p+3}; \dots \end{aligned}$$

Általában:

$$\begin{aligned} S_{p-1} &= \frac{5p+2}{4(p+1)} \cdot \frac{1}{(p!)^2} - \frac{5p+12}{4^2(p+3)} \frac{p(p+1)^3}{[(p+2)!]^2} + \\ &\quad + \frac{5p+22}{4^3(p+5)} \frac{p(p+1)^3(p+2)(p+3)^3}{[(p+4)!]^2} - \dots + \\ &\quad (-1)^k \frac{5p+10k+2}{4^{k+1}(p+2k+1)} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{p(p+2)(p+4)\dots(p+2k-2)(p+1)^3(p+3)^3\dots(p+2k-1)^3}{[(p+2k)!]^2} + \\ &\quad + (-1)^{k+1} \frac{p(p+2)\dots(p+2k)(p+1)^3(p+3)^3\dots(p+2k+1)^3}{4^{k+1}} S_{p+2k+1}. \end{aligned}$$

Ebből $p=1$ helyettesítéssel kapjuk az S_0 és S_{2k+2} , $p=2$ helyettesítéssel az S_1 és S_{2k+3} közötti rekurziós formulát.

ad d) Az

$$\begin{aligned} S_{p-1} &= \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^n (5p+10n+2) p \cdot (p+2)\dots(p+2n-2)(p+1)^3\dots(p+2n-1)^3}{4^{n+1}(p+2n+1)[(p+2n)!]^2} + \\ &\quad + (-1)^k \frac{p(p+2)\dots(p+2k-2)(p+1)^3\dots(p+2k-1)^3}{4^k} S_{p+2k-1} \end{aligned}$$

rekurziós formula k minden természetes értékére érvényes; a $k \rightarrow \infty$ határátmenet tehát biztosan elvégezhető, ha az összegnek s van határértéke (más szóval a sor, amellyé az összeg válik, konvergens), és a legutolsó tagnak is van határértéke. Minthogy a bal oldal (ti. S_{p-1})- p bármely természetes egész értékénél véges, ezért a jobb oldalon szereplő összeg,

illetve $C \cdot S_{p+2k-1}$ alakú tag együtt konvergálnak vagy divergálnak. Elegendő tehát azt vizsgálni, hogy létezik-e, s ha igen, mivel egyenlő a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p(p+2) \dots (p+2k-2)(p+1)^3 \dots (p+2k-1)^3}{4^k} S_{p+2k-1}$$

mennyiség. Minthogy

$$\begin{aligned} & p(p+2) \dots (p+2k-2)(p+1)^3 \dots (p+2k-1)^3 < \\ & < (p+1)^2 (p+2)^2 (p+3)^2 \dots (p+2k-1)^2 \cdot p \cdot (p+2k-1), \end{aligned}$$

és

$$S_{p+2k-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 (n+1)^2 \dots (n+p+2k-1)^2} < \frac{1}{1^2 2^2 \dots (p+2k)^2}$$

(a *Leibniz*-szabály értelmében l. a. 2. § a) γ) 9. és 10. feladatát), azért

$$\begin{aligned} 0 & \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p \cdot (p+2) \dots (p+2k-2)(p+1)^3 \dots (p+2k-1)^3}{4^k} S_{p+2k-1} \leq \\ & \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4^k} \frac{p(p+1)^2 (p+2)^2 \dots (p+2k-1)^2 (p+2k-1)}{1^2 \cdot 2^2 \dots p^2 \cdot (p+1)^2 \dots (p+2k-1)^2 (p+2k)^2} = 0. \end{aligned}$$

A $k \rightarrow \infty$ határátmenet tehát a rekurziós formulában elvégezhető, és

$$\begin{aligned} S_{p-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 (n+1)^2 \dots (n+p-1)^2} = \frac{5p+2}{4(p+1)} \cdot \frac{1}{(p!)^2} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (5p+10k+2)}{4^{k+1} (p+2k+1)} \cdot \frac{p(p+2) \dots (p+2k-2)(p+1)^3 \dots (p+2k-1)^3}{[(p+2k)!]^2} \end{aligned}$$

és igen könnyen belátható, hogy az utóbbi sor összehasonlíthatatlanul gyorsabban konvergál, mint az előbbi.

Az S_{p-1} -re másodszorra adódó alakot a *Markov*-féle sortranszformáció segítségével is megkaphatjuk. Hogy általában a *Markov*-féle sortranszformációs eljárások szerkesztése tisztán álljon előttünk, megpróbáljuk megvilágítani a kapcsolatát azzal az eljárással, amelyet a 6. § a) ϵ) 1. feladatában többször egymás után, illetve ezen feladat a) pontjában egyszer elvégeztünk (ti. a kapcsolatát azzal az eljárással, amikor az összegezendő sorból levonunk egy olyan sort, amelynek összege ismert, és amelynek a tagjai ugyanolyan nagyságrendűek, mint az eredeti soréi).^{*} Ez a kapcsolat egyszerűen abban áll, hogy ezt az eljárást *Markov*-féle sortranszformáció esetén lépésről lépésre minden határon túl folytatjuk a következő módon:

Az átrendezés négyzetes sémáját úgy konstruáljuk meg, hogy az összegezendő sort a bal oldalra írjuk, oszlopalakban. Mármost elvileg az összegezendő sor minden egyes tagját magát is végtelen sor alakjában állítjuk elő, és így rendelkezésünkre áll a négyzetes séma. Hogy azonban hogyan állítsuk elő az egyes tagokat sor alakjában, arra éppen az a módszer adja meg a választ, amelyet az előbbiekben tárgyaltunk. A négyzetes matrixot ugyanis most oszlopról oszlopra a következőképp konstruáljuk: az első oszlopba az a végtelen sor kerül, amelynek a tagjai ugyanolyan nagyságrendűek, mint az eredeti soréi, és amelynek ismert az összege. A második oszlopba az eredeti sor és az imént felírt sor különbségéhez konstruált azon sor kerül, amelynek összege ismert, és amelynek a tagjai ugyanolyan nagyságrendűek, mint a különbségsoréi stb. Ilyen konstrukció mellett automatikusan teljesülnek a *Markov*-transzformációval kapcsolatos szükséges és elégséges feltételek.

^{*} Ez utóbbi eljárást néhányan *Kummer*-féle transzformációnak nevezik.

Visszatérve a $d)$ ponthoz, S_{p-1} második összegalakja tehát valóban származtatható *Markov*-féle transzformációval az első alakból, hiszen csak az $a)$ pontban elvégzett műveletet kell — a $b)$ -ben mutatott módon — minden határon túl ismételni, és a kivont sorokat kell oszlopalkakban felírni. Az eljárás k -adik maradékösszege egyébként, amint az azonnal belátható:

$$R_k = (-1)^k \frac{p(p+2) \dots (p+2k-2)(p+1)^3 \dots (p+2k-1)^3}{4^k} S_{p+2k-1}.$$

amelyről a $c)$ pontban kimutattuk, hogy 0-hoz tart,

ad $e)$ A

$$\sum_{p=0}^{\infty} S_p$$

összeg kiszámításánál először a konvergenciát kell igazolnunk. A *Leibniz*-szabály értelmében

$$0 < S_p < \frac{1}{1^2 \cdot 2^2 \dots (p+1)^2}$$

és így

$$0 < \sum_{p=0}^{\infty} S_p < \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{1^2 \cdot 2^2 \dots (p+1)^2} < \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

a sor tehát bizonyosan konvergens.

Összegét igen sokféleképp számíthatjuk. A *Markov*-féle sortranszformációt pl. az S_p -re definícióképp adott sorok és a $d)$ -ben levezetett sorok alapján is alkalmazhatjuk. Legegyszerűbb azonban az az eljárás (tekintettel arra, hogy S_p értéke a p -vel igen gyorsan csökken), amikor meghatározzuk azt az n_0 indexet, amelyre

$$r_{n_0} = \sum_{p=n_0+1}^{\infty} S_p < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$$

és S_{n_0} , illetve S_{n_0-1} értékét kellő pontossággal számítva, a rekurziós formulák alapján kiszámíthatjuk az összeget.

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n \approx S_0 + S_1 + S_2 + S_3 \approx 0,8986.$$

Eredményünk 3 értékes számjegyre pontos.

3. Tekintsük a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

sort. Adjunk meg a *Markov*-féle sortranszformáció segítségével egy gyorsabban konvergáló sort, amelynek szintén $\frac{\pi^2}{6}$ az értéke, úgy, hogy ugyanazokat az átalakításokat használjuk, mint a 4. § a) e) 1. feladatban, de az n -edik sort az n -edik elemmel bezárjuk.

Útbaigazítás: A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sorból levontuk az 1. feladatban a $0! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, azután az

$1! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$, majd a $2! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \dots (n+3)}$ stb. sort. Most is ugyanezt tesszük,

de az egyes sorokban kerekítenünk kell. A matrix k -adik sorába az $\frac{1}{k^2}$ -et előállító következő

10*

Ha tehát a maradékösszegek sorozata 0-hoz tart, akkor fennáll, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}. \text{ De } R_k = \sum_{s=1}^{\infty} r_k^{(s)} =$$

$$= \sum_{s=k+1}^{\infty} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \dots - \frac{(s-1)!}{k(k+1)\dots(k+s)} \right].$$

Mínthogy pedig

$$\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \dots + \frac{(s-1)!}{k(k+1)\dots(k+s)} < \frac{1}{k^2},$$

azért

$$0 < R_k < \sum_{s=k+1}^{\infty} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(k+1)} \right] =$$

$$= \sum_{s=k+1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)} < \sum_{s=k+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \int_k^{\infty} \frac{dx}{x^3} \equiv \frac{1}{2k^2}$$

és így $R_k \rightarrow 0$, ha $k \rightarrow \infty$; q. e. d.

4. Igazoljuk, hogy a 2. § b) β) 12. feladatában bemutatott ún. Euler-féle sortranszformációs tétel, amely szerint

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n a_0}{2^n},$$

(ha a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ sor konvergens) érvényes abban az esetben is, ha a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$

sor csak formálisan alternáló, más szóval, ha az a_n -nel jelölt tagok nem is mind pozitív számok.

5. Számítsuk ki a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

sor segítségével ln 2 értékét 4 értékes számjegynyi pontossággal.

Megoldás: A sor eredeti alakjában kb. $2 \cdot 10^4$ számú tagot kellene összegezni ahhoz, hogy ln 2 értékét a kívánt pontossággal kapjuk meg. Megkíséreljük alkalmazni az Euler-féle transzformációt (ez jogos, hiszen a sor bizonyosan konvergens), amely alternáló és monoton csökkenő sorok konvergenciájának sebességét (hacsak a tagok nem csökkennek túl gyorsan) általában növelni szokta. (Ha a tagok túl gyorsan csökkennek, akkor a differenciák relative nagyok lehetnek, és így esetleg nem nő, vagy éppen csökken a konvergencia sebessége; ilyen esetekben azonban nem nagyon kell növelnünk a konvergencia sebességét, mert a gyors csökkenés miatt többnyire az eredeti sor is elég gyorsan konvergál.)

Elkészítjük tehát a differenciasémát:

(a_0)	(a_1)	(a_2)	(a_3)	(a_4)	\dots
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	\dots

$$\begin{array}{ccccc}
 (\Delta a_0) & (\Delta a_1) & (\Delta a_2) & (\Delta a_3) & (\Delta a_4) \\
 \frac{1}{1 \cdot 2} & \frac{1}{2 \cdot 3} & \frac{1}{3 \cdot 4} & \frac{1}{4 \cdot 5} & \frac{1}{5 \cdot 6} \dots \\
 \\
 (\Delta^2 a_0) & (\Delta^2 a_1) & (\Delta^2 a_2) & (\Delta^2 a_3) & \\
 \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} & \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 4} & \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot 5} & \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 5 \cdot 6} & \\
 \\
 (\Delta^3 a_0) & (\Delta^3 a_1) & & & \\
 \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} & \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} & \dots & &
 \end{array}$$

Ezek szerint

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{2^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

Az utóbbi sor gyorsabban konvergál, mint a $\sum \frac{1}{2^n}$ sor. A sormaradék becslését az olvasóra bízva:

$$\ln 2 \cong \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1}{4 \cdot 16} + \dots + \frac{1}{7 \cdot 128} \approx 0,6931$$

és pedig 4 értékes számjegyre pontosan.

6. Határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$

sor segítségével $\frac{\pi}{4}$ értékét 4 értékes számjegynyi pontossággal.

7. Igazoljuk a következő összefüggéseket:

$$\begin{aligned}
 a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} &= \frac{9}{8} + \frac{25}{4 \cdot 81} - \frac{4}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3 (k+2)^3 (k+3)^3} = \\
 &= \frac{9}{8} + \frac{133}{64 \cdot 27} + \frac{3 \cdot 256}{5} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^3 (s+1)^3 \dots (s+4)^3},
 \end{aligned}$$

és határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ sor összegét 5 értékes jegyre pontosan.

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(n+1)^3} = \frac{2537}{2520} - \frac{8 \cdot 81}{35} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 (k+1)^3 (k+2)^3 (k+3)^3}.$$

Számítsuk ki a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(n+1)^3}$ sor összegét 6 értékes jegyre pontosan.

8. Bevezetve a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} = S_p$$

jelölést, igazoljuk transzformációval a következő összefüggéseket:

$$a) \sum_{p=2}^{\infty} S_p = 1, \quad b) \sum_{p=1}^{\infty} S_{2p+1} = \frac{1}{4}, \quad c) \sum_{p=1}^{\infty} S_{2p} = \frac{3}{4}.$$

$$d) \sum_{p=2}^{\infty} (-1)^p S_p = \frac{1}{2}, \quad e) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{S_{2p}}{p} = \ln 2.$$

$$f) \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \frac{S_{2p}}{p} = \ln \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{4\pi} = \ln \operatorname{sh} \pi - \ln 2\pi.$$

9. x mely értékére érvényesek az alábbi azonosságok?

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} = e \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{1!} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2!} \frac{1}{x+2} - + \dots \right];$$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{6^{-n}}{1+x^2 6^{-2n}} = e^{\frac{1}{6}} - x^2 e^{\frac{1}{6^3}} + x^4 e^{\frac{1}{6^5}} - + \dots$$

$$c) \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1!}{x(x+1)} + \frac{1}{3} \frac{2!}{x(x+1)(x+2)} + \dots =$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \dots$$

Számítsuk ki az egyes sorok értékét az $x = 0,1$ helyen 4 értékes számjegynyi pontossággal

10. α , illetve β milyen értékeire érvényesek az alábbi egyenlőségek? Mely α értékekre konvergálnak gyorsabban a jobb oldali sorok, mint a bal oldaliak?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha + n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \frac{k!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha + n} \beta^n = \frac{1}{\alpha(1+\beta)} \left[1 + \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{\beta}{\beta+1} \right) + \frac{2!}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left(\frac{\beta}{\beta+1} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{3!}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} \left(\frac{\beta}{\beta+1} \right)^3 + \dots \right]$$

11. Mely intervallumokon érvényesek az alábbi azonosságok?

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = e^x \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n a_0 \frac{x^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k a_k x^k = \frac{1}{1+x} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n a_0 \left(\frac{x}{1+x} \right)^n.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k a_{2k} x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n a_0 \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^n.$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k a_{2k+1} x^{2k+1} &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n a_0 \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{x}{1+x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n a_0 \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^n.\end{aligned}$$

12. Rendezzük a p^q alakú hatványokat, ahol p és q 2-nél nem kisebb természetes számok, növekvő sorrendben:

$$a_1 = 2^2 = 4; a_2 = 2^3 = 8; a_3 = 3^2 = 9; a_4 = 4^2 = 16; a_5 = 5^2 = 25; a_6 = 3^3 = 27; \dots$$

Számítsuk ki a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n - 1}$, illetve a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ sor összegét!

b) Aszimptotikus képletek, formulák

Ezen a gyűjtőnéven egész sereg, a matematikai és fizikai-technikai problémák megoldására vonatkozó approximáló eljárást foglalunk össze. Ezeket részben szinguláris viselkedésű pontokkal bíró függvények konvergenciaviszonyainak eldöntésére használjuk, részben sorozatok és konvergens sorok kapcsolatait vizsgáljuk ezek segítségével; talán legfontosabb szerepük azonban az, hogy divergens sorok nagy indexű szeleteinek jó becslésére alkalmasak.

Ezzel kapcsolatban egy nagyon fontos új fogalmat is bevezetünk: az „aszimptotikusan egyenlő” fogalmát.

Függvényekkel kapcsolatban a következő értelemben használjuk ezt a kifejezést:

Az $f(x)$ és a $g(x)$ függvény aszimptotikusan egyenlő egymással az x_0 helyen (ez az x_0 hely jelentheti a $+\infty$ -t, illetve a $-\infty$ -t is), ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Akkor érdekes csak persze ez az állítás, ha a két függvény határértéke az x_0 helyen 0 vagy ∞ . Ekkor az aszimptotikus egyenlőség azt jelenti, hogy egyforma gyorsan tart a két függvény 0-hoz, illetve ∞ -hez.

Hasonlóképp: az $f(x)$ és $g(x)$ függvény aszimptotikusan hasonló az x_0 helyen, ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a \neq 0,$$

azaz ha a két függvény hányadosa itt egy 0-tól különböző véges határértékhez tart.

Két sorozat akkor aszimptotikusan egyenlő, ha az azonos indexű elemek hányadosaiból képezett sorozat konvergens és határértéke 1. Ezzel egyszersmind a sorok aszimptotikus egyenlőségét is definiáltuk: a szeleteiből alkotott sorozatok aszimptotikusan egyenlőek.

Hasonlóképp: két sorozat (függetlenül attól, hogy konvergensek-e vagy divergensek) aszimptotikusan hasonló, ha az azonos indexű elemek hányadosából álló sorozat konvergens, és határértéke egy 0-tól különböző szám. Két végtelen sor (függetlenül attól, hogy konvergensek-e vagy nem) akkor aszimptotikusan hasonló, ha azonos indexű szeletei aszimptotikusan hasonlóak. E definíciók alapján a divergens sorokat is tárgyalásaink körébe vonhatjuk. Egy divergens sor szeleteiből alkotott sorozat ugyan biztosan divergens, de ha találunk egy olyan sorozatot, amely aszimptotikusan hasonló a szeletek sorozatával, ezzel a végtelen sor szeleteinek nagyságrendjét jól tudjuk jellemezni.*

* Megjegyezzük, hogy ha két sor aszimptotikusan egyenlő, az azonos indexű szeleteik különbségéből alkotott sorozat divergens lehet. Ha azonban ez a különbségsorozatok 0-sorozata, a két sor aszimptotikusan egyenlő. Ezért gyakran nemcsak az azonos indexű szeletek hányadosának, hanem különbségének sorozatát is vizsgáljuk.

Amikor elő kell állítanunk valamely függvénnyel aszimptotikusan egyenlő másik függvényt, ezt természetesen azért tesszük, hogy vizsgálatainkat egyszerűbben végezhessük; tehát a keresett függvénynek lehetőleg egyszerű struktúrájának kell lennie. Ezért lehetőleg

x , illetve $\frac{1}{x}$ hatványaival, illetve polinomjaival hasonlítjuk össze a vizsgált sort. Jelenleg csak azt a két esetet tárgyalhatjuk részletesen — a későbbiekben természetesen a többi esetet is tárgyalni fogja a könyvsorozat — amikor vagy 0 a határérték, vagy pedig a független változó minden határon túl nő. Az első esetben az illető pontban felírt *Taylor*-sor bármelyik szelete aszimptotikusan egyenlő a kérdéses függvénnyel. Természetesen az egyezés annál jobb — amin azt kell értenünk, hogy a két függvény hányadosa annál gyorsabban konvergál az 1-hez — minél magasabb szeletet veszünk figyelembe; viszont annál nehezebben kezelhető a bevezetett új függvény. Ha a kérdéses hely $a \infty$, az $\frac{1}{x}$ hatványai szerint haladó sorfejtés szeleteit használjuk ezekben a problémákban.

Elsősorban a konvergencia és nem konvergencia sorok szeleteinek aszimptotikájával kívánunk itt foglalkozni. Két eljárást mutatunk be ezzel kapcsolatban. Mindkét eljárás lényegében a *Mac Laurin*–*Cauchy*-féle integrálkritérium (lásd 2. § a) β) 23. feladatát) — elég messze fekvő — általánosítása. Maga a *Mac Laurin*–*Cauchy*-féle integrálkritérium is alkalmas volt elég jó becslésekre (lásd pl. 4. § a) γ) 1. feladatát), alkalmazási köre azonban mostani problémáinkra túl szűknek bizonyul. Ezért szükséges, hogy általánosításait: az *Euler*- és az *Euler*–*Mac Laurin*-féle összegképletet megismerjük; ezeket, továbbá alkalmazásaikat a feladatok között mutatjuk be.

Példák és feladatok

b)

1. Legyen $f(x)$ $(2k+1)$ -szer folytonosan differenciálható függvény a

$$0 \leq x \leq n$$

(n természetes szám) intervallumban (azaz még $f^{(2k+1)}(x)$ is legyen folytonos a $[0, n]$ szakaszon). Igazoljuk a következő képlet helyességét

$$\begin{aligned} f(0) + f(1) + \dots + f(n) &= \sum_{k=0}^n f(k) = \\ &= \int_0^n f(\xi) d\xi + \frac{f(0) + f(n)}{2} + \frac{B_2}{2!} [f'(n) - f'(0)] + \frac{B_4}{4!} [f^{(3)}(n) - f^{(3)}(0)] + \\ &+ \frac{B_6}{6!} [f^{(5)}(n) - f^{(5)}(0)] + \dots + \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)] + R_{2k+1}, \end{aligned}$$

ahol az R_{2k+1} maradéktagot a következő alakban adhatjuk meg:

$$R_{2k+1} = \int_0^n B_{2k+1}(\xi) f^{(2k+1)}(\xi) d\xi.$$

(*Euler*-féle összegképlet.)

2. Igazoljuk, hogy az *Euler*-féle összegképlet fenti alakja és a maradéktag is helyes, ha nem tesszük fel, hogy $f^{(2k+1)}(x)$ folytonos, csak annyit, hogy $f^{(2k+1)}(x)$ létezik és integrálható a $[0, n]$ intervallumon.

Írjuk fel az *Euler*-képlet azon speciális alakját, amikor $n = 1$.

3. Tekintsük a legfeljebb $2k$ -adfokú $T_{2k}(x)$ polinomot. Igazoljuk, hogy erre fennáll a

$$\begin{aligned} T_{2k}(0) + T_{2k}(1) + \dots + T_{2k}(n) &= \sum_{s=0}^n T_{2k}(s) = \\ &= \int_0^n T_{2k}(\xi) d\xi + \frac{T_{2k}(0) + T_{2k}(n)}{2} + \frac{B_2}{2!} [T_{2k}(n) - T_{2k}(0)] + \dots + \\ &\quad + \frac{B_{2k}}{(2k)!} [T_{2k}^{(2k-1)}(n) - T_{2k}^{(2k-1)}(0)] \end{aligned}$$

egyenlőség, bármilyen természetes számot jelentsen is n .

Az Euler-féle összegképlet mellett gyakran használjuk az aszimptotikus formulák előállítására az ún. *Mac Laurin* összeget is.

4. Tekintsük az $x = x_0$ helyen analitikus

$$y = f(x)$$

függvényt. Az $f(x_0 + Bh)$ szimbólum jelentésével kapcsolatban a *Taylor-sorok* c. kötetre hivatkozunk. Igazoljuk, hogy ha h elegendően kicsiny, akkor fennáll, hogy:

$$\begin{aligned} h \{f'(x_0 + h) + f'(x_0 + 2h) + \dots + f'(x_0 + nh)\} &= h \sum_{s=1}^n f'(x_0 + sh) = \\ &= f(x_0 + nh + Bh) - f(x_0 + nh). \end{aligned}$$

(*Mac Laurin*-féle ún. összegképlet.)

5. A 2. § a) β) 25. feladatban szereplő C ún. *Euler-féle* állandó értékére adjunk becsléseket az *Euler-féle* összegképlet segítségével.

Megoldás: Az $F(x) = \frac{1}{x}$ függvényre alkalmazva az *Euler-féle* összegképletet, $k = 0$ esetén a következőket kapjuk:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \int_1^n \frac{B_1(\xi)}{\xi^2} d\xi;$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \int_1^n \frac{B_1(\xi)}{\xi^2} d\xi.$$

Így tehát

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \int_1^n \frac{B_1(\xi)}{\xi^2} d\xi \right\} = \frac{1}{2} - \int_1^\infty \frac{B_1(\xi)}{\xi^2} d\xi.$$

Ez a C -re adott reláció még csak formális. Ugyanis az *Euler-féle* összegképlet alapján n minden természetes értékére fennáll a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \int_1^n \frac{B_1(\xi)}{\xi^2} d\xi$$

reláció. Az $n \rightarrow \infty$ határátmenet jogossága tehát azon múlik, hogy a jobboldal konvergál-e

Ennek szükséges és elégséges feltétele a képletben szereplő integrál konvergenciája. Az

$$\int_1^{\infty} \frac{B_1(\xi)}{\xi^2} d\xi$$

azonban abszolút konvergens improprius integrál, ti.: $|B_1(x)| \leq 1$ ($-\infty < x < \infty$).

Igen könnyen belátható, hogy $\int_n^{n+1} \frac{B_1(\xi)}{\xi^2} d\xi < 0$. Ugyanis

$$B_1(x) = 2 \left[x - \left(n + \frac{1}{2} \right) \right], \quad \text{ha } n < x < n+1,$$

és így

$$\int_n^{n+1} \frac{B_1(\xi)}{\xi^2} d\xi = 2 \int_n^{n+1} \frac{1}{\xi} d\xi - (2n+1) \int_n^{n+1} \frac{d\xi}{\xi^2} < 0.$$

Ebből az következik, hogy $C > \frac{1}{2}$, továbbá, hogy $\left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right\}$ monoton növekedően tart C -hez. A $k=1$ speciális választás esetében a következőket kapjuk:

$$\sum_{s=1}^n \frac{1}{s} - \ln n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{B_2}{2!} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) - 3! \int_1^n \frac{B_3(\xi)}{\xi^4} d\xi.$$

Ennek alapján tehát:

$$C = \frac{1}{2} + \frac{B_2}{2!} - 3! \int_1^{\infty} \frac{B_3(\xi)}{\xi^4} d\xi.$$

Az

$$\int_n^{n+1} \frac{B_3(\xi)}{\xi^4} d\xi > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

könnyen igazolható relációból következik, hogy

$$\frac{1}{2} < C < \frac{1}{2} + \frac{B_2}{2!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 6} = \frac{7}{12}.$$

$k=2, k=3$ stb. választással további közelítéseket kapunk C -re. $k \rightarrow \infty$ esetben azonban ezen a módon divergens sort kapunk, tehát ez az eljárás C megközelítésére csak bizonyos pontosságig alkalmas.

Ezzel kapcsolatban megjegyezzük, hogy elég gyakori az az eset, amikor divergens végtelen sorok segítségével tudunk közelítő értékeket adni bizonyos keresett értékekhez. Ebből a szempontból az a lényeges különbség a konvergens és az ilyen típusú divergens sorok között, hogy

a) konvergens sor esetén a keresett összeg tetszőleges pontossággal approximál, míg divergens sor esetén a sor valamelyik szelete approximál legjobban, és ennél jobban nem tudjuk megközelíteni magával a sorral a keresett értéket;

b) a divergens sor ilyen approximáló célra is csak akkor használható, ha maradéktaggal van ellátva, azaz meg tudjuk adni, vagy legalább is becsülni tudjuk bármely szelete és a keresett érték közötti eltérést. Az Euler-féle formula általában ilyen divergens sort szolgáltat, a maradéktag exakt. Ilyen esetben a pontosságot a maradéktag megfelelő pontosságú becslésével tetszőlegesen fokozhatjuk.

6. Igazoljuk a Mac Laurin összeg segítségével, hogy

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = C + \ln N + \frac{1}{2N} - \frac{1}{12N^2} + \frac{1}{120N^4} - + \dots$$

ahol azonban a jobb oldalon álló sor N véges értékeire nem konvergens! Nagy N -ekre azonban kicsi a hiba, ha a sornak első néhány tagját vesszük csak figyelembe.

7. a) Igazoljuk, az Euler-féle összegképlet segítségével, hogy

$$n! = n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n} + \frac{B_2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{B_{2k}}{(2k-1)2k} \cdot \frac{1}{n^{2k-1}} + R_k$$

ahol

$$R_k = \vartheta_k(n) \frac{B_{2k+2}}{(2k+1)(2k+2)n^{2k+1}}; \quad 0 < \vartheta_k(n) < 1.$$

b) Igazoljuk továbbá, hogy rögzített k esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\vartheta_k(n) \frac{B_{2k+2}}{(2k+1)(2k+2)n^{2k+1}} \right] = 0.$$

8. Igazoljuk, hogy

$$n! \cong \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{e} \sqrt{n^2 + n + \frac{1}{6} + \frac{1}{120n^2} + \dots} \right)^{n + \frac{1}{2}}.$$

(Itt azonban a gyökjel alatti sor n véges értékeire nem konvergens, tehát a képlet csak aszimptotikus képletként használható.)

9. Határozzuk meg az

$$\left\{ x_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(n-k) - n \cdot \ln n \right\}$$

sorozat viselkedését és adjunk meg aszimptotikus formulát x_n részére.

* \cong szimbólummal a két kifejezés aszimptotikus egyenlőségét jelöltük.

5. §. VÉGTELEN SZORZATOK. FÜGGELÉK

α) A végtelen szorzatokról általában

Bevezetésképpen elsősorban azt jegyezzük meg, hogy a szorzás művelete csak véges számú tényező esetében tekinthető minden további nélkül értelmezettnek. Ha tehát adva van egy $\{t_n\}$ számsorozat, akkor az ennek elemeiből képzett $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot \dots \cdot t_n \cdot \dots$ „szorzatnak”, amelyet röviden így jelölünk:

$$\prod_{n=1}^{\infty} t_n,$$

közvetlenül nem tulajdoníthatunk értelmet. A $\prod_{n=1}^{\infty} t_n$ szimbólumnak a következő definíció ad csak konkrét értelmet: Tekintsük a szorzat részletszorzatainak

$$p_1 = t_1; p_2 = t_1 \cdot t_2; \dots; p_n = t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_n; \dots$$

sorozatát. Amennyiben ez a sorozat konvergens, konvergensnek nevezzük a végtelen szorzatot is (tágabb értelemben), és a részletszorzatok sorozatának határértékét tekintjük a szorzat értékének (tágabb értelemben).

A gyakorlatban a részletszorzatok logaritmusából — azaz a $\log |p_n| = \sum_{k=1}^n \log |t_k|$ összegekből — álló sorozatot szoktuk igen gyakran tekinteni, azaz lényegében a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log |t_k|$$

összeg szeleteiből alkotott sorozatot vizsgáljuk; ezen sorozat határértékéből számítjuk ki azután a szorzat értékét. Minthogy azonban $\ln 0$ nincs értelmezve, ezért egyrészt a 0-val egyenlő tényezőknek különleges szerepet tulajdonítunk, másrészt pedig, ha a részletszorzatok határértéke 0, akkor a logaritmusaikból alkotott sorozat nem konvergálhat. Éppen ezért (szűkebb értelemben) csak akkor tekintjük konvergensnek a végtelen szorzatot, ha véges számú, a „szorzat elején esetleg szereplő” 0-értékű tényező elhagyása után a részletszorzatok sorozatának 0-tól különböző véges határértéke van, ami nyilván ekvivalens azzal, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log |t_n|$$

sor konvergens. (Végtelen soroknál sem zavarja a konvergenciát, ha esetleg véges számú tagja nincs értelmezve; lásd pl. a 2. § a) α) rész bevezetését.) Ezek alapján (szűkebb, illetőleg tulajdonképpeni értelemben) így definiáljuk a végtelen szorzatok konvergensiát, illetve értékét:

A

$$\prod_{n=1}^{\infty} t_n$$

szorzat akkor és csakis akkor konvergens, ha megadható olyan $n = n_0$ index, amelyre a

$$\prod_{n=n_0+1}^{\infty} t_n$$

szorzatnak (ti. az utóbbi szorzat részletszorzatai sorozatának) véges és 0-tól különböző T_{n_0} határértéke van; a szorzat értéke mármost az első n_0 tényező és T_{n_0} szorzatával egyenlő:

$$T = \prod_{n=1}^{\infty} t_n = \prod_{n=1}^{n_0} t_n \cdot T_{n_0}.$$

A feladatok között igazoljuk, hogy egy szorzat (szűkebb értelemben) csak akkor lehet konvergens, ha a tényezők sorozatának határértéke 1. (Ez megfelel a sorok konvergenciájára vonatkozó azon szükséges feltételnek, amely szerint egy sor csak akkor lehet konvergens, ha a tagjaiból álló sorozat határértéke: 0.) Ez az oka annak, hogy a végtelen szorzatok tényezőit inkább ilyen alakban szoktuk felírni:

$$t_n = 1 + a_n \quad (\text{vagy esetleg } t_n = 1 - a_n).$$

Minthogy ilyen felírás mellett az $\{a_n\}$ sorozat elemei határozzák meg a végtelen szorzat tulajdonságait, az $\{a_n\}$ sorozat elemeit a szorzat elemeinek szokták hívni. Így tehát a

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

végtelen szorzat konvergenciájának szükséges (de nem elégséges!) feltétele, hogy elemei 0 sorozatot alkossanak, azaz hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

legyen.

A végtelen szorzatok esetében természetesen szintén a konvergencia kérdésének az eldöntése a fontosabb, éppúgy, mint a végtelen soroknál. Hiszen ha a tekintett szorzat konvergens, értékét jól közelíthetjük valamelyik részletszorzatával. Ha azonban nem konvergens, ez az eljárás tökéletesen hibás. A konvergenciaviszonyok eldöntésére itt is kritériumokat próbálunk megadni. Elsősorban ez az oka annak, hogy itt is külön tárgyaljuk az ún. pozitív elemű szorzatokat. E csoportba azok a szorzatok tartoznak, amelyekben — véges számú tényezőtől ismét eltekintve — a tényezők valamennyien vagy nem kisebbek vagy nem nagyobbak 1-nél, azaz amelyeknél megadható egy olyan $n = n_0$ index, amelyen túl

$$t_n = (1 + a_n) \geq 1; \quad a_n \geq 0, \quad \text{hacsak } n > n_0$$

illetőleg

$$0 < t_n = (1 + a_n) \leq 1; \quad -1 < a_n \leq 0, \quad \text{ha } n > n_0$$

Az utóbbi esetben azonban sokkal célszerűbb a

$$0 < t_n = (1 - a_n) \leq 1; \quad 0 \leq a_n < 1, \quad \text{ha } n > n_0$$

jelölés bevezetése. Így tehát pozitív elemű szorzatokról akkor beszélünk, ha

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n), \quad \text{illetve} \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$$

alakban felírva a szorzatot, megadható egy olyan $n = n_0$ index, amelyen túl érvényes az $1 > a_n \geq 0$, ha $n > n_0$ reláció.

Kiemeljük azonban, hogy míg a soroknál lényegében teljesen azonos módon viselkednek a csak pozitív és a csak negatív tagú összegek (a szeletek sorozatában csak előjelkülönbség van), addig a pozitív elemű

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \text{ szorzat már nem hasonlíthat ennyire a pozitív elemű } \prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$$

szorzathoz, amit már ránézésre is azonnal észrevehetünk.

β) Pozitív elemű szorzatok

Részben konvergencia kritériumokat adunk meg a feladatok között, részben pedig néhány egyszerűbb típusú szorzat értékét számítjuk ki. Igen egyszerű konvergenciakritériumot tudunk ugyanis megadni a pozitív elemű szorzatokkal kapcsolatban, amelynek segítségével a konvergenciavizsgálatokat teljesen a 2. § a) β) részben megismert vizsgálatokra vezethetjük vissza:

$$\text{A pozitív elemű } \prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n), \text{ illetőleg a pozitív elemű } \prod_{n=0}^{\infty} (1 - b_n)$$

szorzat akkor és csakis akkor konvergál (szorosabb értelemben), ha a pozitív tagú

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \text{ illetve } \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ sor konvergens.}$$

γ) Általános szorzatok, abszolút és feltételes konvergencia Műveletek szorzatokkal

Általános szorzatról akkor beszélünk, ha a szorzatnak végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív tagja is van. A szorzatot ilyen esetben mindig

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$$

alakban írjuk fel; ilyenkor tehát végtelen sok n -re áll fenn az $a_n > 0$, és végtelen sok k -ra az $a_k < 0$ reláció.

A Bolzano – Cauchy-féle általános konvergenciakritériumnak a következő kritérium felel meg: A

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$$

szorzat akkor és csakis akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható egy olyan $n_0 = n_0(\varepsilon)$ index, amelyre az $|(1 + a_n)(1 + a_{n+1}) \dots (1 + a_{n+k}) - 1| < \varepsilon$ reláció minden k természetes szám mellett fennáll, ha csak $n \geq n_0$.

Az általános szorzatokkal kapcsolatban van egy nagyon egyszerű konvergenciakritérium, amely divergens szorzatok esetén egyszersmind aszimptotika-keresésre is alkal-

mas. Bizonyítására a feladatok között térünk ki. Tekintsük a

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$$

szorzatot, és tegyük fel, hogy $a_n \neq -1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) és a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

sor konvergens. Ekkor a szorzat részletszorzatainak $\left\{ p_n^* = \prod_{k=0}^n (1 + a_k) \right\}$ sorozata aszimptotika-

totikusan hasonló a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor szeletei segítségével felírt

$$\left\{ e^{s_n} = e^{\sum_{k=0}^n a_k} \right\}$$

sorozatához, azaz jelben $p_n \sim e^{s_n}$, függetlenül attól, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ szorzat konvergens-e.

Néhány további, kevésbé általánosan használható konvergenciakritériumot is megadunk a feladatok között.

A

$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$ szorzatot abszolút konvergensnek nevezzük, ha a $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + |a_n|)$

szorzat konvergens. Az abszolút konvergenciának pontosan ugyanaz a jelentősége, mint a soroknál a hasonló fogalomnak. Ezt az alábbi három tétel fejezi ki:

Ha egy szorzat abszolút konvergens, akkor egyszersmind konvergens is.

Abszolút konvergens szorzatban a tényezők tetszőlegesen átrendezhetők (átrendezésen ugyanazt értjük, mint soroknál) anélkül, hogy a konvergenciaviszonyokon vagy a szorzat értékén ezzel változtatnánk.

Feltételelesen konvergens szorzatot átrendezhetünk mindig úgy, hogy értéke egy tetszőlegesen adott számmal legyen egyenlő.

A végtelen szorzatokkal kapcsolatban a műveleti szabályok lényegesen egyszerűbbek, mint soroknál.

Végtelen szorzatokban több tényezőt zárójelezéssel egy tényezővé vonhatunk össze illetve az esetleg szereplő zárójeleket elhagyhatjuk (természetesen az $(1 + a_n)$ tényezőt összefogó zárójelet nem!) anélkül, hogy ezzel a szorzat értékét megváltoztatnánk, feltéve, hogy eközben a konvergenciaviszonyokat sem változtattuk meg.

Az összevonással kapcsolatban semmi megjegyezni valónk nincs, minthogy a

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n) \pm \prod_{n=0}^{\infty} (1 + b_n)$$

összeg más alakba akkor sem lenne átirtható, ha csak véges szorzatról lenne szó.

Két konvergens végtelen szorzatot szabad úgy szoroznunk, illetve osztanunk egymással, hogy az azonos indexű tényezőket szorozzuk, illetve osztjuk egymással. Az így kapott szorzat is konvergens lesz, és

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n) \prod_{n=0}^{\infty} (1 + b_n) = \prod_{n=0}^{\infty} [1 + (a_n + b_n + a_n b_n)],$$

illetve

$$\frac{\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)}{\prod_{n=0}^{\infty} (1 + b_n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 + a_n}{1 + b_n} \right) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{a_n - b_n}{1 + b_n} \right).$$

Ez a tétel nem fordítható meg olyan értelemben, hogy pl. a $\prod_{n=0}^{\infty} [1 + (a_n + b_n + a_n b_n)]$

szorzat konvergenciájából nem következik sem a $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$, sem a $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + b_n)$ szorzat konvergenciája.

δ) Függvényszorzatok | A szorzatok elemei természetesen függvényei lehetnek bizonyos változóknak. Ilyen esetben általában a szorzat értéke is függ e változóktól. Az

$$f(x) = \prod_{n=0}^{\infty} [1 + f_n(x)]$$

szorzat értelmezési tartománya, illetve konvergenciatartománya mindazon $x = x_0$ értékek összessége, amelyekre a

$$\prod_{n=0}^{\infty} [1 + f_n(x_0)] \text{ szorzat konvergens, és definíció szerint } f(x_0) = \prod_{n=0}^{\infty} [1 + f_n(x_0)].$$

Itt is felvetődik a kérdés: milyen feltételek mellett cserélhető fel a független változóban elvégzett határátmenetek sorrendje a tényezők számában elvégzett határátmenettel? Elégséges feltételt itt is a függvényszorzat egyenletes konvergenciája jelent.

A

$$\prod_{n=0}^{\infty} [1 + f_n(x)]$$

szorzat akkor és csakis akkor konvergál egyenletesen az $a \leq x \leq b$ intervallumon, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz megadható az $n_0 = n_0(\varepsilon)$ küszöbindex úgy, hogy az

$$| [1 + f_n(x)] [1 + f_{n+1}(x)] \dots [1 + f_{n+k}(x)] - 1 | < \varepsilon$$

reláció k minden természetes értékére és minden, az $[a, b]$ intervallumból választott x helyen fennáll, ha csak már $n \geq n_0$.

(Azért nem a részletsorzatok sorozatának egyenletes konvergenciájára vezetjük vissza a szorzat egyenletes konvergenciájának definícióját, mert a definíció ilyen megfogalmazását a 0-val egyenlő tényezővel és a 0-tól különböző határértékkel kapcsolatos kikötések eléggé körülményessé teszik.)

A következő elégséges kritériumokat adhatjuk meg az egyenletes konvergenciával kapcsolatban:

A

$$\prod_{n=0}^{\infty} [1 + f_n(x)]$$

szorzat egyenletesen konvergál az $a \leq x \leq b$ intervallumon, ha

1. a $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ sor egyenletesen konvergens az $a \leq x \leq b$ intervallumon; vagy

pedig 2. a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^2(x)$ sor is és a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ sor is egyenletesen konvergál az $a \leq x \leq b$ intervallumon; vagy pedig 3. ha megadható egy olyan $\{a_n\}$ sorozat, amelyre fennáll az

$$a_n \geq |f_n(x)|, \text{ ha } a \leq x \leq b \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

egyenlőtlenség és emellett a $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$ szorzat konvergens.

A feladatok között igazoljuk a következő tételeket: Tegyük fel, hogy a

$$\prod_{n=0}^{\infty} [1 + f_n(x)]$$

szorzat egyenletesen konvergens az $a \leq x \leq b$ intervallumon, és ugyanitt a szorzat minden eleme folytonos függvény. Folytonos ekkor az

$$f(x) = \prod_{n=0}^{\infty} [1 + f_n(x)]$$

függvény is az $a \leq x \leq b$ intervallumon.

Ha emellett az $f_n(x)$ függvények valamennyien differenciálhatók az $[a, b]$ intervallumon, és a $\sum_{n=0}^{\infty} |f'_n(x)|$ sor ugyanitt egyenletesen konvergens, akkor az $f(x)$ függvény logaritmikus deriváltja így adható meg:

$$\frac{d}{dx} \ln |f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f'_n(x)}{1 + f_n(x)}.$$

Példák és feladatok

α | Tekintsük a

$$\prod_{n=1}^{\infty} t_n$$

szorzatot. Igazoljuk, hogy e szorzat csak akkor lehet konvergens (szűkebb értelemben), ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1.$$

(A végtelen szorzat konvergenciájának tehát ez szükséges, de nem elégséges feltétele.)

Megoldás: A végtelen szorzat egyes tényezőit a részletszorzatok sorozatával könnyen elő tudjuk állítani:

$$t_n = \frac{t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_{n-1} \cdot t_n}{t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_{n-1}} = \frac{p_n}{p_{n-1}}.$$

A konvergenciakritérium szerint a szorzat csak akkor lehet konvergens, ha legfeljebb véges számú 0-val egyenlő tényezője van, és ezek elhagyása után a részletszorzatok sorozatának határértéke 0-tól különböző véges szám. Ha tehát az n index elég nagy ahhoz, hogy ezen túl már nincs a szorzatban 0-val egyenlő tényező, akkor a $t_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$ reláció a 0-val egyenlő

tényezők elhagyása után értendő, és így a $\frac{p_n}{p_{n-1}}$ hányadosnak van értelme. A konvergenciakritérium alapján (a nullával egyenlő tényezők elhagyása után) a $\{p_n\}$, illetve a $\{p_{n-1}\}$ sorozat konvergens, mindkettőjük határértéke azonos, és egyetlen elemük sem egyenlő nullával.

Az 1. § b) a) részben említett, a sorozatok azonos indexű elemeinek hányadosából álló sorozatra vonatkozó tétel szerint tehát:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} p_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} p_{n-1}} = 1, \text{ q. e. d.}$$

2. Igazoljuk, hogy a

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} t_n$$

szorzat akkor és csakis akkor konvergens (szorosabb értelemben), ha a

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln t_n$$

sor konvergens, továbbá, hogy ez esetben fennáll a

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} t_n = e^{\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln t_n}$$

reláció; itt n_0 olyan küszöbindex, amelyen túl $t_n > 0$, ha $n \geq n_0$.

3. Konvergens-e a

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

szorzat? Ha igen, mi az értéke?

Megoldás: A részletszorzatok sorozatát kell vizsgálnunk. Feladatunk esetében ezeket zárt alakban is elő tudjuk állítani, felhasználva az

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}$$

relációt. Így ugyanis

$$\begin{aligned} p_k &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \\ &= \frac{2-1}{2} \cdot \frac{2+1}{2} \cdot \frac{3-1}{3} \cdot \frac{3+1}{3} \cdots \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+1}{k} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{k}{k-1} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+1}{k} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{k+1}{k} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

Mínthogy a szeletek sorozata konvergens:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2},$$

azért konvergens a szorzat is, és

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

4. Konvergens-e a

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)}\right]$$

szorzat? Ha igen, mi az értéke?

5. Tekintsük a

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{n}\right]$$

szorzatot. Igazoljuk, hogy a szorzat nem konvergens szorosabb értelemben (habár az elemek sorozata 0-sorozat); pontosabban, hogy a szorzat a 0-hoz divergál.

Divergál-e a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

sor is?

6. Tekintsük most a

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

szorzatot. Konvergens-e ez a szorzat? Mi a kapcsolat a

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{és a} \quad \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

azonos indexű részletszorzatai között?

7. Konvergens-e a

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]$$

szorzat? Ha igen, mennyi az értéke?

β

1. Igazoljuk, hogy a

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n), \quad \text{illetve} \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1 - b_n)$$

pozitív elemű szorzatok akkor és csak akkor konvergálnak, ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, illetve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok konvergenssek.

Útbaigazítás: A szorzatok, illetve a megfelelő sorok részletszorzatai, illetve szeletei monoton sorozatot adnak. A feltételek szükséges, illetve elégséges voltának bizonyításakor tehát a részletszorzatok korlátosságából a megfelelő szeletek korlátosságára, illetve megfordítva kell következtetnünk. Ez azonban nem nehéz, ha felhasználjuk az

$$e^{a_n} \geq (1 + a_n), \text{ illetve az } (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

becsléseket, illetve az $(1 + b_n)^{-1} \geq 1 - b_n \geq (1 + 2b_n)^{-1} \left(0 \leq b_n \leq \frac{1}{2} \right)$ egyenlőtlenség-rendszert, amelynek segítségével a második szorzatra vonatkozó vizsgálatok visszavezethetők az elsőre.

2. α milyen értékeinél konvergens a

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^{\alpha}} \right)$$

szorzat?

3. α mely értékeire konvergens a

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha}} \right)$$

szorzat?

4. Igazoljuk, hogy $|x| < 1$ esetében a

$$\prod_{n=0}^{\infty} [1 + x^{(2^n)}]$$

szorzat konvergens. Számítsuk ki az értékét.

Megoldás: A 5. § $\beta)$ 1. feladat alapján biztosan állíthatjuk, hogy a szorzat konvergens. A $\sum_{n=0}^{\infty} x^{(2^n)}$ sort ugyanis bizonyosan majorálja a pozitív tagú és $|x| < 1$ esetén

abszolút konvergens $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ geometriai sor, hiszen annak az előbbi csak bizonyos tagjait tartalmazza (a 2., 4., 8., 16. stb. tagot).

Jelöljük a részletszorzatok sorozatában a k -adik elemet p_k -val:

$$p_k = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \dots [1 + x^{(2^k)}].$$

Ezt zárt alakban is fel tudjuk írni:

$$\begin{aligned} (1 - x)p_k &= (1 - x)(1 + x)(1 + x^2) \dots [1 + x^{(2^k)}] = \\ &= (1 - x^2)(1 + x^2) \dots [1 + x^{(2^k)}] = (1 - x^4)(1 + x^4) \dots [1 + x^{(2^k)}] = \\ &= \dots = [1 - x^{(2^k)}][1 + x^{(2^k)}] = 1 - x^{2^{(k+1)}}. \end{aligned}$$

Ebből

$$p_k = \frac{1 - x^{2^{k+1}}}{1 - x}.$$

A szorzat értéke tehát:

$$\prod_{n=0}^{\infty} [1 + x^{(2^n)}] = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2^{k+1}}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x},$$

hacsak $|x| < 1$.

5. x mely értékeinél konvergens a

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n)$$

szorzat?

6. Konvergálnak-e az alábbi szorzatok, s ha igen, mi az értékük?

$$a) \prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}, \quad b) \prod_{n=2}^{\infty} \left[1 + \frac{2n + 1}{(n^2 - 1)(n + 1)^2} \right], \quad c) \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n} \right].$$

7. Igazoljuk, hogy a

$$\prod_{n=0}^{\infty} \cos^2 x_n$$

szorzat konvergál, ha a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$ sor konvergens.

8. Igazoljuk, hogy a

$$\prod_{n=0}^{\infty} \cos x_n$$

szorzat is konvergens, ha a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$ sor konvergál.

9. Konvergál-e a

$$\prod_{n=0}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^n}$$

szorzat? Ha igen, mi az értéke?

10. Legyen $0 \leq x < y$. Igazoljuk, hogy az

$$\left\{ \frac{x(x+1) \dots (x+n)}{y(y+1) \dots (y+n)} \right\}$$

szorzat divergál, éspedig 0-hoz divergál, bármi legyen is $0 \leq x$, illetve $y > x$ értéke.

11. Tekintsük a pozitív elemű

$$a = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n) \quad \text{és} \quad b = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + b_n) \neq 0$$

konvergens szorzatokat. Igazoljuk, hogy konvergens a

$$\prod_{n=0}^{\infty} [1 + (a_n + b_n + a_n b_n)] \quad \text{és} \quad \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{a_n - b_n}{1 + b_n} \right] \text{ szorzat is, és}$$

$$\prod_{n=0}^{\infty} [1 + (a_n + b_n + a_n b_n)] = ab; \quad \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{a_n - b_n}{1 + b_n} \right] = \frac{a}{b}.$$

12. Tekintsük a pozitív elemű konvergens

$$a = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n); \quad b = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - b_n) \neq 0; \quad c = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - c_n) \neq 0$$

szorzatokat. Igazoljuk, hogy konvergenssek az alábbi szorzatok is, és írjuk fel értéküket:

$$\begin{aligned} \prod_{n=0}^{\infty} [1 + (a_n - b_n - a_n b_n)] & \quad \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{a_n + b_n}{1 - b_n} \right] \\ \prod_{n=0}^{\infty} [1 + (b_n c_n - b_n - c_n)] & \quad \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{c_n - b_n}{1 - c_n} \right] \end{aligned}$$

γ 1. Tekintsük az általános elemű

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$$

szorzatot. Igazoljuk, hogy a szorzat akkor és csakis akkor konvergál, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz megadható az $n_0 = n_0(\varepsilon)$ küszöbszám úgy, hogy bármely k természetes számra érvényes legyen az

$$|(1 + a_n)(1 + a_{n+1}) \cdots (1 + a_{n+k}) - 1| < \varepsilon,$$

hacsak $n \geq n_0$.

2. Tekintsük az általános elemű $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$ szorzatot, és tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ sor konvergens. Igazoljuk, hogy

a) ez esetben a $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$ szorzat akkor és csakis akkor konvergál, ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens;

b) n_0 -val jelölve azt a küszöbindexet, amelyen túl $|a_n| < \frac{1}{2}$, hacsak $n \geq n_0$, továbbá p_n^* -gal a $p_n^* = \prod_{k=n_0}^n (1 + a_k)$ részletszorzatot, s_n^* -gal pedig az $s_n^* = \sum_{k=n_0}^n a_k$ részletösszeget, igazoljuk, hogy es_n^* és p_n^* aszimptotikusan hasonlóak egymáshoz, függetlenül attól, hogy a $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$ szorzat konvergens-e vagy sem.

Megoldás: Elsősorban azt jegyezzük meg, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens voltából következik, hogy van olyan n_0 index, amelyenre a b) részben hivatkoztunk. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ugyanis csak akkor konvergálhat, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 0$, ebből pedig a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ reláció következik, ami biztosítja az n_0 index létezését. A bizonyítás a 6. § c) részben kimondott tételre támaszkodik, amely szerint a

$$\prod_{k=n_0}^{\infty} (1 + a_k) \text{ szorzat akkor és csakis akkor konvergál, ha a } \sum_{k=n_0}^{\infty} \ln(1 + a_k)$$

sor konvergens. Mi az utóbbi sor konvergenciáját vizsgáljuk. Felhasználjuk e célból a 4. § b) α) részben talált

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \dots \quad (-1 < x \leq 1)$$

sorfejtést, illetve ennek Lagrange-maradéktagos alakját:

$$f(x) = \ln(1+x) = x + \frac{\left[\frac{d^2}{dx^2} f(x) \right]_{x=\xi}}{2!} x^2,$$

azaz

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\xi^2)} \quad [-1 < x \leq 1; \xi \in (0, x)]^*.$$

Az $|a_n| < \frac{1}{2}$ feltételből tehát következik a

$$\ln(1+a_n) = a_n + \vartheta_n a_n^2,$$

illetve a

$$-\frac{1}{2! \left(\frac{1}{2}\right)^2} = -2 < \vartheta_n < -\frac{1}{2! \left(\frac{3}{2}\right)^2} = -\frac{2}{9}$$

reláció. Így tehát

$$S_{n_0}^* = \sum_{k=n_0}^{\infty} \ln(1+a_k) = \sum_{k=n_0}^n a_k + \sum_{k=n_0}^n \vartheta_k a_k^2.$$

Mínthogy a $\sum_{k=n_0}^{\infty} \vartheta_k a_k^2$ sor biztosan konvergens a 2. § a) β) 7. feladatban igazolt tétel következtében, azért S_n^* és így a végtelen sor is akkor, és csakis akkor konvergens, ha a $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$

sor konvergens, amit a feladat a) része szerint igazolnunk kellett.

ad b) A

$$p_n^* = e^{\sum_{k=n_0}^n \ln(1+a_k)}$$

reláció közvetlenül belátható. Az előbb levezetett reláció szerint tehát

$$p_n^* = e^{\sum_{k=n_0}^n a_k + \sum_{k=n_0}^n \vartheta_k a_k^2} = e^{\sum_{k=n_0}^n a_k} \cdot e^{\sum_{k=n_0}^n \vartheta_k a_k^2}.$$

Mínthogy pedig $a_n^2 \geq 0$; $-2 < \vartheta_k < -\frac{2}{9}$, azért bizonyosan létezik két olyan nempozitív C_1 és C_2 korlát, hogy

$$C_1 \leq \sum_{k=n_0}^n \vartheta_k a_k^2 \leq C_2 < 0, \quad (\text{ha } n \geq n_0)^2 \quad \text{azaz} \quad e^{C_1} \leq e^{\sum_{k=n_0}^n \vartheta_k a_k^2} \leq e^{C_2}.$$

Ebből pedig már következik, hogy $p_n^* \sim e^{S_n^*}$

* Az ξ szimbólum azt jelenti, hogy az ξ előtt levő érték benne van az ξ után felírt intervallumban.

3. Konstruáljunk egy olyan példát, amely azt mutatja, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergenciája csak akkor szükséges feltétele a $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$ szorzat konvergenciájának, ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ sor valóban konvergál.

4. Általánosítva a 2. feladat tételét, tegyük fel, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} |a_n|^3$ sor konvergens. Igazoljuk, hogy ez esetben a

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$$

szorzat akkor és csakis akkor konvergens, ha a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n - \frac{1}{2} a_n^2 \right)$$

sor konvergál.

Hogyan általánosítható tovább e kritérium? Általánosítható-e a 5. § γ) 2. feladat b) részében közölt tétel is?

5. Igazoljuk, hogy a

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$$

szorzat akkor és csakis akkor abszolút konvergens, ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens

6. Igazoljuk, hogy ha

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$$

szorzat abszolút konvergens, akkor konvergens is.

7. Igazoljuk, hogy az abszolút konvergens

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$$

szorzatot tetszőlegesen átrendezve, a kapott szorzat ismét abszolút konvergens lesz, és értéke megegyezik az eredeti alak értékével.

8. Igazoljuk, hogy a (csak) feltételesen konvergens

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$$

szorzatban mindig átrendezhetők úgy a tényezők, hogy a szorzat abszolút értéke egy előre előírt pozitív számmal legyen egyenlő (ha a 0-val egyenlő tényezőket elhagytuk), illetve átrendezhető divergenssé is.

9. Tekintsük a konvergens

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n) = a; \quad \prod_{n=0}^{\infty} (1 + b_n) = b \neq 0$$

szorzatokat. Igazoljuk, hogy a

$$\prod_{n=0}^{\infty} [1 + (a_n + b_n + a_n b_n)] = a \cdot b \quad \text{és a} \quad \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{a_n - b_n}{1 + b_n}\right) = \frac{a}{b}$$

relációk helyesek.

10. Konvergens-e a

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}}\right]$$

szorzat?

11. Konvergens-e a

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]$$

szorzat?

Megoldás: Minthogy a

$$\sum |a_n|^3 = \sum \frac{1}{n^2}$$

sor konvergens, a 6. § c) γ) 4. feladatban megismert tétel alkalmazható. A

$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} \right]$ sort kell vizsgálnunk tehát. Minthogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ sor a *Leibniz-*

tétel értelmében konvergens, a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n}$ sor viszont divergens, divergens e két sor külön-

sége, a $\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} \right]$ sor, tehát a felírt szorzat is.

12. Konvergens-e az

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{7}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{4}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{9}}\right) \dots$$

szorzat?

13. Konvergens-e a

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{\ln n}\right]$$

szorzat?

Megoldás: Ha két egymást követő tényezőt egyetlen tényezővé zárójelozunk, ezzel a konvergenciaviszonyokat úgy változtattuk meg, hogy az eredeti szorzat részletszorzatainak

sorozatából tulajdonképp csak a páros indexűeket tartottuk meg. Ha ez a sorozat nem konvergens, nem lehet az az eredeti sem. (Ha az így kapott sorozat konvergens, abból általában még nem következik, hogy az eredeti is az; ebben a feladatban azonban következne.)

Ugyanis a páratlan indexű szeletek sorozata egyszerűen $\left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)$ -nel szorozva keletkezik a páros indexű szeletek sorozatából. Ha tehát ez utóbbi konvergens, és határértéke 0-tól különböző, akkor ugyanez igaz a páratlan indexű szeletek sorozatára is. Általában: ha a részletszorzatok sorozatából minden k -adikat kiválasztva, az így kapott sorozatnak 0-tól különböző határértéke van, és az elemek sorozata 0-sorozat, akkor a szorzat konvergens. Igazoljuk ezt!) Tehát:

$$\begin{aligned} \left[\frac{(-1)^n}{\ln n} \right] \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)} \right] &= 1 + (-1)^n \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln n \cdot \ln(n+1)} - \frac{1}{\ln n \cdot \ln(n+1)} = \\ &= 1 + \frac{(-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1}{\ln n \cdot \ln(n+1)}. \end{aligned}$$

Így tehát a következő szorzatot vizsgáljuk:

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{1 - (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n \cdot \ln(n+1)} \right] = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1 - \ln \left(1 + \frac{1}{2k}\right)}{\ln 2k \cdot \ln(2k+1)} \right].$$

Ez a szorzat már pozitív elemű, hiszen $\ln \left(1 + \frac{1}{2k}\right) < \frac{1}{2k}$, ha $k \geq 1$.

Az utóbbi szorzat a 6. § c) β) 1. feladatban igazolt tétel szerint akkor és csakis akkor konvergens, ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \ln \left(1 + \frac{1}{2k}\right)}{\ln 2k \cdot \ln(2k+1)} \text{ konvergens. Minthogy a } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln 2k \cdot \ln(2k+1)}$$

sor divergens, mert a divergens $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor pl. nyilván minorálja, a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{2k}\right)}{\ln(2k+1) \ln 2k} \text{ sor viszont konvergens, mert a konvergens } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k \cdot \ln^2 2k}$$

sor majorálja (1. pl.2. § a) b) 16. feladat), azért a két sor különbsége s így a szorzat összezárójelezett alakja is divergens. De akkor nem lehet konvergens az eredeti szorzat sem.

14. Adjunk aszimptotikát a

$$\left\{ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right\}$$

sorozatra, a 6. § c) γ) 2. feladata alapján.

15. Tekintsük az

$$\left\{ n^{-x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) \right\}$$

sorozatot. Igazoljuk, hogy x bármely értékénél konvergál e sorozat.

16. Tekintsük a

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left[1 + (-1)^{k-1} \frac{1}{k\alpha - 1} \right]$$

szorzatot tetszőleges, valós α mellett, amelynek a reciproka azonban nem természetes szám, de véges mennyiség.

Konvergál-e a szorzat?

δ

1. Igazoljuk, hogy a

$$\prod_{n=0}^{\infty} [1 + f_n(x)]$$

függvényszorzat egyenletesen konvergál az $a \leq x \leq b$ intervallumon, ha ugyanitt a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$$

sor egyenletesen konvergens.

2. Az 1. feladatban szereplő $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ sor egyenletes konvergenciájára vonatkozó

kikötést felcserélve a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ sor egyenletes konvergenciájára vonatkozó kikötéssel, az így kapott „tétel” változatlanul helyes, vagy pedig már nem elégséges, hanem szükséges feltételt mond ki a szorzat egyenletes konvergenciájára, vagy pedig teljesen hibás?

3. Igazoljuk, hogy az $a \leq x \leq b$ szakaszon bizonyosan egyenletesen konvergál a

$$\prod_{n=0}^{\infty} [1 + f_n(x)] \text{ függvényszorzat, ha}$$

a) található egy olyan $\{a_n\}$ számsorozat, amellyel a $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$ szorzatot képezve, az konvergál, és emellett az $|f_n(x)| \leq a_n$, ha $a \leq x \leq b$ egyenlőtlenség n minden értékére (l:gfeljebb végés számú kivételtől eltekintve) fennáll: vagy pedig, ha

b) ugyanitt a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^2(x)$ és a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ sorok is egyenletesen konvergálnak.

4. Tekintsük az $a \leq x \leq b$ intervallumon egyenletesen konvergens

$$f(x) = \prod_{n=0}^{\infty} [1 + f_n(x)]$$

függvényszorzatot, és tegyük fel, hogy az $a \leq x \leq b$ intervallumon minden $f_n(x)$ függvényelem folytonos. Igazoljuk, hogy ekkor az $f(x)$ függvény is folytonos az $a \leq x \leq b$ intervallumon.

5. Megtartva a 4. feladat jelöléseit és premisszáit, tegyük fel még, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n'(x)|$ sor is egyenletesen konvergens az $a \leq x \leq b$ intervallumon, és hogy minden $f_n(x)$ függvényelem differenciálható az $a \leq x \leq b$ intervallum minden pontján (az utóbbi kikötés szükséges, mert a $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n'(x)|$ konvergenciáját — a definíció szerint — nem zavarja,

ha véges számú tagja nincs értelmezve, vagy végtelenhez tart valamely pontban). Igazoljuk, hogy ez esetben létezik az $f(x)$ függvény logaritmikus deriváltja is az $[a, b]$ intervallumon, és így írható fel:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n'(x)}{1 + f(x)}, \quad (\text{ha } a \leq x \leq b).$$

6. x mely értékeire konvergens a

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right), \quad \text{a} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right), \quad \text{illetve a} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n x}{n}\right]$$

szorzat? Mely x -értékekre abszolút a konvergencia? Milyen tartományokon egyenletes a konvergencia?

7. Mely x értékekre konvergens, mely értékekre abszolút konvergens és milyen intervallumokon egyenletesen konvergens a

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n); \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n), \quad \text{illetve a} \quad \prod_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)^n x^n]$$

szorzat?

8. Tekintsük a

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n}$$

illetőleg a

$$\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n}$$

szorzatot. Mely x értékekre konvergál a szorzat, x mely értékeinél abszolút a konvergencia, és mely intervallumokon egyenletes?

Milyen függvényt állít elő az első, illetve a második szorzat?

9. Igazoljuk, hogy a

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

szorzat x minden értékére abszolút konvergens, és a $-\infty < x < \infty$ intervallumon egyenletesen konvergál.

10. Állapítsuk meg a

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

szorzat értékét.

Megoldás: Ha egy szorzatfüggvényt zárt alakban kell előállítanunk, és közvetlenül nem látunk lehetőséget a részletszorzatok előállítására, leghelyesebb differenciálással – a 5. § 8) 5. feladata alapján – végtelen sorra visszavezetnünk a problémát; általában ugyanis könnyebben boldogulunk a függvénytörök összegfüggvényének megállapításával, mint a szorzatok értékének megadásával. Ha tehát $f(x)$ -szel jelöljük a szorzatfüggvényt, (amely a 9. feladat értelmében folytonos a $-\infty < x < \infty$ intervallumon), azaz bevezetjük az

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

jelölést, könnyen megállapíthatjuk, hogy $f(x)$ logaritmikus differenciálhányadosa mindenütt létezik, minthogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f'_n(x)| = |-2| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2}$$

egyenletesen konvergens a $-\infty < x < \infty$ intervallumon.* Így tehát

$$\frac{d}{dx} \ln |f(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{2x}{n^2}}{1 - \frac{x^2}{n^2}} = 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2}.$$

A sorra nézve eszünkbe fog jutni, hogy a *Bernoulli*-polinomokkal kapcsolatos sorfejtésekben találtunk ilyen típusú sorokat; pontosabban a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor összegét közvetlenül ki tudtuk számítani a *Bernoulli*-polinomok *Fourier*-sorfejtése alapján (1. a 3. § b) γ) részt), a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}$ alakú sorok összegét pedig a 4. § a) γ) 8. feladatában, x ctg x -re felírt sorfejtés segítségével tudjuk kiszámítani. A kérdéses példában azt találtuk, hogy

$$y \operatorname{ctg} y = 1 + 2 \left(\frac{y}{\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{y}{\pi} \right)^2 - n^2}.$$

Ebből a kapcsolatból a keresett $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2}$ összeget az $x = \frac{y}{\pi}$ helyettesítéssel kapjuk.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2} = \frac{\pi x \operatorname{ctg} \pi x - 1}{2x^2},$$

azaz

$$2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2} = \frac{\pi x \operatorname{ctg} \pi x - 1}{x} = \pi \operatorname{ctg} \pi x - \frac{1}{x}.$$

Így tehát

$$\frac{d}{dx} \{ \ln |f(x)| \} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \pi \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} - \frac{1}{x}.$$

Mindkét oldalon integrálva

$$\ln |f(x)| = \ln |\sin \pi x| - \ln |x| + \ln C = \ln \left| C \frac{\sin \pi x}{x} \right|. \quad f(x) = \frac{C}{x} \sin \pi x.$$

A C állandó értékét legegyszerűbben az $x \rightarrow 0$ határátmenettel számíthatjuk. Minthogy $f(x)$ folytonos függvény, azért

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \prod_{n=1}^{\infty} 1 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} C \frac{\sin \pi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} C \pi \frac{\sin \pi x}{\pi x} = C \pi.$$

Így tehát a $C \pi = 1$ egyenlet adódik, amelyből $C = \frac{1}{\pi}$.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}.$$

* Pontosabban ennek bármely zárt részintervallumán.

11. Írjuk fel a 5. § γ) 9. és a 5. § δ) 10. feladatok eredményeinek felhasználásával az

$$y = \cos \pi x$$

függvényt végtelen szorzat alakjában.

12. A 5. § γ) 9., a 5 § δ) 10. és 11. feladatok eredményeinek felhasználásával írjuk fel végtelen szorzat alakjában az

$$y = \operatorname{tg} \pi x$$

függvényt.

13. Mely tartományokban egyenletesen konvergens a

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4x^2}{\pi^2 (2n-1)^2} \right), \text{ illetve a } \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2 n^2} \right)$$

szorzat? Meg tudjuk-e adni zárt alakban az értéküket?

EREDMÉNYTÁR

1. §. SZÁMSOROZATOK

a)

2. $\sqrt{15} \approx 3,87298.$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \approx 4,79.$

Azt, hogy a differenciasorozat 0-sorozat, legegyszerűbben a következőképp láthatjuk be:

$$\begin{aligned} y_n &\equiv y_{n+1} \equiv x_{n+1} \equiv x_n \text{ és így } d_n = y_n - x_n \equiv y_n - x_{n-1} = \\ &= \frac{y_{n-1} + x_{n-1}}{2} - x_{n-1} = \frac{y_{n-1} - x_{n-1}}{2} = \frac{1}{2} d_{n-1}; \end{aligned}$$

azaz

$$0 \leq d_n \leq \frac{1}{2} d_{n-1} \leq \frac{1}{4} d_{n-2} \leq \dots \leq \frac{1}{2^{n-1}} d_1 = \frac{2^2}{2^{n-1}} = \frac{8}{2^n} \rightarrow 0.$$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \approx 6,934.$

6. Elsősorban azt kell igazolnunk, hogy $0 < a < 1$ és racionális x értékek esetén (egyelőre csak ilyenekre van értelmezve az a^x kifejezés)

$$a^{x_1} < a^{x_2}, \text{ ha } x_1 > x_2,$$

és hasonlóképpen $1 < a < \infty$ esetén

$$a^{x_1} > a^{x_2}, \text{ ha } x_1 > x_2.$$

Ezután azt kell igazolnunk, hogy található az $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ illetve $x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \dots$ racionális számoknak egy-egy olyan sorozata, amelyekkel az $a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \dots, a^{x_n}, \dots$ sorozat egyrészről, az $a^{x'_1}, a^{x'_2}, \dots, a^{x'_n}, \dots$ sorozat másrészről intervallumskatulyázást képeznek — amelyeknek magja b . Ha egyszersmind az $\{x_n\}$ és $\{x'_n\}$ sorozatok is intervallumskatulyázást képeznek (ezt kell tulajdonképpen igazolnunk) x maggal, akkor valóban $a^x = b$.

7. a) $\sqrt[2]{2} \approx 1,63;$ b) $4,7^{\sqrt{10}} \approx 133,46$ c) $3^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \approx 2,18$

b)

α 1. Valamennyi tételt a Cauchy-kritérium felhasználásával igazolhatjuk. Azt kell csak meggondolnunk, hogy ha $\{j_n\}$ egy, a természetes számokból álló tetszőleges sorozat, amelyben a természetes számok legfeljebb egyszer szerepelnek, k pedig

egy tetszőleges természetes szám, akkor mindig megadható egy olyan $n_0 = n_0(k)$ index, hogy a

$$j_{n_0+1}; j_{n_0+2}; j_{n_0+3}; \dots$$

sorozatban már nem fordul elő k -nál kisebb szám. Ez utóbbi tény bizonyítása pedig azon alapul, hogy véges számú szám között mindig van legnagyobb. Ha tehát az 1-es szám az n_1 -edik elem (ha az 1-es nem szerepel, akkor $n_1 = 0$), a 2-es szám az n_2 -edik elem a sorozatban stb., akkor az

$$n_0 \equiv \max \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$$

választás megfelel.

3. A 2. feladat alapján intervallumskatulyázással és az exponenciális függvény monotonitásának felhasználásával igazolható.

6. Az $a^{\frac{1}{n}} = b$ helyettesítéssel visszavezethető az 1. § b) α) 5. feladatban igazolt tételre. (L. az 1. § b) α) 7. feladatot is!)

8. Lásd az 1. § b) α) 5., 6. és 7. feladatot.

10. a) Tekintsük az $\{k^n\}$ sorozatot. Mínt hogy $k^n = 1 + x_n$ és $x_n \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$, továbbá az $y = k^x$ függvény folytonos az $x = 0$ hely környezetében, következik az állítás.

b) Tekintsük a $\{(b_n + 1)^{1/n}\}$ sorozatot.

c) Gondoljuk meg, hogy a p^x függvény folytonos az $x = 0$ hely környezetében.

12. Az 1. § a) α) 11. feladat mintájára járhatunk el.

13. A Cauchy-kritériumot használhatjuk fel, vagy a konvergencia definícióját magát.

14. Járjunk el az 1. § a) α) 11., 12. feladatokban ismertetett módon.

15. Ugyanez lehet a módszer, mint amelyet az 1. § a) α) 7. feladatban ismertünk meg.

16. a), b) és c) Lásd az 1. § a) α) 14. feladatot.

17. a) és b) Lásd az 1. § a) α) 14., 16. feladatot.

18. Használjuk fel az $(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ relációt;

20. Hogy a $\left\{ \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right\}$, illetve az $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}$ sorozat 0-sorozat, az eddigiek alapján könnyen igazolható. De akkor különbségsorozatuk is az.

β) 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1$. Meghatározhatjuk azonban az 1. § b) β) 3. feladat mintájára, függvénytanai segédeszközök nélkül is a határértéket.

2.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{1}{n} = 1.$$

4.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{b_n} - 1) = \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) = \ln b, \quad \text{ha } b \neq 0.$$

Igazolása az 1. § b) β) 3. feladatban bemutatott második módszer alapján történhet. Ugyanígy mutatható ki, hogy a reláció megfordítható, azaz, ha $\{x_n\}$ sorozat konvergens,

a $\{b_n\}$ sorozat is konvergál, éspedig az $e^{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$ értékhez.

9.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{y}{n} + \lambda \sin \frac{y}{n} \right)^n = e^{\lambda y}.$$

10. A sorozat konvergens.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x^n}{\sqrt[n]{n}} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

12 Műszaki matematikai gyakorlatok — 44231/Vl.

γ 3. A sorozat $-1 < a \leq \frac{1}{4}$ esetén konvergál, és pedig: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a}$.

$a \leq -1$ esetén van ugyan az $x = a + x^2$ egyenletnek két gyöke, de a sorozat már nem konvergál. Mindezt az 1. § b) γ) 1. feladata alapján is könnyen megállapíthatjuk.

4. Végezzük el az $x_n = \sin^2 2t_n$ helyettesítést. Így könnyen megállapíthatjuk, hogy $t_0 \neq \frac{\pi}{3}$ esetén a $t = 0$ értékhez, $t_0 = \frac{\pi}{3}$ esetén a $t = \frac{\pi}{3}$ értékhez konvergál a sorozat.

A $[0, 1]$ intervallumból választva tehát az x_0 értékét:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_0 = 0, \text{ ha } x_0 \neq \frac{3}{4}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_n = x_0 = \frac{3}{4}, \text{ ha } x_0 = \frac{3}{4}.$$

5. A sorozat $-\frac{1}{4} \leq a$ esetén konvergál. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$.

6. A sorozat $a > 0$ esetben konvergál, és pedig $\lim_{n \rightarrow \infty} x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$.

7. A sorozat akkor és csakis akkor konvergens, ha $\frac{1}{e^e} \leq x_0 \leq e^{\frac{1}{e}}$.

Ezt pl. az 1. § b) γ) 1. feladatban igazoltak alapján tudjuk megmutatni. Speciálisan:

$$x_0 = \sqrt{2} \text{ esetében } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2; \quad x_0 = 1,3 \text{ esetében } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \approx 1,472.$$

8. Akkor és csakis akkor konvergál a sorozat, ha $a \geq 0$ és $q > 0$. Határértéke: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt{a}$.

9. A sorozat akkor és csakis akkor konvergál, ha $b \neq 0$;

$$\text{és pedig: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} +1, & \text{ha } a \cdot b > 0 \\ -1, & \text{ha } a \cdot b < 0 \\ 0, & \text{ha } a \cdot b = 0 \text{ és } b \neq 0. \end{cases}$$

10. a) A sorozat csak $k \geq -\frac{1}{4}$ esetében lehet konvergens, és pedig ha $k \geq 0$, akkor minden $l > -1$ értéknél konvergál a sorozat, $-\frac{1}{4} \leq k < 0$ esetén pedig akkor, ha $l \geq -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + k}$. A határérték:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + k}, & \text{ha } \begin{cases} k \geq 0 \text{ és } l > -1 \\ 0 > k \geq -\frac{1}{4} \text{ és } l > -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + k} \end{cases} \\ -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + k}, & \text{ha } k \geq -\frac{1}{4} \text{ és } l = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + k}. \end{cases}$$

b) $k < -\frac{1}{4}$ esetén nem konvergál a sorozat. Ha $-\frac{1}{4} \leq k \leq 0$, akkor l minden 0-tól, illetve az alábbi Z_n sorozat minden elemétől különböző értékénél konvergál a sorozat, és pedig a $-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + k}$ értékhez.

$k \geq 0$ esetén szintén a $-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + k}$ értékhez konvergál a sorozat l bármilyen értékénél, kivéve, ha $l = 0$, vagy pedig ha l értéke az alábbi sorozat bármely elemének értékével egyezik:

$$z_0 = k; \quad z_1 = \frac{k}{1+k}; \quad z_2 = \frac{k}{1+z_1}; \dots; \quad z_{n+1} = \frac{k}{1+z_n}; \dots \text{ Azaz}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + k}, \quad \text{ha} \quad -\frac{1}{4} \leq k \quad \text{és} \quad l \neq 0; \quad l \neq z_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

11. A sorozat a_0 minden olyan értékénél konvergál, és pedig az 1 értékhez, amely különbözik 0-tól, illetve az alábbi $\{v_n\}$ sorozat bármely elemétől:

$$v_0 = \frac{1}{2}; \quad v_1 = \frac{2}{3}; \dots; \quad v_{n+1} = \frac{1}{2 - v_n}; \dots$$

azaz, ha $a_0 \neq v_n (n = 0, 1, 2, \dots)$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

13. $\sqrt{10} \approx 3,1623$.

14. Az 1. § b) γ) 1. feladata alapján azt mondhatjuk, hogy a konvergencia sebességére a q értéke jellemző. Ennek alapján becsülhető pl. a két sorozat konvergenciája.

15. x bármely értékénél konvergens a sorozat; $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

16. Az $x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$ legkisebb pozitív gyöke 4 értékes jegyre pontosan: $x_0 \approx 1,166$.

17. $x_{1,2} \approx \pm 1,8955$. 18. $x_1 \approx -1,842$; $x_2 \approx 1,147$.

δ | 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p - 1$. 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\lambda y}$.

c)

α | 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{1}{4}$. 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e$. 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

8. A sorozat konvergens, határértéke: $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{9}$.

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \sqrt[k]{a_1 a_2 a_3 \dots a_k}$. Célszerű a következő átalakítást felhasználni:

$$c_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \dots + \sqrt[n]{a_k}}{k} \right)^n = \left\{ \frac{1}{k} \left[n(\sqrt[n]{a_1} - 1) + n(\sqrt[n]{a_2} - 1) + \dots + n(\sqrt[n]{a_k} - 1) + nk \right] \frac{1}{n} \right\}^n = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{n(\sqrt[n]{a_1} - 1) + \dots + n(\sqrt[n]{a_k} - 1)}{k} \right\}^n$$

11. A sorozat konvergens; $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{2}$. 12. A sorozat konvergens; $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\frac{1}{3}$.

13. Konvergens; $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{3}$.

14. Az $\{a_n\}$ sorozat konvergens, a $\{b_n\}$ sorozat határozottan divergál; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

15. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\frac{1}{4}$.

18. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

19. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e$

20. $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = e^{\frac{8}{2}}$.

21. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right] = -\frac{e}{2}$. Ezt pl. így mutathatjuk ki:

Az A. II. kötet 10. §-ában igazoltuk, hogy az

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\} \text{ és az } \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right\}$$

sorozatok intervallumskatulyázást képeznek. Tekintsük most általában az

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\varepsilon} \right\} \quad (0 \leq \varepsilon \leq 1)$$

sorozatokat. Könnyen kimutatható, hogy bármely

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\varepsilon_1} \right\} \text{ és } \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\varepsilon_2} \right\}$$

sorozatpár intervallumskatulyázást képez, ha $0 \leq \varepsilon_1 \leq \frac{1}{2}$, illetve $\frac{1}{2} < \varepsilon_2 \leq 1$ és n

már elég nagy. Ez annyit jelent, hogy az $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}+\varepsilon} \right\}$ sorozat még felülről, de az

$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \right\}$ sorozat — elég nagy n -eket tekintve — már alulról közelíti az e számot, ha $0 < \varepsilon$. Így

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \right| < \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right| < \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}+\varepsilon} \right|$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) < \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right) < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right),$$

ha n már elég nagy. Mivel pedig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \right] = -\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right] = -\frac{1}{2}.$$

állításunk ebből azonnal adódik.

22. A sorozat konvergens, határértéke: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{4}$.

β 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1 - \cos \alpha \pi}{\alpha \pi} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha \pi}{2}}{\alpha \pi}$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a^2 + a + \frac{1}{3}$.

5. A sorozat konvergens, határértéke: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2p+1}{p+1}$.

6. A sorozat konvergens, határértéke: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{\pi}{2}$.
7. A sorozat konvergens, határértéke: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{2}{\pi}$.
8. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \frac{1}{e} \left(\frac{b^b}{a^a} \right)^{\frac{1}{b-a}}$. Célszerű először a $\{\ln g_n\}$ sorozat határértékét számítani.
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$. Célszerű először az $\left\{ \frac{1}{h_n} \right\}$ sorozat határértékét számítani.

γ 2. Tekintsük először az $\{x_n - x\}$ 0-sorozatot; gondoljuk meg, hogy

$$\frac{x_1 - x + x_2 - x + \dots + x_n - x}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - \frac{nx}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - x.$$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

4. Ha az $\{\ln y_n\}$ sorozatot tekintjük, alkalmazható az 1. § c) γ) 1.-ben kimondott tétel.

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \frac{1}{e}$.

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \ln 2$.

9. A sorozat konvergens, határértéke: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

12. Igazolnunk kell, hogy az $a_{\mu\nu} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu + \dots + \alpha_\mu}$ számok kielégítik a Toeplitz-tétel feltételeit.

13. A b) alatti tétel visszavezethető a 12. feladatban igazolt tételre, az a) alatti viszont a b) alattira, vagy megfordítva is.

15. A sorozat konvergens. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$.

17. Az 1. § c) γ) 4. feladatban igazolt tételt célszerű felhasználni.

18. Az $\{x_n\}$ sorozat nem konvergens, mert $x_{2n} = q$; $x_{2n+1} = p$ és $p \neq q$. Az $\{y_n\}$ sorozat konvergens; $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt{p \cdot q}$.

20. A sorozat konvergens, határértéke: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4.$$

21. A sorozat konvergens, határértéke: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt{(n+1)(n+2) \dots 2n} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)(n+3) \dots 2n}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2) \dots 2n}{n(n+1) \dots (2n-2)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(2n-1)}{n(n-1)} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = \frac{4}{e}.$$

22. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. (A Cauchy-tétel alapján.)
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. (Az 1. § c) γ) 12. feladat tétele szerint.)
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$. (Visszavezethető a 21. feladat b) relációjára.)
23. A sorozat konvergens, határértéke: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ 24. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{4}{e}$
25. A sorozat konvergens, határértéke: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 26. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{a+1}$.
27. Konvergens mindhárom sorozat.
- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{3}$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{2}{3}$
28. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a+n}{n} = 1$.
29. Minden olyan esetben, ha b nem egyenlő egy negatív egész számmal, konvergens a sorozat.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } a \text{ sem egyenlő egy negatív egész számmal,} \\ 0, & \text{ha } a \text{ egyenlő egy negatív egész számmal.} \end{cases}$
30. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \begin{cases} \frac{2^{1-p} - 1}{1-p}, & \text{ha } p \neq 1, \\ \ln 2, & \text{ha } p = 1. \end{cases}$
31. A sorozat a $p \neq 1$ esetben konvergál; éspedig, ha $p \neq 1$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{1 - 2^{-p}}{2}$.
 $p = 1$ esetben v_n nincs értelmezve n egyetlen értékére sem. Ha azonban az $n \frac{2^{1-p} - 1}{p - 1}$ kifejezést $p = 1$ esetben a $\lim_{p \rightarrow 1} n \frac{2^{1-p} - 1}{p - 1}$ értékkel helyettesítjük, akkor p minden értékére
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{1 - 2^{-p}}{2}.$$

d)

2. $\overline{\lim} a_n = 4$; $\underline{\lim} a_n = -2$. 3. $\underline{\lim} b_n = \frac{1}{e}$; $\overline{\lim} b_n = e$.
4. $\underline{\lim} a_n = -1$; $\overline{\lim} a_n = 1$.
- a) $\underline{\lim} b_n = \overline{\lim} b_n = +\infty$. e) $\underline{\lim} b_n = -1$; $\overline{\lim} b_n = 1$.
- b) $\underline{\lim} b_n = -\infty$; $\overline{\lim} b_n = +\infty$. f) $\underline{\lim} b_n = \overline{\lim} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.
- c) $\underline{\lim} b_n = \overline{\lim} b_n = -\infty$. g) $\underline{\lim} b_n = a$; $\overline{\lim} b_n = +\infty$.
- d) $\underline{\lim} b_n = -\infty$; $\overline{\lim} b_n = +\infty$. h) $\underline{\lim} b_n = a-1$; $\overline{\lim} b_n = a+1$.
6. A reláció az e^x függvény folytonosságából és a \lim definíciójából következik.

9. Az egyenlőtlenség középső része triviális, bal és jobb oldala ugyanazon gondolatmenet alapján igazolható. Ha pl. a $\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} = A$; $\overline{\lim} \frac{|x_n + 1|}{|x_n|} = B$ jelölést bevezetjük, akkor csak $B < \infty$ esetén van „bizonyítani valónk”. Ha $B < \infty$, akkor a $\overline{\lim}$ definíciója alapján bármely ε -hoz megadható olyan $\nu = \nu(\varepsilon)$ hogy

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leq B + \varepsilon, \text{ ha csak } n \geq \nu.$$

Ezen egyenlőséget felírva az $n = \nu$; $\nu + 1$; $\nu + 2$; ...; $\nu + p - 1$ -re és összeszorozva majd átszorozva:

$$|x_{\nu+p}| \leq |x_\nu| (B + \varepsilon)^p, \quad \sqrt[\nu+p]{|x_{\nu+p}|} \leq (B + \varepsilon) \cdot \sqrt[\nu]{\frac{|x_\nu|}{(B + \varepsilon)^\nu}}.$$

Mínthogy az utóbbi egyenlőtlenségben $\varepsilon > 0$ megadása után ν is rögzített, azért

$$\sqrt[\nu+p]{\frac{|x_\nu|}{(B + \varepsilon)^\nu}} \rightarrow 1, \text{ ha } p \rightarrow \infty. \text{ Ebből pedig már következik, hogy } \overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} \leq (B + \varepsilon)$$

azaz, minthogy ε tetszőlegesen kicsiny lehet: $\overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|} \leq B$, q. e. d.

2. §. VÉGTELEN SOROK KONVERGENCIA-KRITÉRIUMAI. MŰVELETEK SOROKKAL

a)

α | 2. A $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ sor konvergens, hiszen n -edik szelete:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n+1} < 2.$$

3. A sor divergens, mert a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor, mint az 1. feladatban láttuk, divergens.

4. A q kvóciensű geometriai sor akkor és csak akkor konvergál, ha $|q| < 1$. Ebből az általunk felírt sor úgy keletkezett, hogy véges számú tagot változtattunk meg, tehát ez is konvergens, ha $|q| < 1$, de divergens, ha $|q| \geq 1$.

5. A sor konvergens, minthogy $\cos(2n+1)\pi = -1$, a $\sum \frac{1}{n^2}$ sor pedig konvergens (2. § a) α) 2. feladat).

6. A sor konvergens.

7. A csokoládé tényleges árát így számíthatjuk ki: 10 Ft-ért kaptunk egy csokoládét és egy bont. A bon $\frac{1}{10}$ csokoládé és $\frac{1}{10}$ bon ellenértéke stb. 10 Ft-ért tehát összesen

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

tábla csokoládét kapunk, egy tábla csokoládé ára tehát ténylegesen csak $\frac{9}{10} \cdot 10 = 9$ Ft.

Az ügyes vásárló kér 10 tábla csokoládét, 9-et kifizet (90 Ft), a tizediket pedig a 10 táblából kivett 10 bonnal fizeti, azaz valóban 9 Ft-ot fizet egy tábláért.

8. A csokoládé tényleges ára: $\frac{980}{11}$ Ft. Az ügyes vásárló kér 50 tábla kisbonos és 5 tábla nagybonos csokoládét. 49 tábla kisbonos csokoládét kifizet (4900 Ft) az 50 darab kisbonnal kifizeti az 5 nagybonos táblát, az 5 nagybonnal pedig az 50-edik kisbonos táblát. Az 55 tábláért 4900 Ft-ot fizet, azaz egy táblát épp $\frac{4900}{55} = \frac{980}{11}$ Ft-ért vásárol.

β | 4. A sort a konvergens $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-n}$ sor majorálja (ezt pedig pl. a konvergens $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ sor), s így a $\sum_{z=1}^{\infty} e^{-z} \cdot \ln \left[1 + \frac{1}{z} \right]^{z^2}$ sor is konvergens.

6. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(1+p)(2+p)\dots(n+p)}{q(1+q)(2+q)\dots(n+q)}$ sor akkor és csakis akkor konvergál, ha q nem egyenlő valamely negatív egész számmal és $q > p + 1$.

8. A $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+a} \right]$ sor a minden értékénél konvergál.

15. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ sor $a > 1$ esetben konvergál, de $a \leq 1$ esetben divergens.

16. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n}$ sor $a > 1$ esetében konvergál, $a \leq 1$ esetében divergál.

18. A *Schlö ilch*-kritérium a *Raabe*-kritérium közvetlen következménye. Azt kell csak meggondolnunk, hogy $\ln \left(1 - \frac{\alpha}{n} \right) \approx -\frac{\alpha}{n}$ – és pedig annál jobb közelítéssel, minél nagyobb n . Ezt, sőt a pontosabb becslést is, amely szerint

$$\ln \left(1 - \frac{\alpha}{n} \right) = -\frac{\alpha_n}{n} \quad (\alpha_n \approx \alpha)$$

és megadható egy olyan $n = n_0$ index, amelyen túl

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_n > 1, \text{ ha } \alpha > 1 \\ \alpha_n < 1, \text{ ha } \alpha < 1 \end{array} \right\} \text{ hacsak } n \geq n_0.$$

könnyen igazolhatjuk az 1. § c) α) 21. feladata alapján.

$$19. \quad n \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = n \ln \frac{n+1-x}{n+1} = \ln \left(1 - \frac{x}{n+1} \right)^n \rightarrow \ln e^{-x} = -x.$$

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-x)(n-1-x)\dots(1-x)}{n!}$ sor tehát konvergens, ha $x > 1$, de divergens ha $x < 1$. $x = 1$ esetben a sor konvergens, minthogy minden tagja 0-val egyenlő.

25. $C \approx 0,577$.

26. a) Konvergens $\left(\text{majorálható a } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n \text{ sorral} \right)$.

b) Konvergens $\left(\text{majorálható a } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n \text{ sorral} \right)$.

c) Divergens $\left(\text{tagjai nem tartanak 0-hoz, hanem } \frac{1}{e} \text{-hez} \right)$.

d) Divergens $\left(\text{tagjai nem 0-hoz, hanem } \frac{1}{e^2} \text{-hez tartanak} \right)$.

e) Konvergens $\left(\text{majorálható pl. a } \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \text{ sorral} \right)$.

27. Igen, konvergens.

28. a) Konvergens $\left(\text{majorálható a } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} \text{ sorral} \right)$.
 b) Divergens $\left(\text{minorálható a } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \text{ sorral} \right)$.
29. a) Konvergens. b) Konvergens. c) Konvergens.
30. a) A *Schlömilch*-kritérium jól használható. A sor konvergens.
 b) A sor divergens.
32. A sor akkor és csakis akkor konvergál, ha $p > 2$.
33. A sor akkor és csakis akkor konvergál, ha $p > 2$.
34. a) A sor akkor és csakis akkor konvergál, ha $0 \leq \alpha < \frac{1}{e}$.
 b) A sor akkor és csakis akkor konvergál, ha $0 \leq \alpha < \frac{1}{e}$. (Ha $\alpha < 0$, a sor végtelen sok tagja nincs értelmezve).
35. a) Divergens. b) Divergens. c) Konvergens.
36. A sorok akkor és csakis akkor konvergálnak, ha $\begin{cases} a) x < \frac{4}{3} \\ b) x < \frac{1}{3} \\ c) x < 1 \end{cases}$ vagy $x > 3$.
37. A sor konvergál. 38. Konvergens.
39. A sor akkor és csakis akkor konvergál, ha $\alpha = 0$, illetve $\alpha = k\pi$ ($k = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots$) Megjegyezzük, hogy a sor szeletei zárt alakban állíthatók elő – és ebből fenti eredményünk közvetlenül kiolvasható.
40. A sor akkor és csak akkor konvergál, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ sor konvergál. Elégséges kritériumot ad ezek alapján valamennyi eddig ismert kritérium. Így pl. a *Raabe*-kritérium alapján a $\sum a_n \sin a_n$ sor konvergens, ha valamely $n = n_0$ -tól kezdve $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^2 \leq 1 - \frac{\alpha}{n}$ és $\alpha > 1$, de divergens, ha valamely $n = n_1$ indextől kezdve
- $$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^2 \geq 1 - \frac{1}{n}, \quad \text{stb.}$$
41. a) Divergens. b) Konvergens. c) Divergens. d) Konvergens. e) Konvergens
 f) Divergens. g) Divergens. h) Divergens. k) Konvergens.
42. a) A sor akkor és csak akkor konvergens, ha $x \leq -1$
 b) A sor x minden értékénél konvergens.
 c) A sor akkor és csak akkor konvergál, ha $x > 1$.
 d) A sor x minden pozitív értékére divergál, $x = 1$ -et kivéve (használjuk fel, hogy $n(\sqrt[n]{x} - 1) \rightarrow \ln x$; 1. az 1. § b) β) 1. feladatát, vagy az integrálkritériumot; esetleg a 2. § a) β) 51. feladatában kimondott tételére is támaszkodhatunk).
 e) A sor x minden pozitív értékére divergál, $x = e$ -t kivéve.
 f) A sor akkor és csakis akkor konvergál, ha $x > 1$.
43. a) Divergens. b) Konvergens. c) Konvergens.
44. a) Konvergens. b) Konvergens. c) Konvergens. d) Konvergens. e) Divergens.
 f) Divergens. g) Konvergens.
45. a) Konvergens. b) Konvergens. c) Konvergens.

46. Csak a d) és e) alatt megadott sorok konvergensek.
 47. A d) és e) alatt megadott sor kivételével valamennyi konvergens.
 48. A sor akkor és csakis akkor konvergál, ha a) $x > 1$; b) $-e < x < e$.
 49. A sor akkor és csakis akkor konvergál, ha $p > \frac{3}{2}$.
 50. A sor akkor és csakis akkor konvergens, ha $x > a$.
 52. a) Csak az $\alpha = 0$ esetben. b) α minden értékére konvergens a sor.
 54. A Bertrand-féle sorok akkor és csakis akkor konvergensek, ha $\sigma > 1$.
 55. $\sigma > 1$ esetben.

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^\sigma} + \frac{1}{(\sigma-1)(k+1)^{\sigma-1}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^\sigma} + \frac{1}{(\sigma-1)k^{\sigma-1}}.$$

Így tehát a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \approx \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^\sigma} + \frac{1}{2(\sigma-1)} \left[\frac{1}{(k+1)^{\sigma-1}} + \frac{1}{k^{\sigma-1}} \right]$$

becslésnél elkövetett hiba kisebb, mint

$$\frac{1}{2(\sigma-1)} \left[\frac{1}{k^{\sigma-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\sigma-1}} \right].$$

56. A sor akkor és csakis akkor konvergál, ha $\sigma > 1$.
 57. a) A sor divergens. b) A sor konvergál, mert $\text{Arc tg } x \rightarrow \frac{\pi}{2} > \frac{3}{2}$, ha $x \rightarrow \infty$.

- | | | |
|----------|---|----------------------------------|
| <u>γ</u> | 2. A sor divergál. | 3. A sor divergál. |
| | 6. A sor $x \neq k 2\pi$ ($k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$) esetben konvergál csak. | |
| 10. | Igen, a sor konvergens (kielégíti a Leibniz-féle elégséges feltételeket). | |
| 11. | A sor konvergens. | 12. A sor konvergál. |
| 13. | A sor konvergens. | 14. A sor (abszolút) konvergens. |
| 16. | A sor x minden pozitív értékénél konvergens. | 15. A sor divergál. |
| 17. | A sor divergál. | 18. A sor divergál. |
| | | 19. Igen, a sor konvergens. |

b)

α 1. A Cauchy–Bolzano-féle kritérium segítségével igen egyszerűen igazolhatjuk ezt. Csak azt kell meggondolnunk, hogy

$$|\alpha_n| + |\alpha_{n+1}| + \dots + |\alpha_{n+p}| \geq |\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \dots + \alpha_{n+p}|.$$

5. A sor abszolút konvergens. A sorösszeg: $\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 9. A sor feltételesen konvergens, hiszen a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ún. harmonikus sor divergens (1. a 2. § a) α) 1. feladatot.) Természetesen végtelen sokféleképp átrendezhető a sor úgy, hogy összege 4 legyen. Valamennyi átrendezés lehetősége azon múlik, hogy külön a pozitív előjelű tagokból alkotott és külön a negatív előjelű tagokból alkotott sor is divergens. Maga az átrendezés pl. így történhet: A pozitív előjelű tagokkal — eredeti sorrendjükben — kezdjük

az átrendezett sort mindaddig, míg összegük nagyobb nem lesz 4-nél. Amikor ez megtörtént, akkor — eredeti sorrendjükben — a negatív tagokkal folytatjuk a sort mindaddig, míg az összeg kisebb nem lesz négy-nél. Ekkor a még figyelembe nem vett pozitív előjelű tagokkal folytatjuk a sort — ismét eredeti sorrendjükben — mindaddig, míg az összeg négy-nél nagyobbá nem válik; ekkor ismét a negatív előjelű tagokkal folytatjuk a sort stb. Hogy az így kapott sor valóban konvergens, és összege négy, az közvetlenül következik az átrendezés felépítéséből és abból, hogy az eredeti sor tagjai egy 0-sorozat elemei (másképp ugyanis feltételesen sem konvergálhatna az eredeti sor). Azt kell még igazolnunk, hogy konstrukciónk alapján valóban az eredeti sor egy átrendezett alakját kapjuk, más szóval, hogy az eredeti sor minden tagja egyszer és csakis egyszer előfordul az átrendezett sorban. Hogy legfeljebb egyszer fordul elő, az az átrendezés módjából közvetlenül következik. Hogy egyszer valóban szerepel, azt úgy bizonyíthatjuk, ha kimutatjuk, hogy a pozitív előjelű tagok közül egy kiválasztott tetszőleges indexű elem, a negatív előjelű tagok közül is egy tetszőleges indexű elem fellép az átrendezett sorban. E célból becsülnünk kell tudni — méghozzá alulról és felülről is — a

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

alakú sor egyes szeleteit. Erre a *Cauchy–Mac Laurin*-féle integrálkritériummal kapcsolatban levezetett becslőformula (2. § a) β) 23. feladat) alkalmas.

β | 4. a) Nem hagyhatjuk el a zárójeleket, mert a 2. § b) β) 2. feladat a) pontjában kimondott szükséges és elégséges feltétel nem teljesül.

b) A zárójelek elhagyhatók, minthogy

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{s_n=1}^k (-1)^{s_n} \ln s_n \right| \leq \frac{\ln k}{n},$$

és a $k \leq n$ feltétel mellett $\frac{\ln k}{n} \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$.

c) A zárójelek nem hagyhatók el (l. az a) feladatot).

d) A zárójelek elhagyhatók (l. a b) feladatot).

6. Az egyes sorokban álló elemekből alkotott végtelen sorok konvergenssek. Az n -edik sorban álló elemek összege:

$$a^{(n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Az egyes oszlopokban álló elemek is konvergens végtelen sort alkotnak:

$$s_k = \sum_{z=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k+1} \left(\frac{k}{k+1} \right)^z - \frac{1}{k+2} \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^z \right] = \frac{k}{k+1} - \frac{k+1}{k+2}.$$

A sorösszegek összege:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Az oszlopösszegek összege:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{k}{k+1} - \frac{k+1}{k+2} \right] &= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right) + \dots = \\ &= \frac{1}{2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

A sorösszegek összege tehát nem egyenlő az oszlopösszegek összegével, jóllehet minden szóba jövő sor konvergens volt. Ennek az az oka, hogy a nagy átrendezési tétellel kapcsolatos elégséges, főleg azonban a *Markov-féle* átrendezési tétellel kapcsolatos szükséges és elégséges feltételek nem teljesülnek, s így a sorösszegek összege nem is lehet egyenlő az oszlopösszegek összegével. Ugyanis:

$$m_k^{(s)} = \sum_{z=k+2}^{\infty} \left[\frac{1}{k+2} \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^s - \frac{1}{k+3} \left(\frac{k+2}{k+3} \right)^s \right] = \frac{1}{k+2} \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^s,$$

$$M_k = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{k+2} \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^s = \frac{1}{k+2} \cdot \frac{k+1}{k+2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{k+1}{k+2}} = \frac{k+1}{k+2}$$

és így

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = 1 \neq 0, \text{ q. e. d.}$$

12. A *Markov-féle* sortranszformáció segítségével könnyen igazolhatjuk a reláció helyességét:

$$a_0 = \left(a_0 - \frac{1}{2} \Delta a_0 \right) + \left(\frac{1}{2} \Delta a_0 - \frac{1}{2^2} \Delta^2 a_0 \right) + \dots$$

$$- a_1 = \left(-a_1 + \frac{1}{2} \Delta a_1 \right) + \left(-\frac{1}{2} \Delta a_1 + \frac{1}{2^2} \Delta^2 a_1 \right) + \dots$$

.....

Az átrendezés után használjuk még fel, hogy

$$\Delta^{n+1} a_s = \Delta^n a_s - \Delta^n a_{s+1}$$

és

$$\frac{1}{2^{n+1}} \left\{ (\Delta^n a_0 + \Delta^n a_1) - (\Delta^n a_1 + \Delta^n a_2) + \dots \right\} = \frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}},$$

ha a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ sor valóban konvergens.

14. A *Cauchy-féle* sorozat divergens (akkor is, ha megtartjuk a zárójeleket — tehát az egy átló mentén elhelyezkedő részletsorozatok összegét egyetlen tagként kezeljük — akkor is, ha elhagyjuk a zárójeleket).

15. A *Cauchy-féle* sorozat divergens (zárójelekkel is, azok nélkül is).

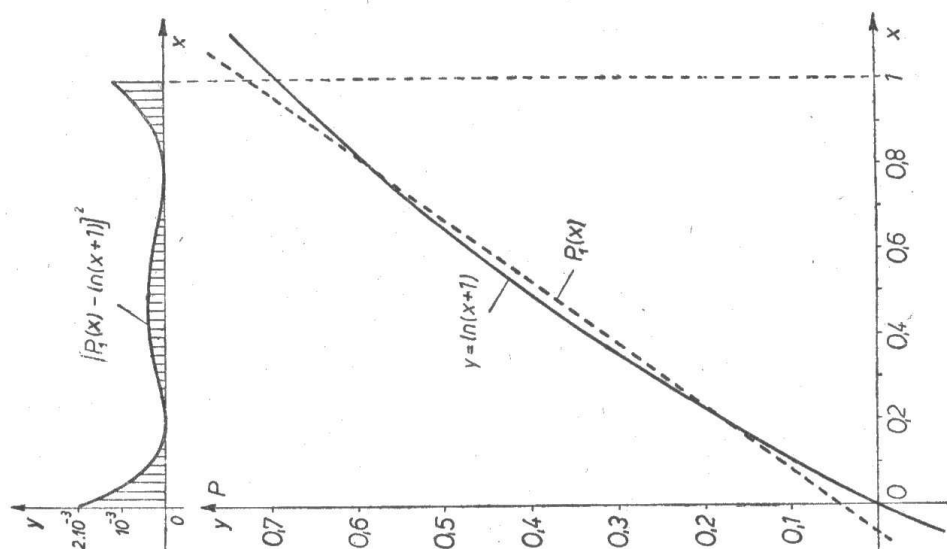
15. Minthogy a *Cauchy-féle* sorozat konvergenciájának csak elégséges, de nem szükséges feltétele, hogy az összeszorozott sorok abszolút konvergensnek legyenek, lehet, hogy feltételesen konvergens sorok szorzata is konvergens. Hogy ilyenkor a szorzatsor összege csak az összeszorozott sorok összegének szorzatával lehet egyenlő, az a 2. § b) β), illetőleg az 1. § b) α) részben kimondott tételekből következik. Így pl. a

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ sor önmagával, vagy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ sorral vett szorzata ilyen. Általában

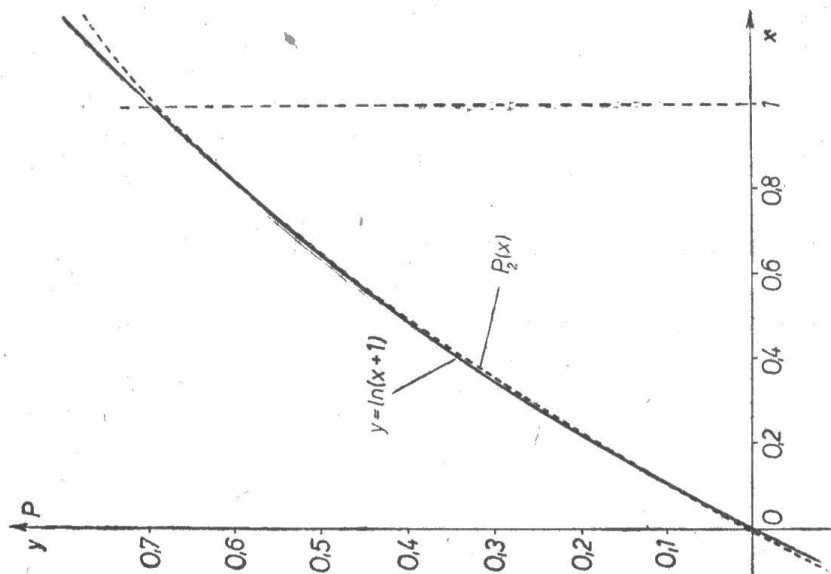
alternáló előjelű sorok *Cauchy-féle* szorzata konvergens sort ad, ha az egyes átlókban található részletsorozatok összege monoton csökkenően 0-hoz tart; ezen az alapon további olyan feltételesen konvergens sorokat adhatunk meg, amelyek *Cauchy-féle* szorzata kon-

vergens. Így pl. a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\beta}$ sorok szorzata ilyen, ha az

$\alpha + \frac{\beta}{2} > 1$ is, és a $\beta + \frac{\alpha}{2} > 1$ feltétel is teljesül.



10. ábra



9. ábra

3. §. FOURIER SOROK

a)

β 1. $P_1(x) = (8 \ln 2 - 5,5) + (9 - 12 \ln 2) \cdot x.$

$$P_2(x) = \left(38 \ln 2 - \frac{158}{6}\right) + x(134 - 192 \cdot \ln 2) + x^2(180 \ln 2 - 125).$$

$$P_3(x) = \left(192 \ln 2 - \frac{1597}{12}\right) + x(1415 - 2040 \ln 2) + x^2(4800 \ln 2 - 3327,5) + \\ + x^3(2135 - 3080 \ln 2) \quad (1. \text{ a } 9. \text{ és } 10. \text{ ábrát!}).$$

2. $P_1(x) = \sqrt{3}(2x - 1); \quad P_2(x) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1);$

$$P_3(x) = \sqrt{7}(20x^3 - 30x^2 + 12x + 1); \quad \text{stb.}$$

Általában $P_n(x) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x + a_2^{(n)}x^2 + \dots + a_n^{(n)}x^n,$

ahol az $a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}$ együttható-rendszert a következő $n + 1$ egyenlet határozza meg:

$$\int_0^1 x^h P_n(x) dx = 0 \quad (h = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

$$\int_0^1 P_n^2(x) dx = a_n^{(n)} \left\{ \frac{a_0^{(n)}}{n+1} + \frac{a_1^{(n)}}{n+2} + \dots + \frac{a_n^{(n)}}{2n+1} \right\} = 1.$$

3. Az $\ln(1+x)$ függvénynek a 8. feladat ortonormált rendszere szerinti első *Fourier*-együtthatói a következők:

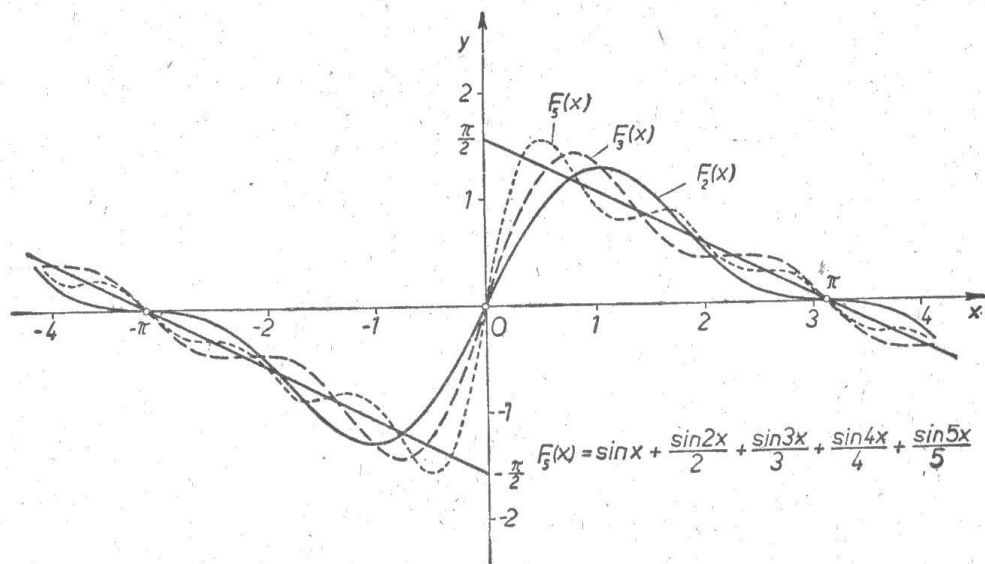
$$a_0 = 2 \ln 2 - 1; \quad a_1 = \sqrt{3} \left(\frac{3}{2} - 2 \ln 2 \right); \quad a_2 = \sqrt{5} \left(6 \ln 2 - \frac{25}{6} \right),$$

stb. A $\sin x$ függvény együtthatói: ugyanebben a rendszerben

$$a_0 = 1 - \cos 1; \quad a_1 = \sqrt{3} [2 \sin 1 - (1 + \cos 1)]; \quad a_2 = \sqrt{5} (6 \sin 1 + 11 \cos 1 - 11).$$

γ 5. $y(x) \sim \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$

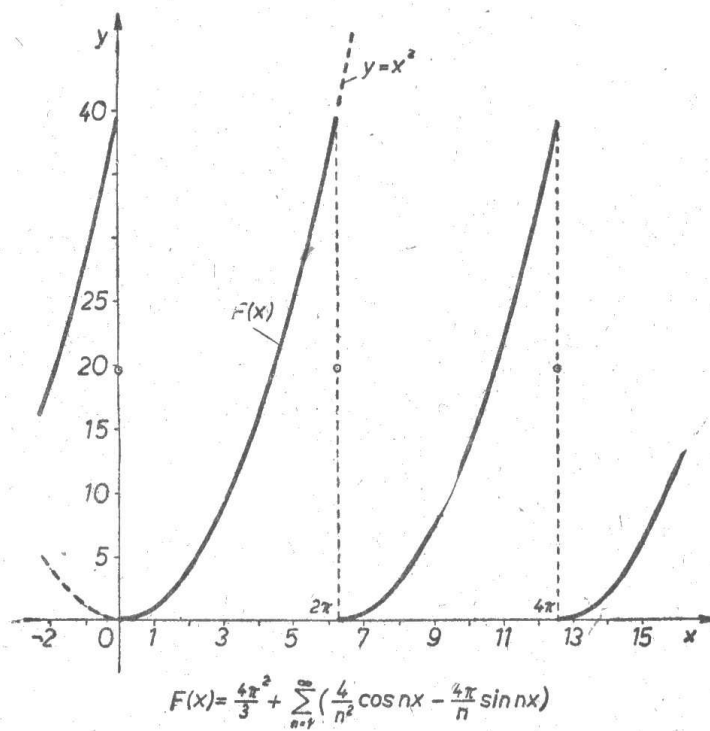
A sor mindenütt az $y(x)$ -hez konvergál, kivéve a $0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \dots$ helyeket, ahol 0-hoz (a bal és jobb oldali határérték számtani közepéhez) konvergál. A konvergencia minden olyan zárt intervallumon egyenletes, amely nem tartalmaz egyetlen szakadási helyet sem.



11. ábra

7.

$$y(x) \sim \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right),$$

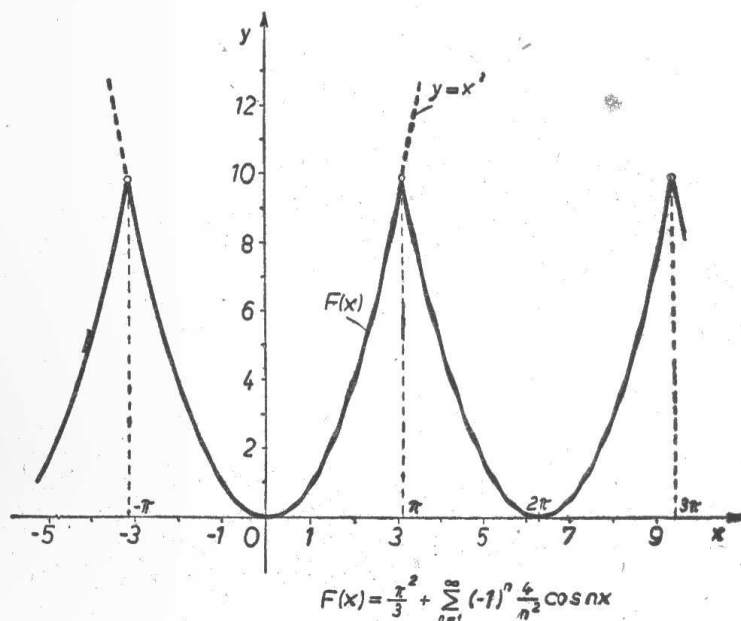


12. ábra

illetve

$$y(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx.$$

Mindkét sor mindenütt, sőt az első mindenütt egyenletesen konvergál. A második sor csak azokon a zárt intervallumokon konvergál egyenletesen, amelyek nem tartalmazzák egyik szakadási helyet sem. (L. az ábrát.)



13. ábra

9.

$$y(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos (2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

A sor mindenütt abszolút és egyenletesen konvergál.

10.

$$y(x) \sim \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \cos nx \right\}.$$

A sor mindenütt egyenletesen és abszolút konvergál.

$$\pi \frac{\cos \alpha \pi}{\sin \alpha \pi} = \pi \operatorname{ctg} \alpha \pi = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2},$$

$$\frac{\pi}{\sin \alpha \pi} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2},$$

$$\pi \operatorname{tg} \frac{\alpha \pi}{2} = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} - \pi \frac{\cos \alpha \pi}{\sin \alpha \pi} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\alpha}{\alpha^2 - (2n+1)^2}.$$

$$11. \quad y(x) \sim \frac{1}{2\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha}{\alpha^2 + n^2} \cos nx.$$

$$12. \quad y(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi^2 n^3} - \frac{2}{3n} \right) \sin nx.$$

A sor mindenütt konvergál, és az $x = 0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \dots$ helyeket nem tartalmazó bármely zárt intervallumon egyenletesen konvergál. A sorbafejtett függvény első deriváltjának az $x = 0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \dots$ helyeken megszüntethető, a második deriválnak ugyanitt első fajú szakadása van. A sort tagonként differenciálva, az így kapott sor az $x = 0; \pm 2\pi; \pm 4\pi \dots$ helyek kivételével konvergál (éspedig a sorbafejtett függvény első deriváltjához); a $0, \pm 2\pi; \dots$ helyeken azonban a sor *határozottan divergál*! A kétszeri közbeni formális differenciálással kapott sor szintén konvergál a $0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \dots$ helyek kivételével (éspedig a sorbafejtett függvény második deriváltjához), a $0; \pm 2\pi \dots$ helyeken *határozottan divergál*. A $\pm \pi; \pm 3\pi; \pm 5\pi; \dots$ helyeken, ahol az eredeti függvény második deriváltja nincs definiálva, a *Fourier*-sor a bal és jobb oldali határérték számtani közepéhez, 0-hoz konvergál. Az egyszeri differenciálással nyert sor egyenletesen konvergál minden olyan zárt intervallumon, amely nem tartalmazza a $0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi; \dots$ helyek egyikét sem, a kétszeri differenciálással nyert sor viszont azokon a zárt intervallumokon, amelyek a $0; \pm \pi; \pm 2\pi; \pm 3\pi; \dots$ helyek egyikét sem tartalmazzák.

13. a)

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x.$$

A „sor” mindenütt egyenletesen „konvergál” a függvényhez.

b)

$$z(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cos ny}{n}.$$

A sor minden olyan zárt intervallumon egyenletesen konvergál, amely nem tartalmazza az $x = \pm y; \pm y \pm 2\pi; \pm y \pm 4\pi, \dots$ pontok egyikét sem. A sor mindenütt a sorbafejtett függvényt állítja elő.

$$14. \quad B_{2k-1}(x) \equiv (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin 2n\pi x}{(2\pi n)^{2k-1}}; \quad E_{2k}(x) \equiv (-1)^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos 2n\pi x}{(2\pi n)^{2k}}.$$

c)

$$y(x) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - \frac{1}{4}} \cos nx.$$

A sor mindenütt abszolút és egyenletesen konvergál a sorbafejtett függvényhez.

d)

$$y(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^2 - 1} \cos nx.$$

A sor mindenütt abszolút és egyenletesen konvergál a sorbafejtett függvényhez.

e)

$$y(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^{n-1} - 1] \frac{n}{n^2 - 1} \sin nx.$$

A sor mindenütt a sorbafejtendő függvényhez konvergál, de csak azokon a zárt intervallumokon egyenletesen, amelyek nem tartalmazzák a $\pm \pi; \pm 3\pi; \pm 5\pi; \dots$ helyek egyikét sem. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a d) feladatban szereplő sor formális tagonkénti

integrálásával az ittenitől teljesen eltérő sort kapunk. Ennek az az oka, hogy az $\int_0^x |\sin n\xi| d\xi$ függvény nem 2π periódusú. Hogy viszont a d) alatti sor formális differenciálásával kapott sor az itt megadottól csak előjelben különbözik, az a $\sin nx$ függvénynek a differenciálással, illetve integrálással kapcsolatos ismeretes „periodicitásának” tulajdonítható; ti.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x \sin x dx = -\frac{d}{dx} \sin x.$$

2. $y(x) \sim - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n [an \cos nx + (n^2 - b) \sin nx]}{(b - n^2)^2 + a^2 n^2}.$

3. $y(x) \sim \frac{\alpha_0}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{[\alpha_n (b - n^2) - \beta_n an] \cos nx}{(n^2 - b)^2 + a^2 n^2} + \frac{[\alpha_n an + \beta_n (b - n^2)] \sin nx}{(n^2 - b)^2 + a^2 n^2} \right\}.$

4. Ha $a \neq 0$, akkor (csillapított rezgés esete) csak a triviális $y \equiv 0$ megoldás adódhat. Ha azonban $a = 0$ és b valamilyen természetes szám négyzete, akkor esetleg a homogén egyenletnek lehetnek a triviálistól különböző megoldásai is, minthogy ekkor az előbbieken felírt megoldási módszer (függetlenül attól, hogy homogén vagy inhomogén egyenletről van szó) értelmetlenségre vezet. Viszont az

$$y'' = -k^2 y$$

differenciálegyenletet az $y = A \cos kx + B \sin kx$ alakú függvények kielégítik, tetszőleges A és B együtthatók mellett, és e függvények „Fourier-sorok”, illetve trigonometrikus polinomok, ha k természetes szám. Hasonlóképp, ha $a = 0$ és $b = k^2 \frac{\pi^2}{l^2}$, ahol k természetes szám, akkor az

$$y'' = -k^2 \frac{\pi^2}{l^2} y$$

differenciálegyenletet az $A \cos k \frac{\pi}{l} x + B \sin k \frac{\pi}{l} x$ függvények A és B tetszőleges értéke mellett kielégítik, és ezek $2l$ periódusú, azaz Fourier-sorba fejthető megoldásai a differenciálegyenletnek.

5. $U(t) \sim \frac{4}{\pi} \frac{y_m}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin (2n+1) \alpha}{(2n+1)^2} \sin (2n+1) x$

és így a $(2k+1)$ -edik harmonikus amplitudója $U(t)$ maximumának százalékában

$$\frac{400}{\pi} \frac{1}{\alpha (2k+1)^2} \text{-nel egyenlő.}$$

4. §. SORÖSSZEGEK SZÁMÍTÁSTECHNIKÁJA.

a)

α | 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} = 1.$

5. A sor konvergens, összege

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \frac{n}{2}(5+n)}{\left[2 + \frac{n}{2}(5+n)\right] \left[3 + \frac{n}{2}(5+n)\right]} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3 + \frac{n}{2}(5+n)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2 + \frac{n}{2}(5+n)} = \\ &= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right] = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+4} \right] = \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

6. A sor konvergens, ha $x > 1$; ez esetben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} = \frac{1}{x-1}.$$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{2}{n^2} = \frac{3\pi}{4}.$

9. A sor összege: $\frac{109}{3520}.$

10. a) $\frac{1}{y} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(x+1)\dots(x+n)}{y(y+1)(y+2)\dots(y+n+1)} = \frac{1}{y-x},$ ha $y > x \geq 0.$

b) $1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\dots(b+n)} = \frac{b-1}{b-a-1},$ ha $b > a+1 > 1.$

15. Használjuk fel, hogy $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha.$

β | 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!} = \operatorname{ch} \sqrt{2} - 1 = 2 \operatorname{sh} \frac{1}{\sqrt{2}}.$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n} = 12; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{3^n} = 4,5.$

7. Megszorozzuk az $1 + 1x + 2x^2 + 4x^3 + \dots$ sort $1 - x - x^2 - x^3$ -nal, így polinomot kapunk. Ennek alapján

$$1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 7x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x - x^2 + x^3}; \quad (|x| < 1)$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{7}{4^4} + \dots = \frac{64}{43}.$$

8. A sorösszeg: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{4^n} = \frac{176}{27}.$

10. $1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots = \frac{1}{1 - x - x^2} \Big|_{x=\frac{1}{3}} = \frac{9}{5}.$

13. $\frac{x^3}{1 \cdot 3} - \frac{x^5}{3 \cdot 5} + \frac{x^7}{5 \cdot 7} - + \dots = \frac{1+x^2}{2} \arctg x - \frac{x}{2} \quad (|x| \leq 1).$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots = \frac{1}{x^3} \left[(x-1)^2 \ln \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x}{2} \right] \quad (|x| \leq 1).$$

$$x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - + - \dots = \int_0^x \frac{1+\xi^2}{1+\xi^4} d\xi \quad (|x| \leq 1).$$

Az első és harmadik hatványsor által definiált függvény a teljes $-\infty < x < \infty$ számköze folytatható analitikusan, a második $-\infty < x < 1$ közre terjeszthető ki.

14. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots = 1.$

$$\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \dots = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} - + \dots = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + - \dots = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - - + + \dots = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{4} + \dots = \ln 2.$$

$$1 - \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{11 \cdot 3^5} + \frac{1}{13 \cdot 3^6} - - + + \dots = \ln \sqrt{7}.$$

$$\underline{\gamma} \quad 2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^{2k}} = \frac{1}{2^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{|B_{2k}| \cdot \pi^{2k}}{2 \cdot (2k)!}.$$

$$4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{2k}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^{2k}} = \left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right) \frac{|B_{2k}| (2\pi)^{2k}}{2 (2k)!}.$$

$$7. \quad 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(6n-3)^2} = \\ = \left(1 - \frac{2}{9}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{7}{9} \cdot \frac{2^{2k}-1}{2 \cdot (2k)!} |B_{2k}| \cdot \pi^{2k}.$$

$$9. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right] = \frac{1}{2}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^3} = \frac{32-3\pi^2}{64}.$$

11. L. a 4. § b) v) feladatát is.

$$12. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} = \frac{(-1) E_{2k} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}}{2 \cdot (2k)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)^2} = \frac{3}{2} - 2 \ln 2.$$

$$\frac{1^3}{1^4+4} - \frac{3^3}{3^4+4} + \frac{5^3}{5^4+4} - + \dots = 0.$$

$$\frac{1}{1(1^4+4)} - \frac{1}{3(3^4+4)} + \frac{1}{5(5^4+4)} - + \dots = \frac{\pi}{16}.$$

$$\frac{1}{1(4 \cdot 1^4+1)} - \frac{1}{2(4 \cdot 2^4+1)} + \frac{1}{3(4 \cdot 3^4+1)} - + \dots = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2+1)} = 2 \ln 2 - 1.$$

$$\underline{\delta} \quad 4. \quad 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + + - - = \ln \sqrt[3]{4} = \frac{2}{3} \ln 2.$$

$$5. \quad a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - 1.$$

$$b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(15n)^2} = \frac{181\pi^2}{1800}.$$

$$c) \quad 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} - \frac{1}{10^2} + + - - \dots = \frac{2\pi^2}{27}.$$

$$9. \quad a) \quad \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots + \frac{k!}{(2k-1)!!} + \dots = \frac{\pi}{2}.$$

$$b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} - 1.$$

$$c) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k+2)!} = \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{2}.$$

$$d) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)^2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{9} - \ln 4.$$

$$e) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \ln^2 2.$$

$$f) \quad 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 2 \right).$$

$$g) \quad 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \dots = \frac{1}{4\sqrt{2}} [\pi + 2 \ln(1 + \sqrt{2})].$$

$$10. \quad F_1 = \frac{\pi^2}{6}; \quad F_2 = \frac{\pi^2}{3} - 3; \quad F_3 = \frac{\pi^2}{4} - \frac{39}{16}; \quad F_4 = \frac{5\pi^2}{54} - \frac{192}{216}; \dots$$

$$E_0 = 1 - \frac{1}{e}; \quad E_1 = 1; \quad E_2 = 2; \quad E_3 = 5; \dots$$

és általában $E_{n+1} = 1 + \binom{n}{1} E_1 + \binom{n}{2} E_2 + \binom{n}{3} E_3 + \dots + \binom{n}{n-1} E_{n-1} + E_n$.

Az $\{F_n\}$ sorozatra nem érdemes rekurziós formulát adni, hanem az

$$F_p = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)} \right]^2 = \alpha^2 \frac{\pi^2}{6} + 2\alpha\beta \frac{1}{2} + \beta^2 \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) +$$

$$+ 2\alpha\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} + 2\beta\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \gamma^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)^2} + \dots$$

(ahol $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ az $\frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}$ részlet törtre bontásában $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{n+2}$, $\frac{1}{n+3}$, \dots számlálója felbontás alapján számíthatjuk; itt ugyanis

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)(n+l)}$ részlet törtre bontás révén számítható, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m)^2}$ pedig viszszevezethető a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ sorra, amelynek összege $\frac{\pi^2}{6}$.

$$\varepsilon \quad 6. \quad \frac{\pi}{4} \cong 0,7854.$$

$$7. \quad a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cong 1,2021;$$

$$b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(n+1)^3} \cong 0,130213.$$

9. a) x minden (negatív egész számoktól különböző) értékére

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{0,1(0,1+1) \dots (0,1+n)} = e \left[\frac{1}{0,1} \cdot \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{1,1} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2,1} - + \dots \right] \cong 24,747.$$

b) x minden értékére

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{6^{-n}}{1 + 0,01 \cdot 6^{-2n}} = e^{\frac{1}{6}} - 0,01 e^{\frac{1}{6^3}} + 10^{-4} \cdot e^{\frac{1}{6^5}} - + \dots \cong 1,1714.$$

c) x minden pozitív értékénél (bár a jobboldal x minden értékénél konvergens)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{0,1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,1 \cdot 1,1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2!}{0,1 \cdot 1,1 \cdot 2,1} + \dots = \frac{1}{0,1^2} + \frac{1}{1,1^2} + \frac{1}{2,1^2} + \dots = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{0,1^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(n+0,1)^2} - \frac{1}{n^2} \right\} = \frac{\pi^2}{6} + 100 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0,2n + 0,01}{[n \cdot (n+0,01)]^2} \cong \\ & \cong \frac{\pi^2}{6} + 100 - 0,211 \cong \frac{\pi^2}{6} + 99,789. \end{aligned}$$

(Az eredmények *Markov*-féle sortranszformáció révén adódtak.)

10. (*Euler*-féle sortranszformáció révén adódnak az eredmények.)

Az első egyenlőség α minden (negatív egész számoktól különböző) értékére érvényes. A jobb oldal α minden értékénél gyorsabban konvergál, mint a bal oldal.

A második egyenlőség α minden (negatív egész számoktól különböző) értékére érvényes, ha $-1 < \beta \leq 1$. Ha $\beta \leq -1$, illetve $\beta > 1$, akkor α , egyetlen értékére sem érvényes az egyenlőség. Ha $0 \leq \beta \leq 1$, akkor a jobb oldal, ha $-1 < \beta \leq 0$, akkor a bal oldal konvergál gyorsabban.

11. Minthogy az egyenlőségek az *Euler*-féle sortranszformáció elvégzése révén adódtak (és pedig úgy, hogy a bal oldali sorokon végeztük el az *Euler*-féle sortranszformációt), tehát akkor és csakis akkor érvényesek, ha a bal oldali sorok konvergensnek (és minden tagjuk értelmezett; ha véges számú tagjuk nem értelmezett — l. pl. a 4. § a) e) 10. feladat első egyenlőségét —, akkor megtörténhet, hogy a jobb oldal nem konvergens).

12. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ sort erősen átrendezve (minthogy a sor abszolút konvergens — ha egyáltalán konvergál — az erős átrendezés nem változtathat az összegen):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = 1;$$

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n - 1}$ sort zárt alakban megadni nem tudjuk, de át tudjuk rendezni a 6. § a) e) 8.

feladatában bevezetett $S_p = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ kifejezések szerint. Ugyanis:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n - 1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^s} \right) = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^s} \right) = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{n^{sp}} \right) \right) = \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{p=2}^{\infty} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{sp}} \right) \right) = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{p=2}^{\infty} S_{sp} \right) = \sum_{p=2}^{\infty} \mu^*(p) S_p = 1 + \sum_{p=2}^{\infty} [\mu^*(p) - 1] S_p, \end{aligned}$$

ahol $\mu^*(p)$ jelenti a p természetes szám 2-nél nem kisebb összes természetes osztójának számát, és a $\sum_{p=2}^{\infty} S_p = 1$ relációt felhasználva (l. a 4. § a) e) 8. feladatát). Hogy az itt többször alkalmazott nagy átrendezési tételt minden esetben jogosan használtuk, igen könnyen igazolható.

b)

1. Az igazolásnak — illetve a reláció származtatásának — alapgondolata ugyanaz, mint amit a *Taylor*-sor maradéktagja integrálalakjának bevezetésénél használtunk.

$$9. \quad x_n = -n + \frac{1}{2} \ln n + \ln \sqrt{2} \pi + \frac{B_2}{2} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{B_{2k}}{(2k-1)2k} \cdot \frac{1}{n^{2k-1}} + \\ + v_k(n) \frac{B_{2k+2}}{(2k+1)(2k+2)n^{2k+1}}, \text{ ahol } 0 < v_k(n) < 1,$$

azaz

$$x_n \sim -n.$$

5. §. VÉGTELEN SZORZATOK

α | 4. A szorzat konvergens, $\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)} \right] = \frac{1}{3}$.

5. A $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)$ sor divergens.

6. A $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ szorzat is divergens. Emellett

$$\prod_{n=2}^N \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{N+1}{N} = \frac{N+1}{2} \rightarrow \infty,$$

$$\prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{N-1}{N} = \frac{1}{N} \rightarrow 0.$$

Ezek szerint

$$\prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{\prod_{n=1}^{N-1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)}.$$

7. A szorzat konvergens, $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right] = 1$.

β | 2. A szorzat akkor és csakis akkor konvergál, ha $\alpha > 1$.

3. A szorzat akkor és csakis akkor konvergál, ha $\alpha > 1$.

5. A szorzat akkor és csakis akkor konvergál, ha $|x| < 1$.

6. A szorzatok konvergensek.

$$a) \prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3}.$$

$$b) \prod_{n=2}^{\infty} \left[1 + \frac{2n+1}{(n^2-1)(n+1)^2} \right] = \frac{4}{3}.$$

$$c) \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n} \right] = 2.$$

9. A szorzat konvergál, $\prod \cos \frac{\pi}{2^n} = \frac{2}{\pi}$.

$$12. \quad \prod_{n=0}^{\infty} [1 + (a_n - b_n - a_n b_n)] = a \cdot b. \quad \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{a_n + b_n}{1 - b_n}\right] = \frac{a}{b}.$$

$$\prod_{n=0}^{\infty} [1 + (b_n c_n - b_n - c_n)] = b \cdot c. \quad \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{c_n - b_n}{1 - c_n}\right] = \frac{b}{c}.$$

γ 1. Ez a részletszorzatok sorozatára alkalmazott Cauchy-féle kritérium közvetlen következménye.

3. Pl. az

$$\left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^{2\alpha}}\right) \left(1 - \frac{1}{3^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{3^{2\alpha}}\right) \left(1 - \frac{1}{4^\alpha}\right) \dots$$

szorzat konvergál, ha $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2}$, holott sem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{2\alpha}}$, sem pedig a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{(n+1)^{2\alpha}} + \frac{2}{(n+1)^{3\alpha}} + \frac{1}{(n+1)^{4\alpha}} \right]$$

sor nem konvergens.

10. A szorzat konvergens, minthogy $\sum a_n$ és $\sum a_n^2$ is konvergens.

12. A szorzat divergál.

$$14. \quad \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim e^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}} \cong e^{\frac{1}{2} \ln(2n-1)} = \sqrt{2n-1}.$$

16. A szorzat konvergens.

δ 6. A $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)$, illetve a $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)$ szorzat — a 6. § c) β) 1. feladata

szerint — x egyetlen 0-tól különböző értékére sem konvergál. A $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n x}{n}\right]$ szorzat ezzel szemben x minden értékére konvergál, de nyilván (csak) feltételesen. Ez a szorzat egyébként az egész $-\infty < x < \infty$ számsíkon egyenletesen konvergál.

7. A $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n)$, a $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)$ és a $\prod_{n=1}^{\infty} [1 + (-x)^n]$ szorzat akkor és csakis akkor konvergál, ha $|x| < 1$. A konvergencia ugyanitt abszolút. Emellett — bármilyen 2-nél kisebb pozitív számot jelent is ε_1 , illetve ε_2 — mindhárom szorzat egyenletesen konvergál a $-1 + \varepsilon_1 \leq x \leq 1 - \varepsilon_2$ intervallumon.

8. Mindkét szorzat x minden értékénél (és pedig abszolút) konvergens; a konvergencia mindkét szorzat esetén egyenletes a teljes $-\infty < x < \infty$ szakaszon.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}; \quad \prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{x}.$$

$$(A \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2^2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} = \dots)$$

illetve a $\operatorname{sh} x = 2 \operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2} = 2^2 \operatorname{sh} \frac{x}{4} \operatorname{ch} \frac{x}{4} \operatorname{ch} \frac{x}{2} = \dots$

relációt, továbbá a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{n} = x, \quad \text{ill. a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \operatorname{sh} \frac{x}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh} nx}{n} = x$$

relációt kell figyelembe vennünk és a határátmenetek jogosságát precízen igazolnunk.)
 11. Megjegyezzük, hogy egyedül a 6. § c) δ) 10. feladatra támaszkodva is megadhatjuk a keresett szorzat értékét, hiszen

$$\cos \pi x = \frac{\sin 2\pi x}{2 \sin \pi x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2} \right], \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$12. \quad \operatorname{tg} \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{x^2 \left(n - \frac{1}{2} \right)}{\left[n \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]^2 - n^2 x^2} \right].$$

3. Mindkét szorzat egyenletesen konvergál a teljes számegyenesen. A 6. § c) δ) 10. feladat mintjára könnyen igazolható, hogy

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2 n^2} \right) = \frac{\operatorname{sh} x}{x} \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{4x^2}{\pi^2 (2n-1)^2} \right] = \operatorname{ch} x \quad (-\infty < x < \infty)$$

FELHASZNÁLT ÉS AJÁNLOTT IRODALOM

A csak a témakörrel foglalkozó könyvek közül a következőket emeljük ki:

- K. Knopp**: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. 1950. Berlin—Springer.
C. Runge: Theorie und Praxis der Reihen. 1904. Leipzig.
A. Pringsheim: Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse. Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. I. 1. 3. 1899. Leipzig.
E. Borel: Leçons sur les séries à termes positifs. 1902. Paris.
T. J. L'A. Bromwich: An introduction to the theory of infinite series. 1908. London.
N. Nielsen: Lehrbuch der unendlichen Reihen. 1909. Leipzig.
E. Fabry: Théorie des séries à termes constants. 1910. Paris.

*

Azon könyvek közül, amelyeknek csak egyes fejezetei foglalkoznak a témakörrel, az alábbiakat említjük:

- Szász Pál**: Differenciál- és integrálszámítás I—II. Bp. 1951. Közoktatási K.
A. F. Bermant: Matematikai analízis I—II. Bp. 1951. Tankönyvkiadó.
Alexits Gy.—Fenyő I.: Matematika vegyészek számára. Bp. 1951. Tankönyvkiadó.
Műszaki Matematikai Gyakorlatok A. II. köt. Bp. 1953. Tankönyvkiadó.
M. K. Grebensca—Sz. I. Novoszelov: Matematikai analízis I—II. Bp. 1951—1953. Tankönyvkiadó.
В. И. Смирнов: Курс высшей математики. Москва 1951. Гостехиздат.
Goursat: Cours d'analyse. Paris, 1927. Gauthiers-Villars.
Gjunter—Kuzmin: Felsőbb matematikai példatár. I—III. Bp. 1951—52. Tankönyvkiadó.
Beke Manó: Differenciál- és integrálszámítás. I., II. Bp. 1916.

TARTALOMJEGYZÉK

1. §. Számsorozatok

a) Intervallum-skatulyázás	9
----------------------------------	---

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

b) Elemi sorozatok határértékének számítástechnikája	12
α) Algebrai átalakítások, illetve egyszerű tételek felhasználása	12
β) Konvergenca és határérték vizsgálata függvénytani segédeszközökkel	14
γ) Határértékek számítása egyenletmegoldással	14
δ) További, az ismert elemi sorozatok segítségével vizsgálható sorozatok ...	14

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

ad α)	15
ad β)	19
ad γ)	21
ad δ)	25
c) Sorozatok, amelyeknél különböző típusú határátmeneteket kell szimultán vagy egymás után elvégezni	28
α) Elemi módszerek alkalmazása	29
β) Többtagú elemekből álló sorozat határértékének megállapítása az integrál-számítás segítségével	29
γ) A Toeplitz-tételkör és alkalmazásai	30

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

ad α)	31
ad β)	39
ad γ)	42
d) Számsorozatok limes superiorja és limes inferiorja	51

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

2. §. Végtelen sorok konvergenca-kritériumai. Műveletek sorokkal

a) Sorok konvergenca-kritériumai	53
α) Bevezetés	53
β) Pozitív tagú sorok konvergenca-kritériumai	54
γ) Általános sorok	56

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

ad α)	57
ad β)	58
ad γ)	75
b) Műveletek sorokkal	80
α) Az abszolút konvergenca és jelentősége	80
β) Sorokkal végzett műveletek	81

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

ad α)	86
ad β)	88

3. §. Fourier-sorok

a) Általános megjegyzések	97
α) A kérdés feltevése	97
β) Az ortogonalitás és jelentősége	98
b) Szorosabb értelemben vett Fourier-sorok	98
α) Definíciók, általános megjegyzések	98
β) A Bessel-egyenlőség és a maradéktag	99
γ) A sorbafejtés technikája	101
δ) A Fourier-sorok gyakorlati alkalmazásai	101

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

ad a) $\alpha) - \beta)$	102
ad b) $\gamma)$	102
ad $\delta)$	108

4. §. A sorösszegek számítástechnikája

a) A sorösszegek számítástechnikája	114
α) Sorok összegének közvetlen számítása	114
β) Függvénysorok felhasználása	115
γ) A Bernoulli-számok felhasználása	116
δ) Sorösszegek számítása az eddig megismert sorösszegek felhasználásával	116
ϵ) Sorösszegek közelítő számítása	117

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

ad α)	117
ad β)	122
ad γ)	129
ad δ)	135
ad ϵ)	142
b) Aszimptotikus képletek, formulák	152

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

5. §. Végtelen szorzatok. Függelék

α) A végtelen szorzatokról általában	157
β) Pozitív elemű szorzatok	159
γ) Általános szorzatok. Abszolút és feltételes konvergencia. Műveletek szorzatokkal	159
δ) Függvényszorzatok	161

PÉLDÁK ÉS FELADATOK

ad α)	162
ad β)	164
ad γ)	167
ad δ)	172

Eredménytár	176
-------------	-------	-----

Tankönyvkiadó Vállalat

A kiadásért felelős: dr. Vágvölgyi Tibor igazgató

Felelős szerkesztő: Ambrus Ferenc

Műszaki vezető: Hámori József

Műszaki szerkesztő: Hülber Péter

A kézirat nyomdába érkezett: 1972. augusztus. Megjelent: 1973. február

Példányszám: 2500. Terjedelem: 13,25 (A/5) ív, 13 ábra

**Készült: az 1956. évi első kiadás matricájáról az 1965. évi második kiadás alapján
az MSZ 5601-59 és az MSZ 5602-55 szabvány szerint**

[Raktári szám: 44 231/VI.

72.8219 Egyetemi Nyomda, Budapest. Felelős vezető: Janka Gyula igazgató