

# أولا - الاستاتيكا

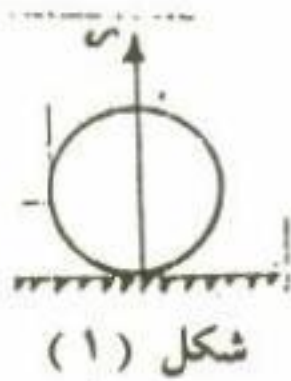
## الفصل الأول

### الاحتكاك

ندرس في هذا الفصل ظاهرة الاحتكاك وخواصها وسنعتبر أن الأجسام التي نتعامل معها تسلك نفس سلوك الجسيمات ، أى أنه يمكن اعتبار الجسم مركزا في نقطة هندسية .

#### رد الفعل :

ينص قانون الحركة الثالث لنيوتن والذي سبق للطالب دراسته أن « لكل فعل رد فعل مساو له في المقدار ومضاد له في الاتجاه » .



ويعنى القانون أنه إذا أثر جسم على آخر بقوة ما (الفعل) فإن الجسم الآخر يؤثر بدوره على الأول بقوة (رد الفعل) تساوى القوة الأولى في المقدار وتضادها في الاتجاه .

فإذا وضعت كرة على نضد مثلاً كما في شكل (١) ، فإن الكرة تؤثر على النضد بقوة (الفعل) ونجد أن النضد يؤثر على الكرة بقوة (رد الفعل) ويرمز لمعيارها بالرمز  $r$  وتتساوى هاتان القوتان في المقدار وتتضادان في الاتجاه .

ويجب ملاحظة أن هاتين القوتين لا تؤثران في جسم واحد فإحدى القوتين ولتكن الفعل تؤثر في النضد بينما تؤثر القوة الثانية - رد الفعل - في الكرة .

#### قوة الاحتكاك :

إذا أعطيت دفعة لمكعب من الخشب أو الزجاج على نضد أفقى فستجد أنه ينزلق على النضد مسافة معينة تأخذ سرعته خلالها في التناقص حتى يقف تماماً ، ويعنى ذلك بطبيعة الحال وجود قوة تقاوم حركة

المكعب على سطح النضد وتعمل على إيقافه ، وتسمى هذه القوة «قوة الاحتكاك بين المكعب والنضد» .  
وعموما ، تلعب قوى الاحتكاك دورا كبيرا في حياتنا العملية ، فلولاها لما استطعنا السير على الأرض  
دون أن ننزلق ولما استطاعت القاطرة أن تجر قطارا دون أن تنزلق عجلات القطار . . إلخ .

### الأجسام الملساء والأجسام الخشنة :

تتوقف أى من قوى الفعل ورد الفعل بين جسمين متلامسين على طبيعة هذين الجسمين ، وأيضاً على  
القوى الأخرى المؤثرة عليهما .



شكل (٢)

ففى حالة الأجسام الملساء يكون رد الفعل عموديا على سطح التماس المشترك للجسمين المتلامسين ، أما  
إذا كان الجسمان خشنيين فيكون لقوة رد الفعل مركبة موازية لسطح التماس هى «قوة الاحتكاك» ومركبة  
عمودية على سطح التماس هى «قوة رد الفعل العمودى» أما قوة رد الفعل نفسها ، فتسمى «قوة رد الفعل  
المحصل» ، وفى كثير من الأحيان يستعاض عن قوة رد الفعل المحصل بمركبتها «قوة الاحتكاك وقوة رد  
الفعل العمودى» .

يبين شكل (٢٠) قوة رد فعل نضد على جسم موضوع عليه .

### تجربة عملية :

ضع قطعة مستوية من الخشب على نضد أفقى واربطها بخيط يمر على بكره ملساء عند حافة النضد  
ويتدلى الخيط رأسيا بحامل خفيف للصنج كما فى شكل (٣) .





شكل (٣)

ضع أثقالاً مناسبة على القطعة الخشبية وضع في حامل الصنج ثقلاً صغيراً تلاحظ أن القطعة الخشبية لا تتحرك ، ومعنى ذلك أن قوة الاحتكاك التي أثرت على القطعة الخشبية كانت كافية لمنع الحركة رغم وجود الشد في الخيط  $s$  وكما هو معروف ، فإن مقدار هذا الشد يساوى وزن الحامل ووزن الصنج الموضوعة فيه معا .

زد الصنج الموضوعة على الحامل بالتدريج تلاحظ أن القطعة الخشبية تبدأ في التحرك على النضد عندما تصل الأثقال الموضوعة في الحامل إلى حد معين .

ويعنى هذا أن مقدار قوة الاحتكاك يتزايد كلما تزايد الشد وأنه يصل إلى حد معين لا يتعداه . فإذا زاد الشد عن هذا الحد لم يستطع الاحتكاك موازنته ويبدأ الجسم في الحركة ، ويلاحظ كذلك أنه لو زدنا الأثقال الموضوعة على القطعة الخشبية فإننا نحتاج إلى زيادة الثقل الموضوع في حامل الصنج حتى تصبح القطعة الخشبية على وشك الحركة .

يبين شكل (٣) القوى المؤثرة على القطعة الخشبية وهى :

- ١ - قوة وزن القطعة الخشبية والأثقال الموضوعة عليها ، وسنرمز لمقدار هذه القوة بالرمز  $w$  .
- ٢ - قوة الشد في الخيط ويساوى مقدارها وزن حامل الصنج والصنج الموجودة عليه ، وسنرمز لمقدار الشد بالرمز  $s$  .

- ٣ - قوة الاحتكاك وتوازي النضد ، أى أنها أفقية ، سنرمز لمقدارها بالرمز  $c$  .

- ٤ - قوة رد الفعل العمودى ، وسنرمز لمقدارها بالرمز  $r$  .

عند التوازن تكون قوة الاحتكاك مضادة في الاتجاه لقوة الشد وتكون قوة رد الفعل العمودى مضادة

في الاتجاه لقوة الوزن وتحقق المتساويتان :

$$r = w , c = s$$

نستنتج من التجربة السابقة خواص الاحتكاك الآتية :

## خواص الاحتكاك :

- ١ - تعمل قوة الاحتكاك على معاكسة الحركة فتكون في اتجاه مضاد للاتجاه الذي يميل الجسم إلى التحرك فيه .
- ٢ - كلما تزايد مقدار القوة المماسية التي تعمل على تحريك الجسم ، تزايد مقدار قوة الاحتكاك بحيث يساوى مقدار القوة المماسية مادام الجسم متزنا .
- ٣ - يزداد مقدار قوة الاحتكاك إلى أن يصل حدا لا يتعداه وعندئذ يصبح الجسم على وشك الحركة ويسمى الاحتكاك في هذه الحالة «الاحتكاك النهائي» وعند حدوث الحركة يظل مقدار قوة الاحتكاك مساويا لقيمته العظمى المذكورة سابقا ، أى أن الاحتكاك يظل نهائيا أثناء الحركة .
- ٤ - تكون النسبة بين مقدارى قوة الاحتكاك النهائي ورد الفعل العمودى ثابتة ، وتتوقف على طبيعة الجسمين المتلامسين وليس على شكليهما أو على كتليهما .

## معامل الاحتكاك :

- تسمى النسبة بين مقدارى قوة الاحتكاك النهائي ورد الفعل العمودى «بمعامل الاحتكاك» .
- فإذا رمزنا لمقدار قوة الاحتكاك النهائي بالرمز  $\mu$  ولمقدار قوة رد الفعل العمودى عندئذ بالرمز  $R$  ولمعامل الاحتكاك بالرمز  $m$  فإن :

$$m = \frac{\mu}{R}$$

ومنه نستنتج أن :  $\mu = m R$

- وهذه هي أقصى قيمة يمكن أن يصل إليها مقدار قوة الاحتكاك ، وعلى الطالب أن يتذكر جيدا أن هذه المتساوية تتحقق فقط عند الاحتكاك النهائي

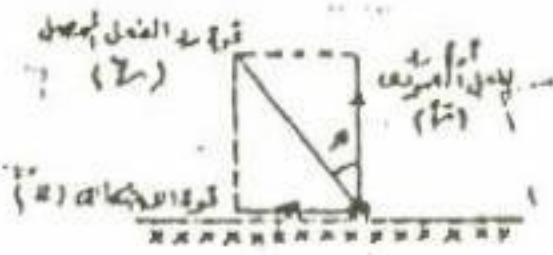
- أى عندما يكون الجسم على وشك الحركة أو متحركا بالفعل ، وعلى ذلك يمكن كتابة المتباينة :

$$m \geq \mu$$



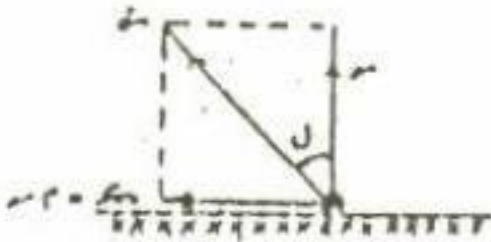
## زاوية الاحتكاك :

ليكن  $r$  مقدار رد الفعل المحصل ، هـ قياس الزاوية المحصورة بين هذه القوة وقوة رد الفعل العمودى كما هو موضح فى شكل (٤) نلاحظ أن قيمة هـ تزايد كلما تزايد مقدار قوة الاحتكاك - بفرض ثبات مقدار قوة رد الفعل العمودى ، وأن هذه القيمة تصل إلى نهايتها العظمى عندما يصل مقدار قوة



شكل (٤)

الاحتكاك إلى قيمته العظمى  $m$  ، أى عندما يصبح الاحتكاك نهائيا . وتسمى الزاوية المحصورة بين قوة رد الفعل المحصل وقوة رد الفعل العمودى عندئذ «بزاوية الاحتكاك» وسنرمز لقياسها بالرمز (ل) شكل (٥).



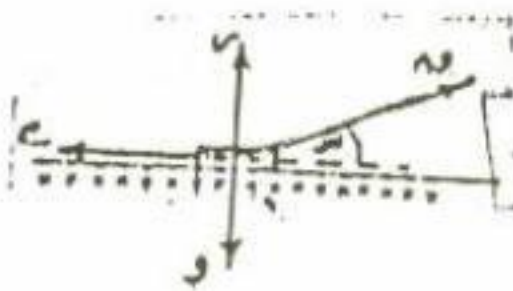
شكل (٥)

وعلى ذلك ، فإن :

$$\tan \alpha = \frac{F}{r} = m$$

أى أن :

«ظل زاوية الاحتكاك يساوى معامل الاحتكاك»



شكل (٦)

اتزان جسم على مستوى أفقى خشن :

يعتبر جسما متزنا على مستوى أفقى خشن وتؤثر عليه قوة مقدارها  $P$  وتميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها هـ كما هو موضح فى شكل (٦) .

القوى المؤثرة على الجسم :

- ١ - قوة الوزن وهى موجهة رأسيا لأسفل وليكن مقدارها  $W$  .
- ٢ - القوة المعطاة  $P$  .
- ٣ - قوة رد الفعل المحصل الناتجة عن تأثير المستوى على الجسم ويمكن تحليلها إلى مركبتين : قوة رد

الفعل العمودى وهى موجهة رأسيا لأعلى ومقدارها  $r$  وقوة الاحتكاك وهى موجهة فى عكس الاتجاه الذى يميل الجسم إلى التحرك فيه ومقدارها  $h$  .

بما أن الجسم يميل إلى التحرك على المستوى تحت تأثير المركبة المماسية ( ذات المقدار  $q \sin \alpha$  ) .  
للقوة  $q \cos \alpha$  ، فإن قوة الاحتكاك تكون موجهة فى عكس اتجاه هذه المركبة كما يبين شكل ( ٦ ) .  
بتحليل القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاهين أحدهما هو اتجاه المركبة المماسية للقوة  $q \cos \alpha$  والآخر عمودى عليه يكتب شرطا الاتزان كالآتى :

$$\begin{aligned} h &= q \sin \alpha \\ r &+ q \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

نحدد هاتان العلاقتان مقدارى قوة رد الفعل العمودى وقوة الاحتكاك أو حتى يظل الجسم ملامسا للمستوى يجب ألا تتلاشى قوة رد الفعل العمودى أى يكون  $r < 0$  .  
∴  $q \cos \alpha < 0$

وإذا كان الجسم على وشك الحركة تحت تأثير المركبة المماسية للقوة  $q \cos \alpha$  فإن الاحتكاك يكون نهائيا وتظل العلاقات السابقة صحيحة مع أخذ  $h = 0$  .

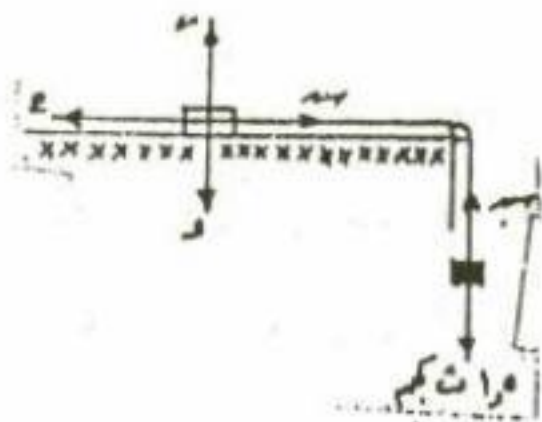
وإذا كانت القوة  $q \cos \alpha$  أفقية ، فإننا نضع  $h = 0$  ، فى العلاقات السابقة

### مثال ( ١ ) :

وضعت كتلة خشبية مقدار وزنها ٦ ث كجم على نضد أفقى وربطت بخيط أفقى يمر على بكره ملساء مثبتة عند حافة النضد ويتدلى من طرفه ثقل مقداره ١,٥ ث كجم . فإذا كانت الكتلة الخشبية متزنة على النضد عين قوة الاحتكاك وقوة رد الفعل العمودى . وإذا علم أن معامل الاحتكاك بين الكتلة والنضد يساوى  $\frac{1}{3}$  ، هل يكون الجسم على وشك الحركة .



## الحل :



شكل (٧)

القوة التي تعمل على تحريك الكتلة الخشبية على النضد هي قوة الشد في الحيط الأفقي ومقدارها ١,٥ ث كجم وتكون قوة الاحتكاك في الاتجاه المضاد لقوة الشد هذه كما يبين شكل

(٧) .

بأخذ  $s = 1,5$  ث كجم ،  $h = 0$  في العلاقات

السابقة نجد :

$$ح = 1,5 \times حتا = 1,5 \text{ ث كجم} .$$

$$ر + 1,5 \text{ حا} = 0 = 6 \text{ ث كجم} .$$

$$\therefore ر = 6 \text{ ث كجم} .$$

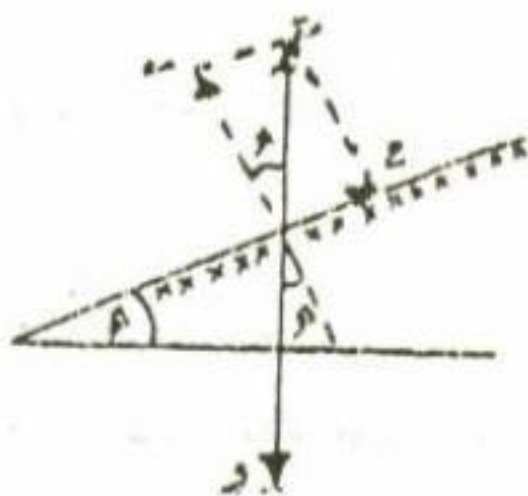
لمعرفة ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا ، نعين أقصى قيمة ممكنة لمقدار قوة الاحتكاك وهي

$$ر م :$$

$$ر م = 6 \times \frac{1}{3} = 2 \text{ ث كجم} .$$

$$\therefore ح > ر م$$

إذن فالاحتكاك غير نهائي ولا تكون الكتلة الخشبية على وشك الحركة على النضد .



شكل (٨)

اتزان جسم على مستوى مائل خشن :

نعتبر جسماً متزاناً على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية

قياسها  $h$  .

يتوزن الجسم على المستوى تحت تأثير قوتين :

١ - قوة وزنه وتعمل رأسياً لأسفل وليكن مقدارها  $و$  .

٢ - قوة رد الفعل المحصل وليكن مقدارها  $ر$  من شرط

الاتزان ينتج أن قوة رد الفعل المحصل تعمل رأسياً لأعلى ويكون :

$$\bar{r} = \bar{w}$$

(١)

ويمكن الآن تعيين قوى الاحتكاك ورد الفعل العمودى بسهولة باعتبارهما مركبتى قوة رد الفعل المحصل .  
فى اتجاهين أحدهما يوازى المستوى والآخر عمودى عليه كما فى شكل (٨) .

**قوة الاحتكاك :**

$$ح = \bar{r} = \bar{w} = و ح ا هـ$$

(٢)

وتعمل هذه القوة على معاكسة الحركة المحتملة ، أى أنها توازى خط أكبر ميل وتكون موجهة لأعلى المستوى .

**قوة رد الفعل العمودى :**

$$ر = \bar{r} = \bar{w} = و ح ا هـ$$

(٣)

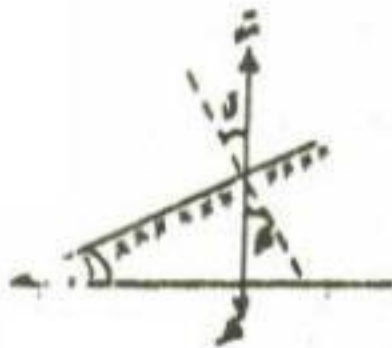
وإذا كان الجسم على وشك الانزلاق ، فإن القاعدة الآتية تتحقق :

**قاعدة :**

إذا وضع جسم على مستوي مائل خشن وكان على وشك الانزلاق فإن قياس زاوية الاحتكاك يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى .

**البرهان**

بما أن الاحتكاك نهائى ، فإن قوة رد الفعل المحصل تصنع .  
مع العمودى على المستوى زاوية قياسها يساوى قياس زاوية  
الاحتكاك وليكن قياسها ل .



شكل (٩)

مما سبق وبالرجوع إلى شكل (٩) ينتج أن :



$$هـ = ل$$

كما يمكن صياغة هذه المتساوية بدلالة معامل الاحتكاك كالاتى :

$$\text{ظا ل} = م$$

### تجربة (١) :

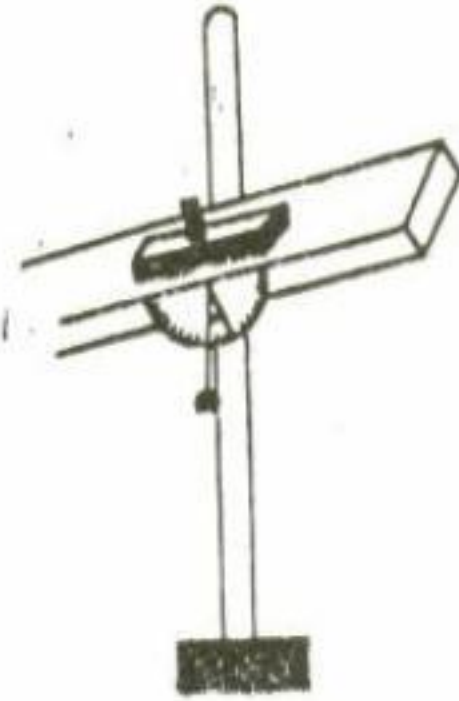
تعيين معامل الاحتكاك بين سطحين متلامسين باستخدام المستوى المائل .

#### الغرض من التجربة :

تعيين معامل الاحتكاك بين سطحين متلامسين معلومين باستخدام المستوى المائل .

#### الأدوات اللازمة :

مستوى خشن - كتلة خشبية أحد أوجهها مستوى والوجه المقابل به حفرة مستطيلة الشكل . حامل  
كابستان بماسك . محور ارتكاز - منقلة - خيط رصاص .



#### إجراء التجربة :

- ١ - اربط محور الارتكاز بماسك الحامل وثبت فيه المستوى .
- ٢ - ثبت المنقلة في المستوى بحيث ينطبق قطرها على حافة المستوى كما في الشكل .

- ٣ - علق خيط الرصاص من مسبار عند مركز المنقلة وبراعى أن يمر الخيط بمنتصف تدريج المنقلة عندما

يكون المستوى أفقياً .

- ٤ - اجعل المستوى في وضع أفقى وضع عليه الكتلة الخشبية بوجهها المستوى ثم ضع ثقلًا مناسباً في الحفرة .
- ٥ - أمل المستوى تدريجياً حتى تبدأ الكتلة في الانزلاق عند طرقها طرقة خفيفاً .
- ٦ - اقرأ تدريج المنقلة عند نقطة انطباق الخيط عليها ومن ذلك أوجد قياس زاوية ميل المستوى على

الأفقى وليكن  $\gamma$  .

٧ - كرر التجربة عدة مرات مع تغيير الثقل الموضوع في الحفرة وتعيين قياس زاوية ميل المستوى في كل مرة .

وسيلاحظ أن هذه الزوايا تكون متساوية القياس على وجه التقريب .

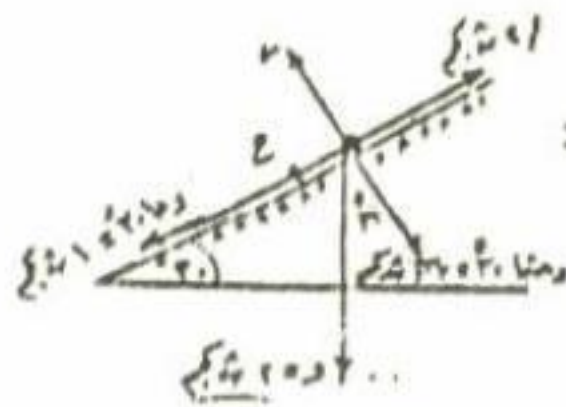
٨ - نخذ متوسط هذه القياسات فيكون هو قياس زاوية الاحتكاك .

٩ - أوجد ظل هذه الزاوية فيكون هو معامل الاحتكاك بين السطحين .

### مثال (٢) :

يتزن لوح من الخشب وزنه ٢ ث كجم على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك بينه وبين اللوح يساوى ٠,٩ تحت تأثير قوة ٢,٥ ث كجم تعمل في خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى . أوجد مقدار قوة الاحتكاك وبين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا ؟ .

### الحل :



شكل (١١)

القوى المماسية التي تعمل على تحريك الجسم على المستوى هي :

١ - المركبة المماسية للوزن وتعمل في خط أكبر ميل لأسفل

ومقدارها = و حا  $= \frac{1}{2} \times 2 = 1$  ث كجم .

٢ - القوة المعطاة وتعمل في خط أكبر ميل للمستوى

لأعلى ومقدارها ٢,٥ ث كجم

ولما كان مقدار القوة الثابتة أكبر من مقدار القوة الأولى ، فإن الجسم يميل إلى التحرك على خط أكبر ميل

للمستوى لأعلى ، وبالتالي يجب أن تعمل قوة الاحتكاك في هذا الخط ولأسفل كما يبين شكل (١٢) .

بما أن الجسم متزن

$$\therefore \text{ح} = 1,5 \text{ ث كجم} .$$

$$\therefore 2,5 = 1 + \text{ح}$$

أيضا

$$\text{ح} = \text{و حتا} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3} \text{ ث كجم} = 1,732 \text{ ث كجم}$$



لمعرفة ما إذا كان الاحتكاك نهائياً أولاً : نحسب أقصى قيمة ممكنة لقوة الاحتكاك

$$f_m = 0.9 \times 1.732 = 1.559 \text{ ث كجم}$$

ح  $f_m > f$  أى ان الاحتكاك غير نهائى ولا يكون الجسم على وشك الحركة .

### مثال (٢) :

جسم وزنه ٧٦ نيوتن يكون على وشك الحركة تحت تأثير وزنه إذا وضع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها  $\frac{1}{4}$  فإذا وضع هذا الجسم على مستوى أفقى فى نفس خشونة المستوى المائل واثرت فيه قوة شد إلى أعلى تصنع مع الأفقى زاوية جيبها  $\frac{3}{5}$  وتقع فى مستوى رأسى فجعلته على وشك الحركة . أوجد مقدار هذه القوة ومقدار رد الفعل العمودى .

### الحل :

معامل الاحتكاك = ظل زاوية ميل المستوى على الأفقى =  $\frac{1}{4}$  .

∴ الجسم على وشك الحركة على المستوى الأفقى .

∴ الاحتكاك يكون نهائياً ويساوى  $\frac{1}{4} R$

وبالتحليل فى اتجاهى المستوى والعمودى عليه

$$R \sin \theta = \frac{1}{4} R$$

$$\sin \theta = \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\sin \theta = \frac{16}{20}$$

$$R \sin \theta + R \cos \theta = 76$$

$$R \sin \theta + R \cos \theta = 76$$

$$R \sin \theta - 76 = R \cos \theta$$

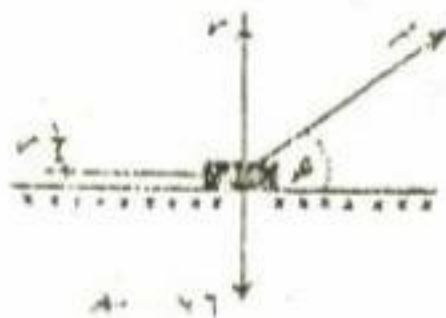
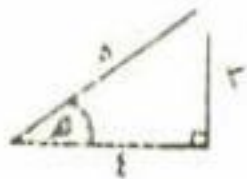
وبالتعويض من (١) فى (٢)

$$\frac{16}{20} - 76 = R \cos \theta$$

$$R \cos \theta = 76 - \frac{16}{5}$$

$$R \cos \theta = 20 \text{ نيوتن}$$

$$R \sin \theta = 20 \times \frac{16}{5} = 64 \text{ نيوتن}$$



شكل (١٢)

(١)

(٢)

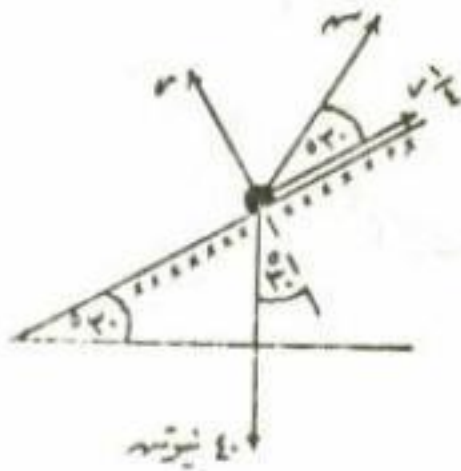
#### مثال ( ٤ ) :

وضع جسم وزنه ٤٠ نيوتن على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ثم شد الجسم إلى أعلى بواسطة خيط وإقع فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل وفى اتجاه يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع المستوى .

فإذا كان معامل الاحتكاك يساوى  $\frac{1}{4}$  فبرهن على أن أقل قيمة للشد فى الخيط تمنع الجسم من الحركة إلى أسفل المستوى تساوى ١٥,٣ نيوتن تقريبا .

#### الحل :

حيث أن الجسم على وشك الحركة إلى أسفل المستوى فإن الاحتكاك يكون نهائيا ويعمل إلى أعلى المستوى وتكون القوى المؤثرة على الجسم كما فى شكل (١٣) هى :



- ١ - الوزن ٤٠ نيوتن رأسيا إلى أسفل .
- ٢ - رد الفعل العمودى  $R$  عموديا على المستوى .
- ٣ - الاحتكاك النهائى  $\frac{1}{4} R$  إلى أعلى المستوى .
- ٤ - الشد فى الخيط  $S$  يميل بزاوية قياسها ٣٠°

على المستوى ويكون هو أقل شد يمنع الجسم من الانزلاق . شكل (١٣)

وبالتحليل فى اتجاهى المستوى والعمودى عليه نجد من شروط الاتزان أن :

$$\frac{1}{4} R + S \cos 30^\circ - 40 \sin 30^\circ = 0$$

$$R + S \cos 60^\circ - 40 \cos 30^\circ = 0$$

بضرب (١) فى ٤ وطرح (٢) من المعادلة الناتجة نجد أن :

$$4S \cos 30^\circ - S \cos 60^\circ = 160 \cos 30^\circ - 40 \cos 30^\circ$$



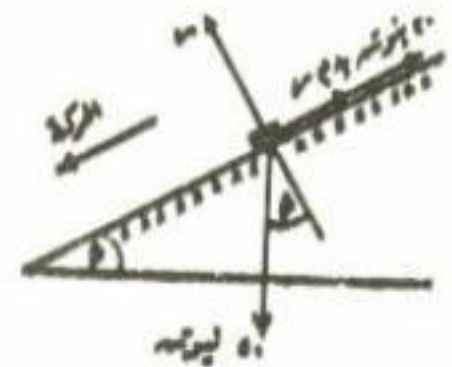
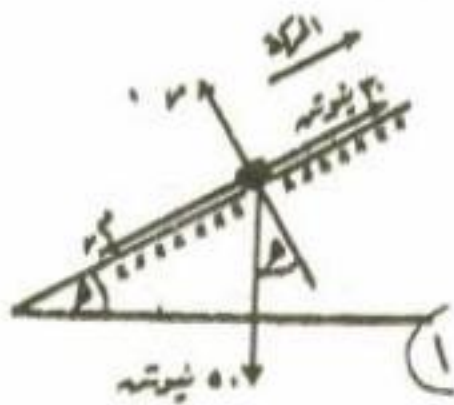
$$س \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \times 40 - \frac{1}{2} \times 160 \right) = \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 \right)$$

$$س = \frac{\sqrt{3} \times 20 - 80}{\frac{1}{2} - \sqrt{3} \times 2} = \frac{40,36}{2,964} = 13,6 \text{ نيوتن تقريبا}$$

### مثال (٥) :

وضع جسم مقدار وزنه ٥٠ نيوتن على مستوى مائل خشن تؤثر عليه قوة  $\mathcal{V}$  في اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى . فإذا علم أن الجسم يكون على وشك الحركة إلى أعلى المستوى عندما  $\mathcal{V} = 30$  نيوتن وتكون على وشك الحركة إلى أسفل عندما  $\mathcal{V} = 20$  نيوتن فأوجد معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى .

### الحل :



شكل (١٤)

(أولاً) عندما  $\mathcal{V} = 30$  نيوتن يكون الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى ويكون الاحتكاك نهائياً ويعمل إلى أسفل المستوى .

وبالتحليل في اتجاهي المستوى والعمودي عليه نجد من شروط الاتزان أن :

$$س = 50 \text{ حثا هـ} \quad (1) \quad 30 = م + س + 50 \text{ حا هـ} \quad (2)$$

(ثانياً) عندما  $\mathcal{V} = 20$  نيوتن يكون الجسم على وشك الحركة إلى أسفل المستوى ويكون الاحتكاك نهائياً ويعمل إلى أعلى مستوى .

وبالتحليل في اتجاهي المستوى والعمودي عليه نجد من شروط الاتزان أن :

$$r = 50 \text{ حتا هـ} \quad (3) \quad , \quad 20 + r = 50 \text{ حا هـ} \quad (4)$$

$$\text{بجمع (2) ، (4) } 50 = 100 \text{ حا هـ} \quad \frac{1}{2} = \text{حا هـ} \quad 30 = \text{هـ}$$

$$\text{وبالتعويض في (1) } r = 50 \text{ حتا هـ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 50 = 30 \text{ نيوتن}$$

$$\text{وبالتعويض في (2) } 30 = \frac{1}{2} \times 50 + \sqrt{3} \times 25 \times r$$

$$\sqrt{3} \times 25 = 0 \quad \therefore \frac{\sqrt{3}}{10} = r$$

### مثال (6) :

وضع جسم مقدار وزنه و على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ فوجد أنه على وشك الانزلاق . أثبت أن أقل قوة توازى خط أكبر ميل للمستوى وتجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى تساوى ٢ و حا ي . أثبت أيضاً أن مقدار رد الفعل المحصل يساوى و .

### الحل :

$$m = \text{ظا هـ} \quad (1)$$

وبالتحليل في اتجاهي المستوى والعمودي عليه

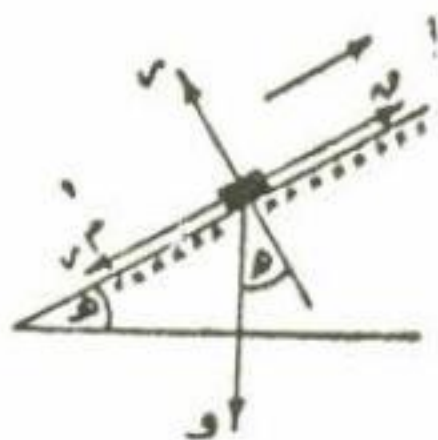
وكتابة شرطى الاتزان :

$$r = \text{و حتا هـ} \quad (2)$$

$$r + m = \text{و حا هـ} \quad (3)$$

وبالتعويض من (1) ، (2) في (3)

$$\therefore r = \text{ظا هـ} \times \text{و حتا هـ} + r \text{ حا هـ}$$



شكل (١٥)



لحساب مقدار رد الفعل المحصل نلاحظ أن قياس زاوية الاحتكاك يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى :  $ل = هـ$

$$\therefore \bar{r} = \frac{\sqrt{\text{حتا ل}}}{\sqrt{\text{حتا هـ}}} = \frac{\sqrt{\text{حتا هـ}}}{\sqrt{\text{حتا هـ}}} = 1$$

### مثال (٧) :

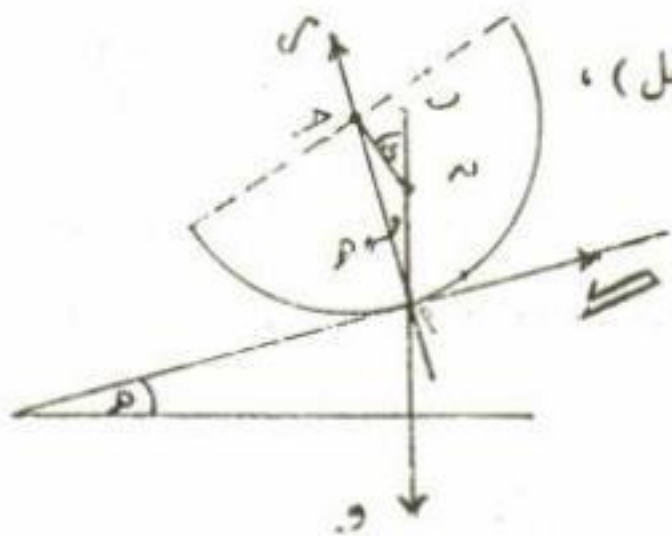
نصف كرة ملساء متجانسة طول نصف قطرها  $٣$  تركز بسطحها المنحنى على مستوى خشن معامل الاحتكاك بينهما  $٣$  ويميل المستوى على الأفقى بزاوية قياسها  $هـ$ .

أثبت أنه عندما يكون نصف الكرة على وشك الانزلاق فإن زاوية الاحتكاك  $هـ = ٣$  وأن السطح المستوى

$$\frac{٢٨}{١ + ٣\sqrt{٣}} = \text{حيث حـ اى}$$

علما بأن مركز ثقل نصف الكرة يقع على نصف القطر العمودى على سطحها المستوى من مركزه وعلى بعد  $\frac{٣}{٨}$  طول نصف القطر من هذا المركز.

### الحل :



شكل (١٦)

نصف الكرة تزن تحت تأثير ثلاث قوى هى  $ر$  (رد الفعل) ،

$هـ$  (قوة الاحتكاك النهائى) ، وزن الكرة (مقداره  $و$ ) .

وهى تتقاطع فى نقطة  $م$  كما فى الشكل .

رد الفعل  $ر$  عمودى على المستوى المماس لنصف

الكرة يمر بمركزها  $حـ ا$   $و = (حـ م ا) = هـ$

بالتحليل فى اتجاه المستوى والعمودى عليه نجد أن

$$(١) \quad هـ = و \text{ حـ ا}$$

$$(٢) \quad ر = و \text{ حتا هـ}$$

$$\text{بالقسمة} \quad \frac{هـ}{ر} = \frac{\text{حـ ا}}{\text{حتا هـ}} \quad م = \text{طا هـ} \quad ل = هـ$$

زاوية ميل القاعدة المستوية لنصف الكرة مع الأفقى تساوى الزاوية التى يصنعها حركه مع الرأس أى أن

ۛ ( > ح ن ب ) = ی

في  $\Delta$  حـ م : حـ م = حـ م ،  $\frac{3}{8} = حـ م$  ،  $ص = (حـ م) 8 = حـ م$

$$\frac{\frac{28}{1+2\sqrt{2}}}{\frac{2}{8}} = \frac{8}{\text{حای}} = \text{حای} \quad \therefore \frac{8}{3} = \text{حای}$$





لدينا ثلاث قوى ٢ ، ٤ ، ح واقعة في مستوى واحد ومتزنة فتكون ح مساوية ومضادة لمحصلة القوتين ٢ ، ٤ نيوتن .

$$H = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \text{ حتا هـ}$$

$$H = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2 \times 2 \times 4 \times \cos 120^\circ}$$

$$H = \sqrt{4 + 16 - 8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ نيوتن}$$

نفرض أن م معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى ، ∴ ح قوة احتكاك غير نهائى

$$\therefore m < H \quad \therefore \mu < \frac{H}{V} \quad \mu < \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \mu < 1.155 \quad \therefore \mu < 1.155$$

$$\text{عندما } \mu = 1.155 \quad \mu = 1.155 \quad \mu = 1.155$$

$$H = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2 \times 2 \times 4 \times \cos 120^\circ} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{H}{V} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1.155 \quad \therefore \mu = 1.155$$

وحيث أن اتجاه الاحتكاك يكون في عكس اتجاه الحركة المحتملة فإن الاتجاه الذى يوشك أن يتحرك فيه الجسم هو في عكس اتجاه ح أى في الاتجاه الذى يميل على ١٢٠ بزاوية قياسها هـ حيث :

$$\frac{H}{V} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1.155 \quad \therefore \mu = 1.155$$

## تصارين (١)

- ١ - جسم مقدار وزنه ٢٤٠ ث كجم موضوع على مستوى أفقى خشن ويراد شده بحبل يميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠° فإذا كان معامل الاحتكاك يساوى ٣ ، فأوجد أقل مقدار للشد يلزم لجعل الجسم على وشك الحركة مقرباً لرقمين عشرين .
- ٢ - وضع جسم مقدار وزنه ٣ نيوتن على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك بينه وبين الجسم يساوى  $\frac{2}{3}$  أثرت على الجسم قوة تعمل فى خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى ومقدارها ٢ نيوتن . فإذا كان الجسم متزناً ، عين قوة الاحتكاك وبين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا .
- ٣ - وضع جسم مقدار وزنه ٤ نيوتن على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك بينه وبين الجسم يساوى  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$  أثرت على الجسم قوة تعمل فى خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى ومقدارها  $\frac{1}{4}$  نيوتن ، فإذا كان الجسم متزناً ، عين قوة الاحتكاك وبين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا .
- ٤ - جسم مقدار وزنه ٣٨ نيوتن يكون على وشك الحركة تحت تأثير وزنه إذا وضع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها  $\frac{1}{5}$  فإذا وضع هذا الجسم على مستوى أفقى فى نفس خشونة المستوى المائل وأثرت فيه قوة شد إلى أعلى تصنع مع الأفقى زاوية جيبها  $\frac{4}{5}$  فجعلته على وشك الحركة . أوجد مقدار هذه القوة ومقدار رد الفعل العمودى .
- ٥ - وضع جسم مقدار وزنه ١٩٠ نيوتن على مستوى مائل ظل زاوية ميله الأفقى هى  $\frac{5}{12}$  ومعامل الاحتكاك بينه وبين الجسم يساوى  $\frac{1}{4}$  . أوجد مقدار أقل قوة أفقية واقعة فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل فى المستوى المعلوم التى تجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى .
- ٦ - وضع جسم مقدار وزنه ٣٠ نيوتن على مستوى مائل خشن . لوحظ أن الجسم يكون على وشك الانزلاق إذا كان المستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° فإذا أريد زيادة ميل المستوى إلى ٦٠°



فأوجد مقدار أقل قوة تؤثر في الجسم موازية لخط أكبر ميل في المستوى .  
( أولاً ) لتمنعه من الانزلاق .

( ثانياً ) لتجعله على وشك الحركة إلى أعلى المستوى .

٧ - وضع جسم مقدار وزنه ٢ ث كجم على مستوى أفقى خشن ثم أميل المستوى بالتدريج فأوشك الجسم على الانزلاق عندما أصبحت زاوية ميل المستوى على الأفقى قياسها  $30^\circ$  برهن على أن معامل الاحتكاك يساوى  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  .

وإذا ربط الجسم عندئذ في خيط يقع في المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل وشد الخيط في اتجاه يميل على الأفقى بزاوية قياسها  $60^\circ$  حتى أوشك الجسم على الحركة إلى أعلى المستوى فأوجد مقدار قوة الشد وبرهن على أن مقدار قوة الاحتكاك يساوى  $\frac{1}{4}$  ث كجم .

٨ - وضع جسم مقدار وزنه ٢٠ نيوتن على مستو مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها يساوى  $\frac{4}{3}$  فإذا كان  $\mu$  هو مقدار أقل قوة موازية لخط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى وتمنع الجسم من الانزلاق لأسفل ،  $\mu$  هو مقدار أقل قوة أفقية تمنعه أيضاً من الانزلاق لأسفل وكان  $\mu = \mu$  فأوجد معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى ومقدار أى من القوتين .

٩ - مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية جيب تمامها يساوى  $\frac{5}{13}$  . وضع عليه جسم مقدار وزنه ١٣٠ نيوتن وأثرت عليه قوة في اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى . فإذا كان معامل الاحتكاك يساوى  $\frac{2}{5}$  فأوجد النهايتين اللتين ينحصر بينهما مقدار القوة التى تجعله على وشك الحركة على المستوى.

١٠ - وضع جسم مقدار وزنه ( و ) على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ فإذا كانت زاوية الاحتكاك قياسها ي فأوجد :

( أولاً ) اتجاه ومقدار أقل قوة يجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى .

( ثانياً ) إذا كانت هـ < ي فأوجد مقدار واتجاه أقل قوة واقعة في المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل تكفى لمنع انزلاق الجسم إلى أسفل .

١١ - جسم مقدار وزنه ( و ) موضوع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ وكانت

٢ هي أقل قوة تكفي لجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى ، أثبت أن أقل مقدار لقوة موازية للمستوى المائل تؤثر على الجسم وتجعله على وشك الحركة إلى أعلى تساوي  $\sqrt{1 + m^2}$  حيث  $m$  معامل الاحتكاك.

١٢ - جسم مقدار وزنه ( و ) موضوع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ ، وقياس زاوية الاحتكاك ل . أثرت على الجسم القوة  $\vec{Q}$  في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى وتمنعه من الانزلاق . أثبت أن  $\vec{Q} = \frac{W(h-l)}{l}$  .

١٣ - وضع جسم كتلته ٤ كجم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك بينه وبين المستوى  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  بين ما إذا كان الجسم ينزلق على المستوى أو يكون على وشك الانزلاق أو أن الاحتكاك غير نهائي ، ثم أوجد مقدار واتجاه قوة الاحتكاك عندئذ . وإذا أثرت على الجسم قوة موازية لخط أكبر ميل للمستوى فأوجد مقدار واتجاه هذه القوة :  
( أولاً ) ليكون الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى .  
( ثانياً ) ليكون الجسم على وشك الحركة إلى أسفل المستوى .

١٤ - وضع جسم مقدار وزنه ( و ) على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ أكبر من قياس زاوية الاحتكاك ( ل ) . فإذا كان مقدار أقل قوة أفقية تكفي لمنع الجسم من الانزلاق يساوي ( و ) ومقدار أقل قوة أفقية تجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى يساوي ( و  $\sqrt{3}$  ) أوجد قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى وقياس زاوية الاحتكاك . ومقدار واتجاه أقل قوة تجعل الجسم متزاناً .

١٥ - وضع جسم وزنه ( و ) على مستوى أفقى خشن وأثرت عليه في نفس المستوى قوتان متعامدتان  $\vec{Q}_1$  ،  $\vec{Q}_2$  فبقى الجسم متزاناً . أثبت أن معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى يجب ألا يقل عن

$$\frac{1}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}}$$

وإذا كانت  $\frac{1}{\sqrt{3}} = \mu$  و  $m = 1$  ،

وزيدت  $\mu$  تدريجياً إلى أن أصبح الجسم على وشك الحركة فأوجد قيمة  $\mu$  عندئذ وعين الاتجاه الذي يوشك أن يبدأ الجسم الحركة فيه .