

TURBOMACHINES¹

Série d'Exercices N° 2

Données générales: $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $p_a = 100 \text{ kPa}$, $p_v = 2.4 \text{ kPa}$

Exercice 1

Une pompe centrifuge a les spécifications suivantes:

$r_2 = 200 \text{ mm}$, $b_2 = 40 \text{ mm}$, $\beta_2 = 50^\circ$. La pompe tourne à 1500 rpm et délivre $600 \text{ m}^3/\text{h}$.

Pour une entrée sans prérotation, estimer la hauteur et la puissance théorique de la pompe.

Exercice 2

Une pompe centrifuge a les spécifications suivantes:

$r_1 = 15 \text{ cm}$, $r_2 = 30 \text{ cm}$; $b_1 = 75 \text{ mm}$, $b_2 = 50 \text{ mm}$; $\beta_1 = 20^\circ$, $\beta_2 = 10^\circ$; $N = 1200 \text{ rpm}$

Si le fluide utilisé est de l'eau, déterminer (Q,H,P) théoriques de la pompe.

Répéter la question si le fluide utilisé est de l'huile ($\rho = 840 \text{ kg/m}^3$).

Exercice 3

Une pompe centrifuge a une largeur d'aube constante de 6 cm, avec :

$D_1 = 12 \text{ cm}$ et $D_2 = 40 \text{ cm}$; $\beta_1 = 40^\circ$ et $\beta_2 = 10^\circ$

La pompe tourne à 900 rpm et le rendement total est 85%. Estimer:

- 1- Le débit
- 2- L'élévation de pression totale
- 3- La puissance réelle requise

Exercice 4

La roue d'une pompe présente les spécifications suivantes:

$D_1 = 51 \text{ mm}$, $D_2 = 406 \text{ mm}$; $b_1 = b_2 = 64 \text{ mm}$, $N = 900 \text{ rpm}$; $\beta_1 = 15^\circ$, $\beta_2 = 7^\circ$

En supposant une entrée sans prérotation et un rendement de 89%, calculer:

- 1- Le débit à travers la pompe
- 2- L'élévation de pression totale à travers la pompe.
- 3- La puissance transférée au fluide.
- 4- La puissance fournie à la roue.

Exercice 5

Une pompe centrifuge tournant à 950 rpm a une roue de diamètre extérieur 0.6 m et intérieur de 0.3 m et un angle d'aube à la sortie de 46° . La vitesse radiale de 3.5 m/s est constante.

Pour une entrée sans prérotation, calculer :

- 1- L'angle d'écoulement à la sortie.
- 2- La hauteur délivrée par la pompe.

Exercice 6

Un essai sur une pompe de diamètre 20 cm et tournant à 1500 rpm, a permis de tirer la caractéristique suivante : $H[\text{m}] = 90 - 350 Q - 500 Q^2$, $Q [\text{m}^3/\text{s}]$

Au point optimum, le débit d'eau est $360 \text{ m}^3/\text{h}$ et la puissance requise 65 kW.

- 1- Quel est le rendement maximum de la pompe.
- 2- Quelle est sa vitesse spécifique et en déduire son type.

Une pompe similaire à la précédente avec $D = 5 \text{ cm}$ et $N = 1800 \text{ rpm}$, doit délivrer 2.5 l/s d'essence ($\rho = 680 \text{ kg/m}^3$) pour un rendement de 60 %.

- 3- Quelle est la puissance requise pour entraîner cette pompe.
- 4- Donner la caractéristique $H'(Q')$ de cette pompe.

Exercice 7

Une pompe de diamètre 30 cm et tournant à 1500 rpm a la caractéristique suivante :

$$H[m] = 25 - 3Q - 60 Q^2, \quad Q [m^3/s]$$

Au point optimum, la hauteur est 18 m et le rendement 74 %.

1- Déterminer le débit et la puissance requise au point optimum.

2- Calculer la vitesse spécifique et en déduire le type de la pompe.

Une pompe de la même famille et tournant à 800 rpm doit délivrer $2 \text{ m}^3/\text{s}$ d'huile ($\rho = 840 \text{ kg/m}^3$) à son point optimum.

3- Déterminer le diamètre de cette pompe. En déduire la puissance requise.

4- Donner la caractéristique $H'(Q')$ de cette pompe.

Exercice 8

Les résultats de tests effectués sur une pompe tournant à 1500 rpm sont présentés sur le tableau suivant :

Q. m^3/h	46	138	230
H m	64	42	8
η %	50	64	10

1- En supposant une variation quadratique des caractéristiques (c'est-à-dire $f(Q) = a + bQ + cQ^2$), établir les expressions de $H(Q)$ et $\eta(Q)$ de la pompe en déterminant les constantes a, b et c correspondantes.

2- Déterminer le point optimum de la pompe et donner les valeurs correspondantes du débit, hauteur et puissance.

3- Déterminer la vitesse spécifique de la pompe et en déduire son type.

Exercice 9

Les résultats de tests effectués sur la pompe tournant à 1500 rpm sont présentés sur le tableau suivant :

Q L/s	0	60	160
H m	75	63	23
η	0	0.672	0.512

1- En supposant une variation quadratique des paramètres (c'est à dire $[H; \eta] = a + bQ + cQ^2$), déterminer les caractéristiques réelles de la pompe $H = f(Q)$ et $\eta = g(Q)$.

2- Déterminer le point optimum de la pompe et donner les valeurs correspondantes du débit, hauteur et puissance. Donner la vitesse spécifique de la pompe.

La pompe est utilisée pour remplir en eau, à partir d'un puits, un réservoir de 5000 m^3 située 10 m plus haut. La canalisation est constituée d'un tube de diamètre 125 mm et de coefficient de frottement $f = 0.02$, et comportant aussi deux (2) coudes de coefficient de pertes de charge singulières k égal à 0.5 chacun. Longueur de canalisation = 25m.

3- Quel est le débit à travers l'installation, la puissance fournie et le temps de remplissage.

4- La conduite d'aspiration est de 5 m de longueur et comportant un seul coude. A quelle altitude maximale du puits peut-on installer la pompe sans risque de cavitation. $NPSH = 1 \text{ m}$.

Exercice 10

On donne les spécifications suivantes d'une pompe centrifuge :

$D_1 = 20 \text{ cm}$, $D_2 = 60 \text{ cm}$, $b_1 = 25 \text{ mm}$, $b_2 = 14 \text{ mm}$, $\beta_1 = 40^\circ$, $\beta_2 = 20^\circ$, $N = 1800 \text{ rpm}$

1- Déterminer la hauteur et le débit théoriques de la pompe.

2- Les caractéristiques réelles de la pompe sont les suivantes :

$$H = 200 + 234 Q - 1730 Q^2 [m]$$

$$\eta = Q (8.4 - 20 Q) [m^3/s]$$

Déterminer la vitesse spécifique de la pompe.

Cette pompe est utilisée pour remplir un réservoir situé 50 m au-dessus de la source. La longueur de la conduite est 200 m et le diamètre 20 cm. Le coefficient de frottement est de 0.02. La conduite comporte une seule vanne de coefficient de pertes de charge singulières K .

3- Quelle est la valeur de K pour que le débit à travers l'installation soit de 972 m³/h. En déduire la puissance fournie.

4- La longueur de la conduite entre la source et la pompe est de 15 m sans comporter la vanne.

A quelle altitude doit-on placer la pompe pour éviter la cavitation. Le NPSH est donné par:

$$\text{NPSH} = QH/40 \text{ [m]}$$

5- Que devient le débit à travers l'installation si deux de ces pompes y étaient placées et assemblées en parallèle. En déduire la puissance de chacune de ces pompes.

Exercice 11

Une pompe centrifuge a les spécifications suivantes:

$D_1 = 30 \text{ cm}$, $b_1 = 60 \text{ mm}$, $\beta_1 = 40^\circ$ - $D_2 = 60 \text{ cm}$, $b_2 = 60 \text{ mm}$, $\beta_2 = 30^\circ$ - $N = 1500 \text{ rpm}$

1- Tracer les triangles des vitesses à l'entrée et à la sortie de la roue.

2- Déterminer la hauteur et le débit théoriques. En déduire la puissance théorique.

3- Tracer, sur la figure 1, les caractéristiques théoriques $H_{th} = f(Q)$ et $\eta = g(Q)$. Commenter.

Les caractéristiques réelles de la pompe sont données graphiquement sur la figure 1.

4- En déduire la vitesse spécifique.

La pompe est destinée à opérer dans une installation comportant les éléments suivants:

Différence d'altitude: 20 m, capacité du réservoir : 20 000 m³

Conduite: diamètre 30 cm, longueur 100 m, coefficient de frottement $f = 0.02$, 1 coude $k = 0.5$

5- Tracer, sur la même figure, la caractéristique **Hauteur-Débit** de l'installation.

6- En déduire le débit de fonctionnement, la puissance fournie et le temps nécessaire pour remplir le réservoir.

7- Quel serait le débit à travers l'installation si deux de ces pompes, assemblées en parallèle, y étaient installées.

Exercice 12

On donne les spécifications suivantes d'une pompe centrifuge :

$D_1 = 20 \text{ cm}$, $D_2 = 40 \text{ cm}$, $b_1 = b_2 = 40 \text{ mm}$, $\beta_1 = 10^\circ$, $\beta_2 = 5^\circ$, $N = 2500 \text{ rpm}$

1- Pour une entrée sans prérotation, déterminer le débit et la hauteur théoriques de la pompe.

Les caractéristiques réelles de la pompe sont données sur la figure 2.

2- A partir de la figure, déterminer le point optimum (Q, H, P) de la pompe. En déduire la vitesse spécifique.

La pompe est utilisée pour remplir en eau, à partir d'une source, un château d'eau située 60 m plus haut. L'installation comporte une conduite et une vanne de coefficient de pertes de charge singulières K . La conduite est formée d'un tube de diamètre $d = 150 \text{ mm}$, de longueur $L = 102 \text{ m}$ et de coefficient de frottement $f = 0.02$.

3- Que doit être la valeur de K pour que le point de fonctionnement corresponde au point optimum.

4- On prend par la suite $K = 2$. Tracer sur le graphe, la courbe **Hauteur-Débit** de l'installation.

5- Déterminer le point de fonctionnement. Donner les valeurs correspondantes de (Q, H, P) .

6- La conduite d'aspiration a 10 m de longueur et ne comporte pas la vanne. A quelle altitude maximale de la source peut-on installer la pompe sans risque de cavitation. NPSH est égal à 1 m.

Deux de ces pompes sont assemblées en parallèle et placées dans l'installation.

7- Tracer sur la figure, la courbe caractéristique **Hauteur-Débit** des pompes assemblées.

8- En déduire le nouveau point de fonctionnement et donner les valeurs correspondantes de (Q, H, P) de chaque pompe.

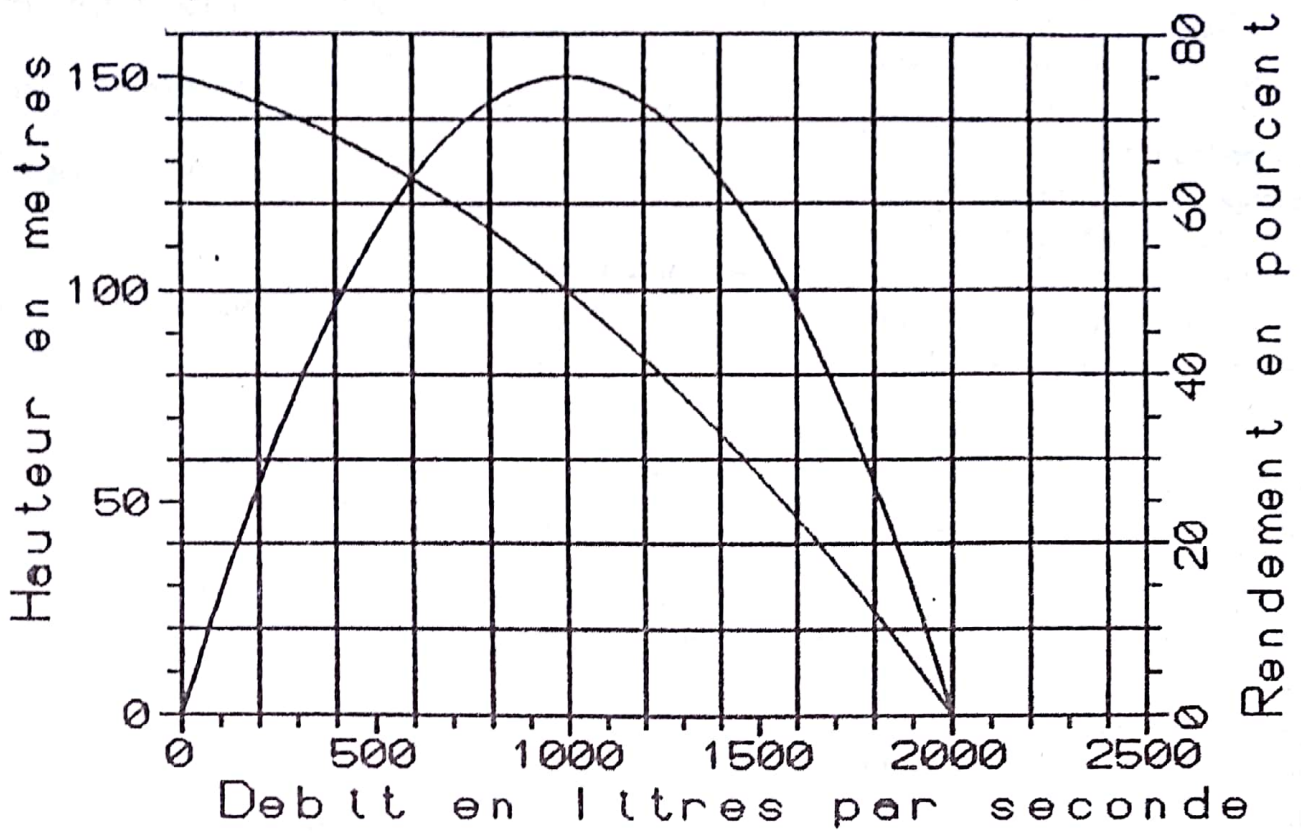


Figure 1

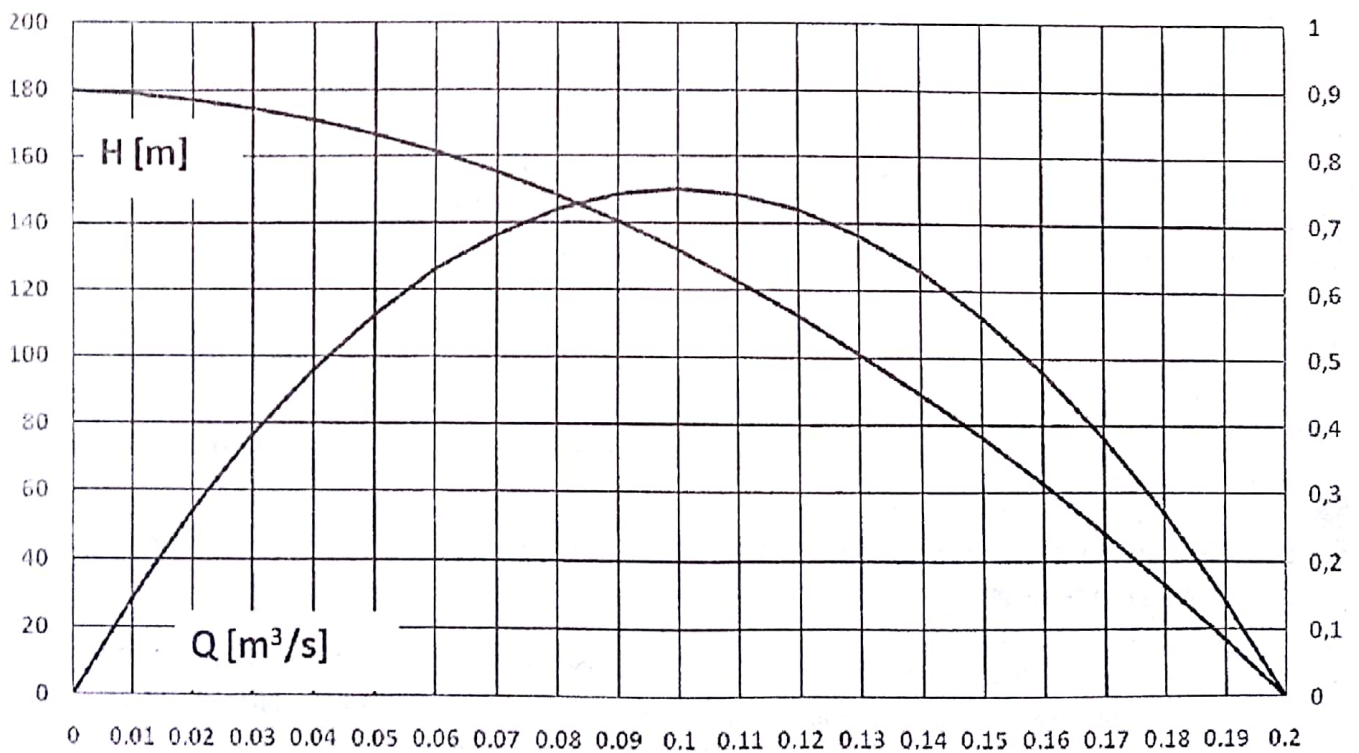


Figure 2

Séance 02:

Ex 02:

* Calculer " Q_{th} " de la pompe.

$$Q_{th} = C_{im} \times S_1 = C_{im} \times S_2$$

$$S_1 = 2\pi r_1 b_1 ; S_2 = 2\pi r_2 b_2$$

* C_{im} ? :

$$T_g(\beta_1) = \frac{C_{im}}{u_1} \Rightarrow C_{im} = T_g(\beta_1) \times u_1$$

$$\text{or: } u_1 = \Omega \cdot r_1 = \frac{2\pi N}{60} \times r_1 = \frac{\pi \times 1200}{30} \times 75 \cdot 10^{-2}$$

$$u_1 = 13,85 \text{ m/s}$$

$$C_{im} = T_g(\beta_1) \times u_1 = T_g(20^\circ) \times 13,85$$

$$C_{im} = 6,86 \text{ m/s}$$

donc :

$$Q_{th} = C_{im} \times S_1 = C_{im} \times 2\pi r_1 b_1$$

$$= 6,86 \times 2 \cdot \pi \times 75 \cdot 10^{-2} \times 15 \cdot 10^{-3}$$

$$Q_{th} = 0,49 \text{ m}^3/\text{s}$$

* Calculer "HTR" de la pompe :

$$HTR = \frac{C_{2u} \times U_2}{g}$$

$$\text{or: } U_2 = R \cdot \omega = \frac{\pi \cdot N}{30} \times r_2 = \frac{\pi \times 7200}{30} \times 30 \cdot 10^{-2}$$

$$U_2 = 37,69 \text{ m/s}$$

$$\text{tg}(\beta_2) = \frac{C_{2u}}{U_2 - C_{2u}} \Rightarrow C_{2u} = U_2 \Rightarrow \frac{C_{2u}}{\text{tg}(\beta_2)} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{or } Q_{TR} &= C_{2u} \times S_2 \Rightarrow C_{2u} = \frac{Q_{TR}}{S_2} = \frac{Q_{TR}}{2\pi \cdot r_2 \cdot b_2} \\ &= \frac{0,49}{2\pi \times 30,5^2 \times 50 \cdot 10^{-3}} \end{aligned}$$

$$C_{2u} = 5,79 \text{ m/s}$$

$$\text{de (1): } C_{2u} = U_2 \cdot \frac{C_{2u}}{\text{tg}(\beta_2)} = 37,69 \cdot \frac{5,79}{\text{tg} 50^\circ}$$

$$C_{2u} = 8,25 \text{ m/s}$$

$$HTR = \frac{C_{2u} \times U_2}{g} = \frac{8,25 \times 37}{9,8}$$

$$HTR = 37,09 \text{ m}$$

• Calculer " P_{th} " de la pompe :

$$\eta_{th} = 1 \Rightarrow P_{th} = P_R = \rho \cdot g \cdot H_{th} \cdot Q_{th} \\ = 10^3 \times 10 \times 37,09 \times 0,49$$

$$P_{th} = 752\,367,83 \text{ watt}$$

• Calculer " P_{th} " de la pompe si le fluide utilisé est de l'huile ($\rho = 840 \text{ kg/m}^3$):

$$P_{th} = \rho_{huile} \times g \cdot H_{th} \cdot Q_{th} \\ = 840 \times 10 \times 37,09 \times 0,49$$

$$P_{th} = 727\,966,44 \text{ watt}$$

Exo 4:

1. Calculer le débit à travers la pompe:

$$Q = C_m \times S_1 = 2\pi r_1 b_1 \times C_m = \pi D_1 b_1 \times C_m$$

$$C_m = U_1 \cdot \tan(\beta_1)$$

$$U_1 = \Omega r_1 = \frac{\pi N}{30} \times \frac{D_1}{2} = \frac{\pi \times 900}{30} \times \frac{51 \cdot 10^{-3}}{2}$$

$$U_1 = 2,4 \text{ m/s}$$

$$C_m = U_1 \cdot \tan(\beta_1) = 2,4 \times \tan(15^\circ)$$

$$C_m = 0,64 \text{ m/s}$$

$$Q = \pi D_1 b_1 \times C_m = \pi \times 51 \cdot 10^{-3} \times 64 \cdot 10^{-3} \times 0,64$$

$$Q = 6,59 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

2. Calculer l'élévation de pression totale à travers la pompe:

$$\Delta P_t = P_2 - P_1 = \rho \cdot g \cdot H = \rho \cdot g \cdot \frac{U_2 C_m}{g} = \rho \cdot U_2 \cdot C_m$$

$$U_2 = \frac{\pi N}{30} \times \frac{D_2}{2} = \frac{\pi \cdot 900}{30} \times 406 \cdot 10^{-3}$$

$$U_2 = 79,13 \text{ m/s}$$

$$C_m = U_2 = \frac{C_m}{\tan(\beta_2)}$$

$$C_m = \frac{Q}{S_2} = \frac{Q}{\pi D_2 b_2}$$

$$C_m = 0,08 \text{ m/s}$$

$$C_{2u} = u_2 - \frac{C_{2u}}{\tan(\beta_2)} =$$

$$C_{2u} = 18,47 \text{ m/s}$$

$$\Delta P_t = \rho \cdot u_2 \cdot C_{2u} = 10 \times 19,73 \times 18,47$$

$$\Delta P_t = 355332,1 \text{ Pa}$$

3. Calculer la puissance transférée au fluide :

$$P_R = \rho \cdot g \cdot H \cdot Q = \Delta P_t \cdot Q =$$

$$P_R = 2328,45 \text{ W}$$

4. Calculer la puissance fournie à la pompe :

$$\eta = \frac{P_R}{P} \Rightarrow P = \frac{P_R}{\eta} = \frac{2328,45}{0,89}$$

$$P = 2616,23 \text{ W}$$

Exos:

1. Calculer l'angle d'écoulement à la sortie:

$$\operatorname{Tg}(\alpha_2) = \frac{C_{vr}}{C_{vu}}$$

$$\Rightarrow C_{vu} = U_2 - \frac{C_{vr}}{\operatorname{tg}(\beta_2)}$$

$$\Rightarrow U_2 = \frac{\pi N}{60} \times D_2 = \frac{\pi \times 950}{60} \times 0,6$$

$$U_2 = 29,84 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow C_{vu} = U_2 - \frac{C_{vr}}{\operatorname{tg}(\beta_2)} = 29,84 - \frac{3,5}{\operatorname{tg} 46^\circ}$$

$$C_{vu} = 26,24 \text{ m/s}$$

$$\alpha_2 = \operatorname{Arctg} \left(\frac{C_{vr}}{C_{vu}} \right) =$$

$$\alpha_2 = 7,53^\circ$$

2. Calculer la hauteur délivrée par la pompe:

$$H = \frac{U_2 C_{vu}}{g} = \frac{29,84 \times 26,24}{10}$$

$$H = 78,30 \text{ m}$$

Exo 6:

1. Calculer le rendement maximum η_{max} de la pompe :

$$\eta_{max} = \frac{P_R}{P_{OPT}} = \frac{\rho \cdot g \cdot Q_{OPT} \cdot H_{OPT}}{P_{OPT}}$$

$$H_{OPT} = H \times 0,7 = 90 - 350 \times 0,7 - 500 \times (0,7)^2 \quad \left\{ Q_{OPT} = 360 \text{ m}^3/\text{h} = 0,1 \text{ m}^3/\text{s} \right.$$

$$H_{OPT} = 50 \text{ m}$$

$$\eta_{max} = \frac{10^3 \times 10 \times 0,1 \times 50}{65 \cdot 10^{-3}}$$

$$\eta_{max} = 0,77 = 77\%$$

2. Trouver sa vitesse spécifique et en déduire son type :

$$N_s = \frac{\Omega \cdot Q_{OPT}^{1/2}}{(g \cdot H_{OPT})^{3/4}} = \frac{\pi \cdot N \cdot Q_{OPT}^{1/2}}{30 (g \cdot H_{OPT})^{3/4}} = \frac{\pi \times 1800 \times 0,1^{1/2}}{30 \times (10 \times 50)^{3/4}}$$

$$N_s = 0,47$$

* C'est une pompe centrifuge.

• Pompe Similaire:

3. Trouver la puissance requise pour entraîner cette pompe:

$$\eta' = \frac{P_R'}{P'} \Rightarrow P = \frac{P_R'}{\eta'} = \frac{\rho \cdot g \cdot H' \cdot Q'}{\eta'}$$

$\psi' = \psi_1$; ψ_1 : Coeff. de hauteur de la ^{1^{ère}} pompe pour: $\eta_1 = 60\%$.

$\phi' = \phi_1$; ϕ_1 : Coeff. de débit de la ^{1^{ère}} pompe pour: $\eta_1 = 60\%$.

$$\phi' = \phi_1 \Leftrightarrow \frac{Q'}{N' \cdot D'^3} = \frac{Q_1}{N_1 \cdot D_1^3}$$

$$\Rightarrow Q_1 = Q' \times \frac{N_1}{N'} \times \left(\frac{D_1}{D'}\right)^3 = 2,5 \cdot 10^{-2} \times$$

$$Q_1 = 0,133^3 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$H_1(0,133) = 90 - 350 \times (0,133) - 500 \times (0,133)^2$$

$$H_1 = 34,6 \text{ m}$$

$$\frac{H'}{N'^2 \cdot D'^2} = \frac{H_1}{N_1^2 \cdot D_1^2} \Rightarrow H' = H_1 \times \left(\frac{N'}{N_1}\right)^2 \times \left(\frac{D'}{D_1}\right)^2$$

$$H' = H_1 \times 0,09 = 34,6 \times 0,09$$

$$H' = 3,114 \text{ m}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\rho \cdot g \cdot H' \cdot Q'}{\eta'} = \frac{680 \times 10 \times 3,114 \times 2,5 \cdot 10^{-3}}{0,6}$$

$$P' = 38, \text{ watt}$$

4. Donner la caractéristique $H'(Q')$ de cette pompe :

$$H' = f(Q')$$

$$H' = 0,09 \times H = 0,09(90 - 350Q - 500Q^2)$$

$$\text{on : } Q = 53,33Q' = 8,1 - 31,5Q' - 45Q'^2$$

$$= 8,1 - 31,5 \times 53,33Q' - 45 \times (53,33)^2 Q'^2$$

$$H' = 8,1 - 1680Q' - 128000Q'^2 \quad (m^3/s)$$

Exercice:

1. Déterminer le débit et la puissance requise au point optimum:

$$78 = 25 - 3Q - 60Q^2 \Leftrightarrow -60Q^2 - 3Q + 78 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 7689$$

$$Q_{\text{opt}} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{7689}}{2(-60)}$$

$$Q_{\text{opt}} = 0,317 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$P_{\text{opt}} = \frac{P_{\text{g. Hopt}} \cdot Q_{\text{opt}}}{\eta_{\text{max}}} = \frac{10^3 \times 10 \times 78 \times 0,317}{0,74}$$

$$P_{\text{opt}} = 11708,108 \text{ watt}$$

2. Calculer la vitesse spécifique:

$$N_s = \frac{\Omega \cdot Q_{\text{opt}}^{3/4}}{(gH_{\text{opt}})^{3/4}} = \frac{\pi \cdot N \cdot Q_{\text{opt}}^{3/4}}{30 (gH_{\text{opt}})^{3/4}}$$

$$N_s = 1,8 \text{ rpm} \rightarrow \text{pompe Rate.}$$

* Pompe similaire :

3. Déterminer le diamètre de cette pompe :

$$\frac{Q_{\text{OPT}}}{N \cdot D^3} = \frac{Q'_{\text{OPT}}}{N' \cdot D'^3}$$

$$\Rightarrow \frac{D'}{D} = \left(\frac{N}{N'} \right)^{1/3} \times \left(\frac{Q'_{\text{OPT}}}{Q_{\text{OPT}}} \right)^{1/3} = \left(\right)$$

$$\frac{D'}{D} = 2,23$$

$$\Rightarrow D' = 0,68 \text{ m}$$

* Déterminer la puissance requise :

$$\frac{P_{\text{OPT}}}{\rho \cdot N^3 \cdot D^5} = \frac{P'_{\text{OPT}}}{\rho' \cdot N'^3 \cdot D'^5}$$

$$\Rightarrow P'_{\text{OPT}} = \frac{\rho'}{\rho} \times \left(\frac{N'}{N} \right)^3 \times \left(\frac{D'}{D} \right)^5 \cdot P_{\text{OPT}}$$

$$P'_{\text{OPT}} = 605409,34 \text{ watt}$$

4. Donner la caractéristique $H'(Q')$ de cette pompe :

$$H' = f(Q')$$

$$\frac{H'}{N'^2 \cdot D'^2} = \frac{H}{N^2 \cdot D^2}$$

$$\Rightarrow H' = \left(\frac{N'}{N}\right)^2 \cdot \left(\frac{D'}{D}\right)^2 \cdot H =$$

$$H' = 7,44 H$$

$$H' = 7,44 \cdot [25 - 3Q - 60Q^2]$$

$$= 36,9 - 4,43Q - 88,59Q^2$$

$$(ou : Q_{opt} = 0,75 Q'_{opt})$$

$$= 36,9 - 4,43 \cdot 0,75 Q'_{opt} - 88,59 \times (0,75)^2 \cdot Q'^2$$

$$H' = 36,9 - 0,666 Q' - 7,99 Q'^2$$

Exo 1:

1. Déterminer la caractéristique réelle de la pompe $H = f(Q)$:

$$\begin{cases} 75 = a + 0b + 0^2c \\ 63 = a + 0,06b + (0,06)^2c \\ 23 = a + 0,16b + (0,16)^2c \end{cases}$$

→ Résolution du système donne:

$$a = 0,75 ; b = -725 ; c = -7250$$

$$H(m) = 75 - 725Q - 7250Q^2 \quad Q[m^3/s]$$

→ Déterminer la caractéristique réelle de la pompe $\eta = f(Q)$:

$$\begin{cases} 0 = a' + 0b' + 0^2c' \\ 0,672 = a' + (0,06)b' + (0,06)^2c' \\ 0,572 = a' + (0,16)b' + (0,16)^2c' \end{cases}$$

→ Résolution de ce système donne:

$$a' = 0 ; b' = 76 ; c' = -80$$

$$\eta = 76Q - 80Q^2 \quad Q[m^3/s]$$

2. Déterminer le point optimal, le débit, la hauteur, la puissance

Le point optimal correspond au rendement max :

$$\frac{d\eta}{dQ} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -160Q + 16 = 0 \\ Q_{opt} = 0,1 \text{ m}^3/\text{s} \end{cases}$$

$$H_{opt} = 75 - 125(0,1) - 1250(0,1)^2$$

$$H_{opt} = 50 \text{ m}$$

$$P_{opt} = \frac{\rho \cdot g \cdot H_{opt} \cdot Q_{opt}}{\eta_{max}}$$

$$\text{on: } \eta_{max} = 16 \times (0,1) - 80 \times (0,1)^2 = 0,8$$

$$P_{opt} =$$

$$P_{opt} = 62,5 \text{ kW}$$

3. Donner la vitesse spécifique de la pompe :

$$N_s = \frac{12 \sqrt{Q_{opt}}}{(g \cdot H_{opt})^{3/4}} =$$

$$N_s = 0,48 \text{ c'est une pompe centrifuge.}$$

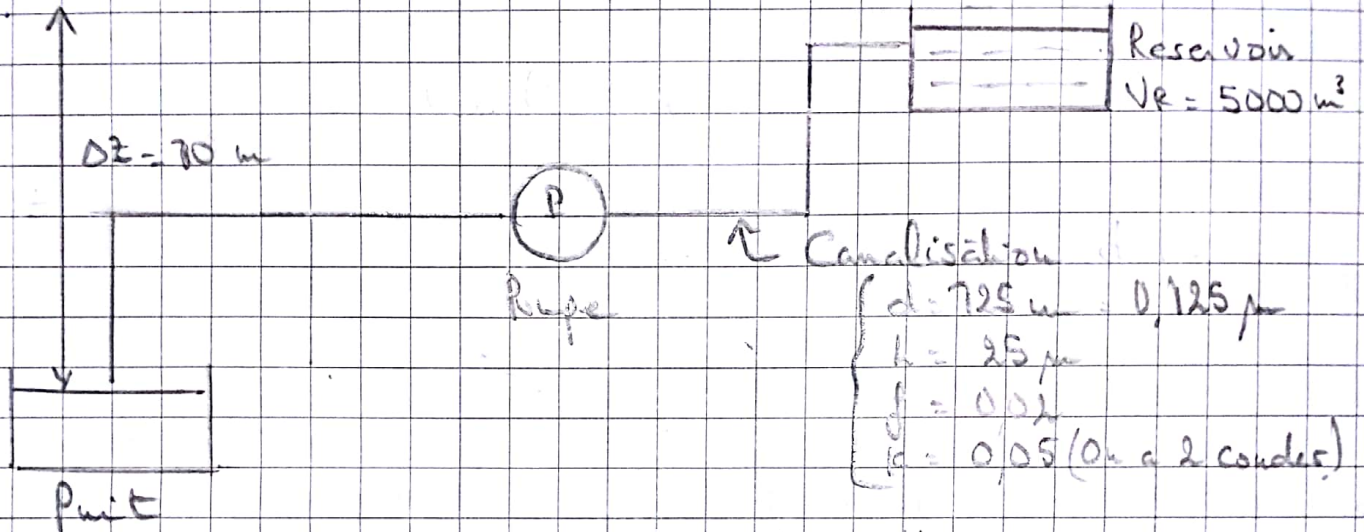
• Une canalisation:

$$L = 25 \text{ m}; d = 725 \text{ mm} = 0,725 \text{ m}; f = 0,02; k = 0,05$$

Débit à travers l'installation

Débit d'installation au débit de fonctionnement.

II



$H_p \equiv$ Hauteur de la pompe.

$$H_p = 75 - 725 Q - 7250 Q^3$$

$$H_{\text{inst}} = \Delta Z + h$$

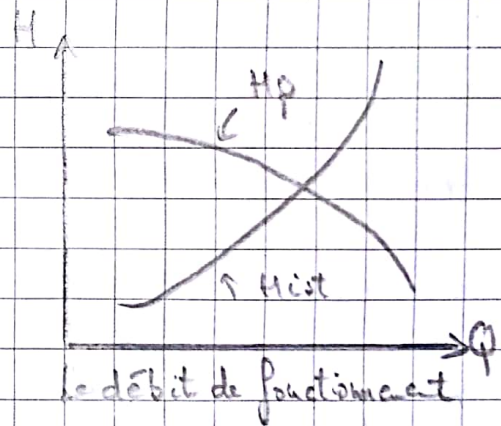
$h \equiv$ Pertes de charge.

$$h = h_{\text{linéaire}} + h_{\text{singulière}}$$

$$h_{\text{linéaire}} = f \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

$$h_{\text{singulière}} = k \cdot \frac{V^2}{2g} \quad \text{On a deux coudes.}$$

$$h = f \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{V^2}{2g} + 2k \cdot \frac{V^2}{2g}$$



$$h = \left[f \cdot \frac{L}{d} + 2k \right] \cdot \frac{V^5}{2g} \quad \text{or } V = \frac{Q}{S}$$

$$h = \left[f \cdot \frac{L}{d} + 2k \right] \frac{Q^2}{2gS^5} \quad \text{avec : } S = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$h = \left[f \cdot \frac{L}{d} + 2k \right] \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 d^5 g}$$

$$H_{inst} = \Delta z + \left[f \cdot \frac{L}{d} + 2k \right] \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 d^5 g} = 10 + 1660 Q^2$$

$$H_p = H_{inst} \Rightarrow Q_f = ?$$

$$75 - 125 Q - 1250 Q^2 = 10 + 1660 Q^2$$

$$2910 Q^2 + 125 Q - 65 = 0$$

3. Trouver le débit à travers l'installation, la puissance fournie

et le temps de remplissage :

$$\Delta = b^2 \quad \Delta c = 472225$$

Le débit positif $Q_f = 0,729 \text{ m}^3/\text{s}$

$$\eta = 16 Q - 80 Q^2$$

$$P = \frac{P_e}{\eta} \quad \text{au point de fonctionnement}$$

$$P = \frac{P \cdot g \cdot H(Q_f) \cdot Q_f}{\eta(Q_f)}$$

$$\{ H(Q_f) = 38,07 \text{ m} ; \eta(Q_f) = 0,73 \}$$

$$AN \Rightarrow P = 67,274 \text{ kW}$$

* Temps de remplissage du réservoir :

$$t = \frac{V_R}{Q} = \frac{5000}{0,129} \Rightarrow t = 38759 \text{ s} = 10 \text{ h } 46 \text{ min}$$

4. Trouver l'altitude maximale :

$$NSPH = 7 \text{ m} ; NSPH = \frac{P_e - P_v}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$$

Bernoulli entre la surface libre du puit et de l'entrée de

la pompe pour trouver : $\frac{P_e}{\rho g}$

On a

$$NSPH = \frac{P_a - P_v}{\rho g} - (\Delta z_a + h_a)$$

$h_a \equiv$ pertes de charge à l'aspiration.

$$\Rightarrow \Delta z_a = \frac{P_a - P_v}{\rho g} - (NSPH + h_a)$$

$$h_a = h_{ap} + h_{as}$$

$$= \left[f \frac{L_a}{d} + K \right] \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$= \left[f \frac{L_a}{d} + K \right] \cdot \frac{8Q_p^2}{g\pi^2 d^5} =$$

$$h_a = 7,2 \text{ m}$$

$$\text{Donc : } \Delta z_a = \frac{P_a - P_v}{\rho g} - (NSPH + h_a) =$$

$$\Delta z_a = 1,6 \text{ m}$$

Exp:

2. Déterminer la hauteur théorique :

$$H_{th} = \frac{U_2 \cdot C_{2u}}{g}$$

$$U_2 =$$

$$C_{2u} = U_2 - \frac{C_{2u}}{\tan(\beta_2)}$$

$$or: C_{1u} S_1 = C_{2u} S_2 \text{ (Conservation de débit)}$$

$$C_{1u} = U_1 \tan(\beta_1) \text{ avec: } U_1 = \frac{\pi N D_1}{60} = \pi$$

$$= 78,85 \times \tan$$

$$U_1 = 78,85 \text{ m/s}$$

$$C_{1u} = 75,82 \text{ m/s}$$

$$C_{2u} = C_{1u} \cdot \frac{S_1}{S_2} = C_{1u} \frac{\pi D_1 b_1}{\pi D_2 b_2} =$$

$$C_{2u} = 9,42 \text{ m/s}$$

$$\text{donc: } C_{2u} = U_2 - \frac{C_{2u}}{\tan(\beta_2)} =$$

$$C_{2u} = 30,67 \text{ m/s}$$

$$H_{th} = \frac{U_2 \cdot C_{2u}}{g} =$$

$$H_{th} = 773,44 \text{ m}$$

2.

$$Q_{pH} = Q_{m1} \cdot S_1 = Q_{m2} \cdot S_2 = 0,248 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$H = 200 + 234Q - 7730Q^2$$

$$\eta = 8,4Q - 20Q^2$$

$$N_s = \frac{\omega \cdot Q_{opt}^{3/2}}{(gH(Q_{opt}))^{3/4}} = \frac{\pi N \cdot \sqrt{Q_{opt}}}{30 [gH(Q_{opt})]^{3/4}}$$

$Q_{opt}?$

$$\frac{d}{dQ} = 0 \Leftrightarrow 8,4 - 40Q = 0 \Rightarrow Q_{opt} = 0,21 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\Rightarrow H(Q_{opt}) = 772,84 \text{ m}$$

$$\Rightarrow N_s =$$

$$N_s = 0,32 \text{ rpm}$$

3.

$$H_p = H_{inst}$$

$$H_p = 200 + 234(0,27) - 7730(0,27)^2$$

$$H_p = 737,06 \text{ m}$$

$$H_{inst} = \Delta z + h \quad \text{avec: } h = h_f + h_s$$

$$H_{inst} = \Delta z + \left[f \cdot \frac{L}{d} + k \right] \cdot \frac{8 \cdot Q_p^2}{\pi^2 \cdot d^5 \cdot g}$$

$$\Rightarrow \Delta z + \left[f \cdot \frac{L}{d} + k \right] \cdot \frac{8 \cdot Q_p^2}{\pi^2 \cdot d^5 \cdot g} = 737,06$$

$$\left[f \cdot \frac{L}{d} + k \right] \cdot \frac{8 \cdot Q_p^2}{\pi^2 \cdot d^5 \cdot g} = 87,06 \mu$$

$$\Rightarrow k = \frac{87,06 \times \pi^2 \cdot d^5 \cdot g}{8 \cdot Q_p^2} - f \cdot \frac{L}{d}$$

=

$$k = 3,57$$

4.

$$NSPH = \frac{QH}{40} \quad (\text{au point de fonctionnement}).$$

$$NSPH = \frac{Q_p \times H(Q_p)}{40} = 0,925 \mu$$

$$NSPH = \frac{P_2 - P_1}{\rho \cdot g} - (\Delta z_2 + h_2)$$

$$\Rightarrow \Delta z_2 = \frac{P_2 - P_1}{\rho \cdot g} - (NSPH + h_2) \quad \text{avec: } h_2 = h_{\text{vitesse}}$$

$$\Delta z_2 =$$

$$\Delta z_2 = 3,285 \mu$$

5.

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = 2Q_1 = 2Q_2 = 2Q$$

$$H_T = H_1 = H_2$$

Le nouveau débit de fonctionnement Q_T ?

- Par une pompe :

$$H = 200 + 234 Q - 7730 Q^2$$

$$\eta = 8,4 - 20 Q^2$$

$$Q [m^3/s]$$

- Par deux pompes :

$$H_T = 200 + 234 \frac{Q_T}{2} - 7730 \left(\frac{Q_T}{2} \right)^2$$

$$H_T = 200 + 117 Q_T - 432,5 Q_T^2 \quad \dots \quad (1)$$

- Point de fonctionnement est donné par l'intersection de H_T et H_{inst} :

$$or: H_{inst} = \Delta z = \left[f \cdot \frac{L}{d} + k \right] \frac{V^2}{2g} = \left[f \cdot \frac{L}{d} + k \right] \frac{8 \cdot Q_T^2}{\pi^2 d^5 g} + \Delta z$$

- On prend : $k = 3,57$

$$H_{inst} = 50 + \left[\frac{0,02 \times 200}{0,2} + 3,57 \right] \times \frac{8}{\pi^2 \times 0,2^5} \times Q_T^2$$

$$H_{inst} = 50 + 178,5 Q_T^2 \quad \dots \quad (2)$$

$$(1) = (2)$$

$$\Rightarrow 280 + 77 Q_T - 432,5 Q_T^2 = 50 + 778,5 Q_T^2$$

$$750 + 77 Q_T - 7677 Q_T^2 = 0$$

$$\Rightarrow Q_{Tp} = 0,34 \text{ m}^3/\text{s}$$

- Puissance de chacune des pompes :

$$Q_{p1} = \frac{Q_{Tp}}{2} = 0,17 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$P = \frac{\rho \cdot g \cdot H(Q_{p1}) \times Q_{p1}}{\eta(Q_{p1})}$$

$$= \frac{10^3 \times 10 \times 189,78 \times 0,17}{0,85}$$

$$P = 379,56 \text{ kW}$$

- Puissance de chaque pompe.

Exm:

1. Tracer les triangles des vitesses à l'entrée et à la sortie de la roue:

$$U_1 = \frac{\pi \cdot N}{60} \cdot D_1 = 23,56 \text{ m/s}$$

$$U_2 = \frac{\pi \cdot N}{60} \cdot D_2 = 47,12 \text{ m/s}$$

$$H_{th} = \frac{U_2 \cdot C_{2u}}{g} \Rightarrow C_{2u} = U_2 - \frac{C_{2m}}{\tan(\beta_2)}$$

$$\text{avec: } C_{2m} = C_1 \cdot \frac{S_1}{S_2} = C_{1m} \frac{\pi \cdot D_1 b_1}{\pi \cdot D_2 b_2} = C_{1m} \frac{D_1}{D_2}$$

$$\begin{cases} \text{or: } C_{1m} = U_1 \cdot \tan(\beta_1) = 29,77 \text{ m/s} \\ \text{d'où: } C_{2m} = 9,885 \text{ m/s} \\ C_{2u} = 30 \text{ m/s} \end{cases}$$

2. Déterminer la hauteur théorique " H_{th} ".

$$H_{th} = \frac{U_2 C_{2u}}{g} =$$

$$H_{th} = 747,35 \text{ mm}$$

→ Le débit théorique " Q_{th} ".

$$Q_{th} = S_1 \cdot C_{1m} = S_2 \cdot C_{2m} =$$

$$Q_{th} = 7,718 \text{ m}^3/\text{s}$$

* En déduire la puissance théorique P_{th} :

$$P_{th} = P_H = \rho \cdot g \cdot H_R \cdot Q_{th} = \rho \cdot g \cdot \left[\frac{u_2 \cdot C_{2u}}{g} \right] \cdot Q_{th}$$

$$P_{th} = \rho \cdot u_2 \cdot C_{2u} \cdot Q_{th}$$

$$P_{th} = 1.58 \text{ MW}$$

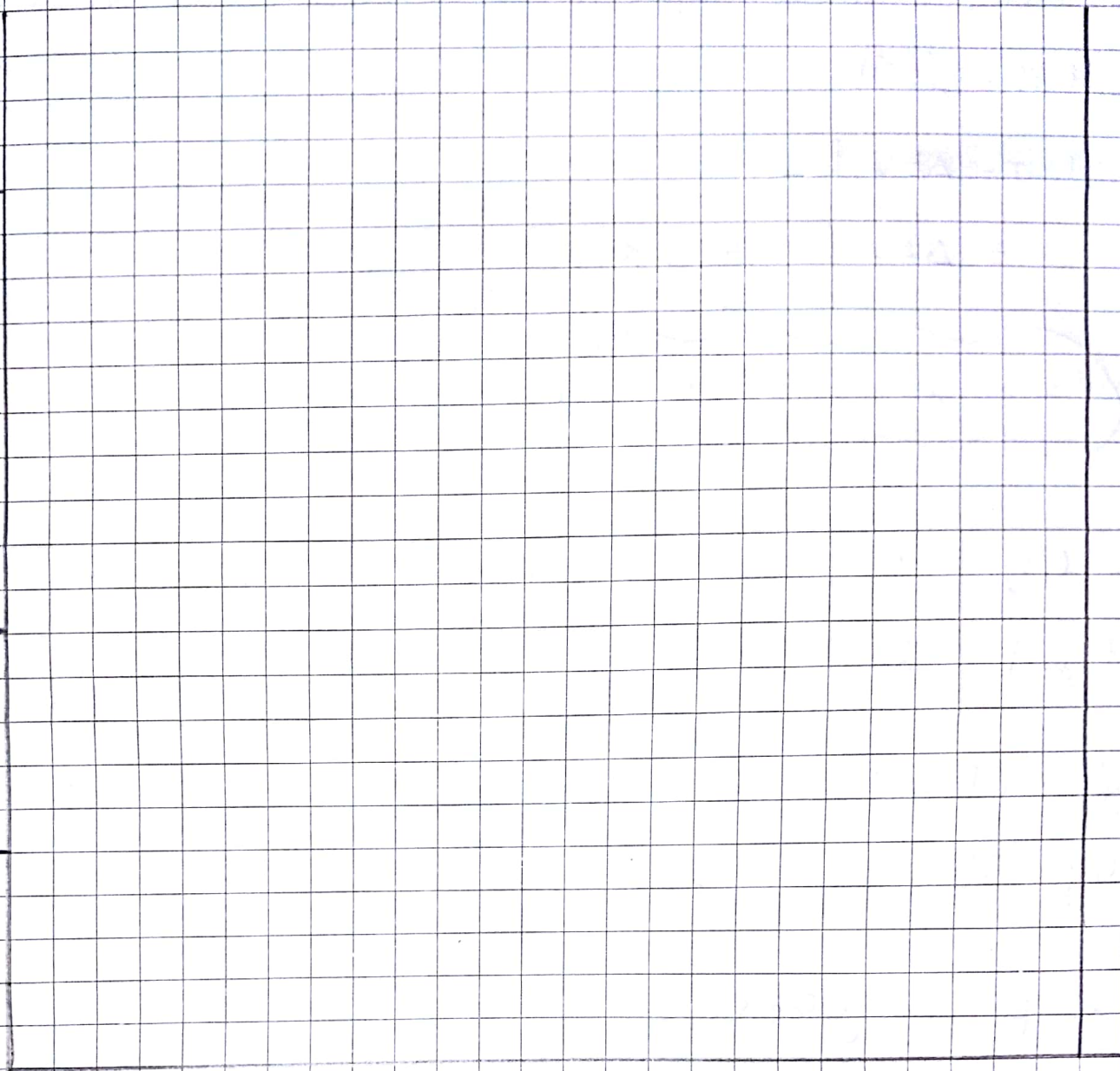
3. Tracer: $H_R = f(Q)$ et $\eta = g(Q)$:

$$H_R = f(Q).$$

$$\begin{aligned} H_R &= \frac{u_2 \cdot C_{2u}}{g} = \frac{u_2}{g} \left[u_2 - \frac{C_{2u}}{\tan(\beta_2)} \right] \\ &= \frac{u_2}{g} \left[u_2 - \frac{Q}{S_2 \tan(\beta_2)} \right] \\ &= \frac{u_2}{g} \left[u_2 - \frac{Q}{\pi D_2 b_2 \tan(\beta_2)} \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H_R = \frac{u_2^2}{g} - \left[\frac{u_2}{\pi D_2 b_2 \tan(\beta_2)} \right] Q$$

$$H_R = 222,03 - 72,763 Q$$



4. En déduire la vitesse spécifique N_s :

$$N_s = \frac{\Omega \cdot Q_{opt}^{1/2}}{(gH(Q_{opt}))}$$

- d'après le graphe : $Q_{opt} = 1 \text{ m}^3/\text{s}$; $H_{opt} = 100$

=

$$N_s = 0,408$$

5. Tracer la caractéristique Hauteur-débit de l'installation.

$$H_{mat} = f(Q)$$

$$H_{mat} = \Delta z + h$$

$$= \Delta z + \left[f \cdot \frac{L}{d} + K \right] \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g \cdot d^5}$$

$$H_{mat} = 20 + 71,69 \cdot Q^2$$

Q (l/s)	0	200	400	600	800	1000	1200	1400
H (m)	20	22,84	31,27	45,8	65,82	91,69	123,24	160,5

6. Q_p = intersection entre H_p et H_{mat}

$$Q_p = 7040 \text{ l/s} = 7,04 \text{ m}^3/\text{s}$$

• la puissance fournie :

$$P = \frac{\rho \cdot g \cdot H(Q_p) \cdot Q_p}{\eta(Q_p)} = \frac{1000 \times 10 \times 99 \times 7,04}{0,73}$$

$$P = 7,47 \text{ MW}$$

• le temps nécessaire pour remplir le réservoir :

$$t = \frac{V_R}{Q_p} = \frac{20000}{7,04}$$

$$t = 29230,67 \text{ s} = 5 \text{ h } 20 \text{ min}$$

7.

Deux pompes identiques placées en parallèle:

$$H_T = f(Q_T)$$

$$H_T = H_1 = H_2$$

- Intersection de \hat{H}_T avec H_{inst} , on trouve:

$$Q_{Tf} = 7,2 \text{ m}^3/\text{s}$$