

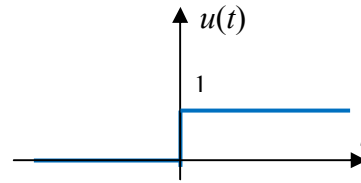
Correction de la série de TD N°1

Exercice 1

➤ $x(t) = u(t)$

Calcul de l'énergie totale

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)^2 dt = \int_0^{\infty} 1 dt = t \Big|_0^{\infty} = \infty \Rightarrow \boxed{W_x = \infty}$$



Calcul de la puissance moyenne totale

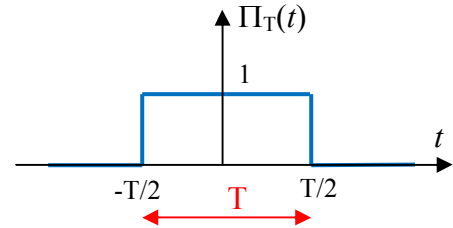
$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t)^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 1 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(t \Big|_0^{T/2} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2T} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{P_x = \frac{1}{2}}$$

L'énergie totale est infinie et la puissance moyenne totale est finie, le signal est donc à puissance moyenne finie.

➤ $x(t) = \Pi_T(t)$

Calcul de l'énergie totale

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\Pi_T(t))^2 dt = \int_{-T/2}^{T/2} 1 dt = t \Big|_{-T/2}^{T/2} = T \Rightarrow \boxed{W_x = T}$$



Calcul de la puissance moyenne totale

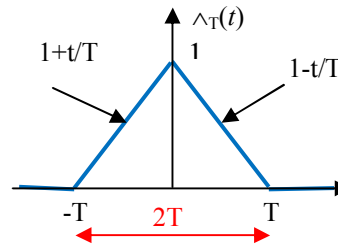
$$P_x = \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T'} \int_{-T'/2}^{T'/2} x^2(t) dt = \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T'} \int_{-T'/2}^{T'/2} (\Pi_T(t))^2 dt = \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T'} \int_{-T/2}^{T/2} 1 dt = \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T'} \left(t \Big|_{-T/2}^{T/2} \right) = \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{T}{T'} = 0 \Rightarrow \boxed{P_x = 0}$$

L'énergie totale est finie et la puissance moyenne totale est nulle, le signal est donc à énergie finie.

➤ $x(t) = \Lambda_T(t)$

Calcul de l'énergie totale

$$\begin{aligned} W_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\Lambda_T(t))^2 dt = \int_{-T}^0 \left(1 + \frac{t}{T}\right)^2 dt + \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 dt \\ &= \int_{-T}^0 \left(1 + 2\frac{t}{T} + \frac{t^2}{T^2}\right) dt + \int_0^T \left(1 - 2\frac{t}{T} + \frac{t^2}{T^2}\right) dt \\ &= \left(t + \frac{t^2}{T} + \frac{t^3}{3T^2} \right) \Big|_{-T}^0 + \left(t - \frac{t^2}{T} + \frac{t^3}{3T^2} \right) \Big|_0^T = \left(T - T + \frac{T}{3} \right) + \left(T - T + \frac{T}{3} \right) \\ &\Rightarrow \boxed{W_x = \frac{2T}{3}} \end{aligned}$$



Calcul de la puissance moyenne totale

$$P_x = \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T'} \int_{-T'/2}^{T'/2} x^2(t) dt = \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T'} \int_{-T'/2}^{T'/2} (\Lambda_T(t))^2 dt = \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T'} \left[\int_{-T}^0 \left(1 + \frac{t}{T}\right)^2 dt + \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 dt \right] = \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T'} \left(\frac{2T}{3} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P_x = 0}$$

L'énergie totale est finie et la puissance moyenne totale est nulle, le signal est donc à énergie finie.

$$\triangleright x(t) = A \sin(\omega t) \quad \omega = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Calcul de l'énergie totale

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (A \sin(\omega t))^2 dt = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(\omega t) dt$$

$$W_x = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt = \frac{A^2}{2} \left(t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$W_x = \frac{A^2}{2} \left(\infty - \frac{\sin(\infty)}{2\omega} + \infty + \frac{\sin(-\infty)}{2\omega} \right) = \infty \Rightarrow \boxed{W_x = \infty}$$

Calcul de la puissance moyenne totale

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \sin^2(\omega t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} (1 - \cos(2\omega t)) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{A^2}{2} \left(t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right) \Big|_{-T/2}^{T/2} \right)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \left(T - \frac{\sin(\omega T)}{2\omega} + \frac{\sin(-\omega T)}{2\omega} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{A^2}{2} - \frac{2A^2 \sin(\omega T)}{2\omega T} \right) \Rightarrow \boxed{P_x = \frac{A^2}{2}}$$

L'énergie totale est infinie et la puissance moyenne totale est finie, le signal est donc à puissance moyenne finie.

$$\triangleright x(t) = A \cos(\omega t) u(t)$$

Calcul de l'énergie totale

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (A \cos^2(\omega t) u(t))^2 dt = A^2 \int_0^{\infty} \cos^2(\omega t) dt = A^2 \int_0^{\infty} \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} dt = \frac{A^2}{2} \left(t + \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right) \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{A^2}{2} \left(\infty - \frac{\sin(\infty)}{2\omega} \right) = \infty \Rightarrow \boxed{W_x = \infty}$$

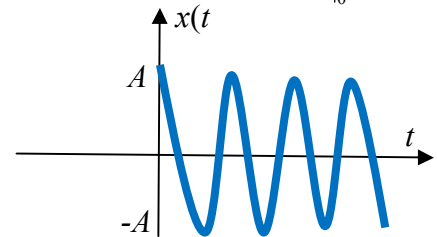
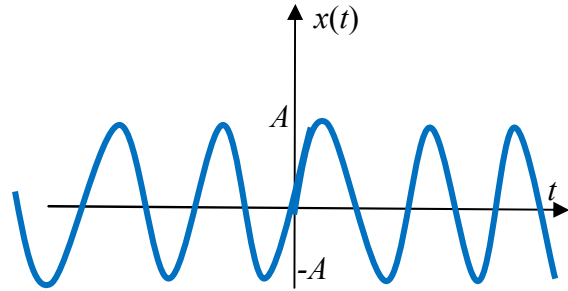
Calcul de la puissance moyenne totale

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \sin^2(\omega t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_0^{T/2} (1 + \cos(2\omega t)) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{A^2}{2} \left(t + \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right) \Big|_0^{T/2} \right)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{A^2}{4} - \frac{A^2 \sin(\omega T)}{4\omega T} \right) \Rightarrow \boxed{P_x = \frac{A^2}{4}}$$

L'énergie totale est infinie et la puissance moyenne totale est finie, le signal est donc à puissance moyenne finie.



➤ $x(t) = t u(t)$

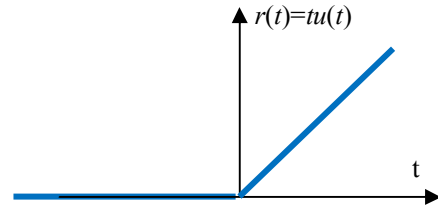
Calcul de l'énergie totale

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (t u(t))^2 dt = \int_0^{\infty} t^2 dt = \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^{\infty} = \infty \Rightarrow \boxed{W_x = \infty}$$

Calcul de la puissance moyenne totale

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (t u(t))^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} t^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{T/2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T^2}{24} = \infty \Rightarrow \boxed{P_x = \infty}$$

L'énergie totale est infinie et la puissance moyenne totale est également infinie, le signal n'est ni à énergie finie ni à puissance moyenne finie.

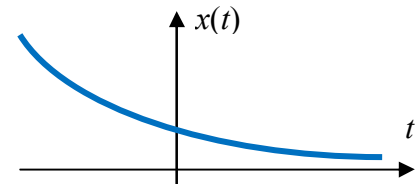


➤ $x(t) = A e^{-at} \quad (a > 0)$

Calcul de l'énergie totale

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (A e^{-at})^2 dt = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2at} dt = -\frac{A^2 e^{-2at}}{2a} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \infty$$

$\Rightarrow \boxed{W_x = \infty}$



Calcul de la puissance moyenne totale

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (A e^{-at})^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2at} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{T} \left(-\frac{e^{-2at}}{2a} \right) \Big|_{-T/2}^{T/2}$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{2aT} (e^{aT} - e^{-aT}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A e^{aT}}{2aT} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indéterminé}$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(A e^{aT})}{(2aT)} = \frac{A e^{aT}}{2} = \infty \Rightarrow \boxed{P_x = \infty}$$

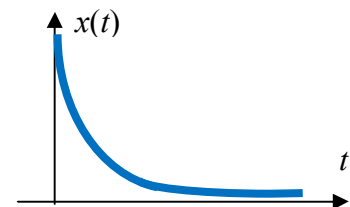
L'énergie totale ainsi que la puissance moyenne totale sont toutes les deux infinies, le signal n'est donc ni à énergie finie, ni à puissance moyenne finie.

➤ $x(t) = A e^{-at} u(t) \quad (a > 0)$

Calcul de l'énergie totale

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (A e^{-at} u(t))^2 dt = A^2 \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = -\frac{A^2 e^{-2at}}{2a} \Big|_0^{\infty} = \frac{A^2}{2a}$$

$\Rightarrow \boxed{W_x = \frac{A^2}{2a}}$



Calcul de la puissance moyenne totale

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (A e^{-at} u(t))^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{T} \int_0^{T/2} e^{-2at} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{T} \left(-\frac{e^{-2at}}{2a} \right) \Big|_0^{T/2}$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A}{2aT} (1 - e^{-aT}) = 0 \Rightarrow \boxed{P_x = 0}$$

L'énergie totale est finie et la puissance moyenne totale est nulle, le signal est donc à énergie finie.

Exercice 2

Montrons que la valeur moyenne de la partie impaire d'un signal $x(t)$ est nulle.

La valeur moyenne d'un signal $x(t)$ mesurée sur un intervalle de Temps T est: $\bar{x}(T) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$

La valeur moyenne totale d'un signal $x(t)$ mesurée sur tout l'axe des Temps est:

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

Tout signal $x(t)$ peut être décomposé en une partie paire $x_p(t)$ et une partie impaire $x_i(t)$ tel que:

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

avec

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$$x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

La valeur moyenne de la partie impaire d'un signal $x(t)$ est donc:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{x(t) - x(-t)}{2} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(-t) dt \right] \\ \bar{x}_i &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} x(t') dt' \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt \right] = 0 \end{aligned}$$

CQFD

Exercice 3

Condition pour que $z(t) = x(t) + y(t)$ soit périodique:

$x(t)$ périodique de période fondamentale $T_1 \Rightarrow x(t) = x(t + k_1 T_1) \quad k_1 \in \mathbb{N}$

$y(t)$ périodique de période fondamentale $T_2 \Rightarrow y(t) = y(t + k_2 T_2) \quad k_2 \in \mathbb{N}$

$z(t) = x(t) + y(t)$ est périodique de période fondamentale T si $z(t) = z(t + kT) \quad k \in \mathbb{N}$

$$z(t) = x(t) + y(t) \Rightarrow z(t + kT) = x(t + kT) + y(t + kT)$$

or $x(t) = x(t + k_1 T_1)$ et $y(t) = y(t + k_2 T_2)$, par conséquent $z(t) = x(t + k_1 T_1) + y(t + k_2 T_2)$.

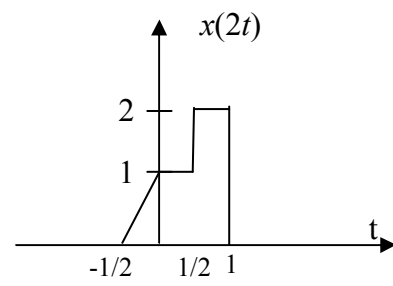
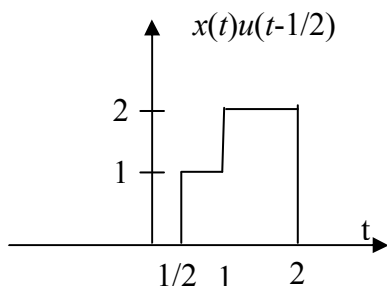
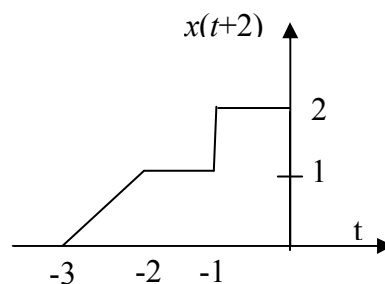
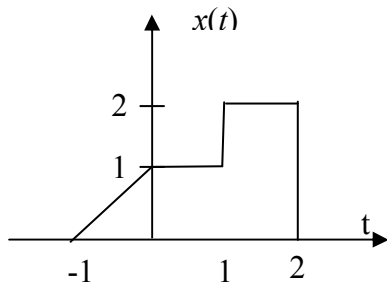
Ainsi, $z(t) = z(t + kT)$ si $x(t + k_1 T_1) = x(t + kT)$ et $y(t + k_2 T_2) = y(t + kT)$

$$\text{soit} \quad k_1 T_1 = kT \text{ et } k_2 T_2 = kT \Rightarrow k_1 T_1 = k_2 T_2 \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{T_2}{T_1}$$

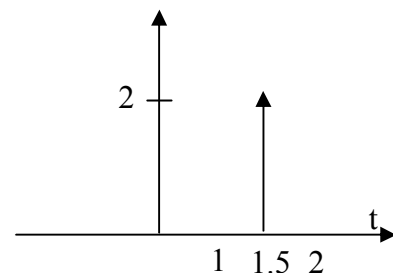
Cette relation montre que $z(t) = x(t) + y(t)$ est périodique de période fondamentale T si le rapport $\frac{T_2}{T_1}$ des périodes des deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ est un nombre rationnel.

Exercice 4

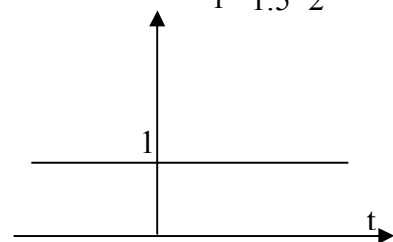
1)- Graphes des signaux $x(t+2)$, $x(2t)$, $x(t)u(t-\frac{1}{2})$, $x(t)\delta(t-\frac{3}{2})$, $\int_{-1}^1 x(t)\delta(t-1)dt$ et $x(t)\delta_{0.5}(t)$.



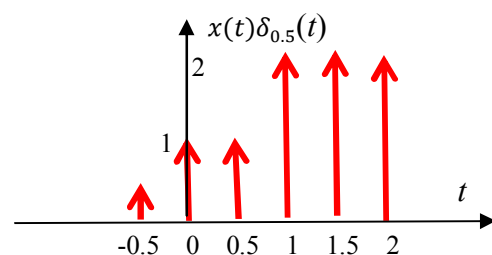
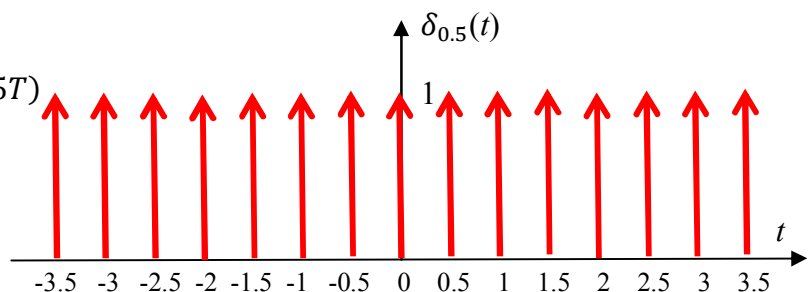
$$x(t)\delta\left(t-\frac{3}{2}\right) = x\left(\frac{3}{2}\right)\delta\left(t-\frac{3}{2}\right) = 2\delta\left(t-\frac{3}{2}\right)$$



$$\int_{-1}^1 x(t)\delta(t-1)dt = x(1) = 1$$



$$x(t)\delta_{0.5}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(0.5k)\delta(t-0.5T)$$



2)- $x(t)$ en fonction des signaux unitaires $u(t)$.

$$x(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si } t \in [-1, 0] \\ 1 & \text{si } t \in [0, 1] \\ 2 & \text{si } t \in [1, 2] \end{cases}$$

$$x(t) = (t+1)[u(t+1) - u(t)] + [u(t) - u(t-1)] + 2[u(t-1) - u(t-2)]$$

$$x(t) = (t+1)u(t+1) - tu(t) + u(t-1) - 2u(t-2)$$

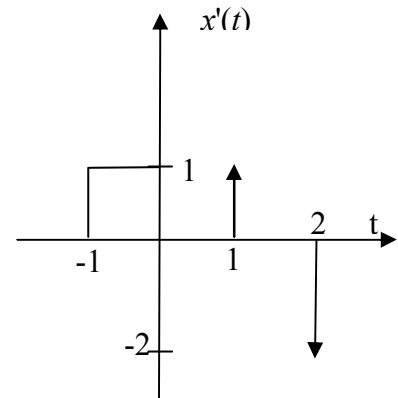
3)- Signal $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

En dérivant $x(t)$ et sachant que $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$, on obtient :

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t+1) + (t+1)\delta(t+1) - u(t) - t\delta(t) + \delta(t-1) - 2\delta(t-2)$$

Comme $(t+1)\delta(t+1) = 0$ et $t\delta(t) = 0$, on obtient finalement :

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t+1) - u(t) + \delta(t-1) - 2\delta(t-2)$$



En dérivant $\frac{dx(t)}{dt}$, on obtient :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \delta(t+1) - \delta(t) + \delta'(t-1) - 2\delta'(t-2)$$

$$\triangleright x(t) \delta'(t - \frac{3}{2}) = x(\frac{3}{2}) \delta'(t - \frac{3}{2}) - x'(\frac{3}{2}) \delta(t - \frac{3}{2}) = 2 \delta'(t - \frac{3}{2})$$

$$x(t) \delta'(t - \frac{3}{2}) = 2 \delta'(t - \frac{3}{2})$$

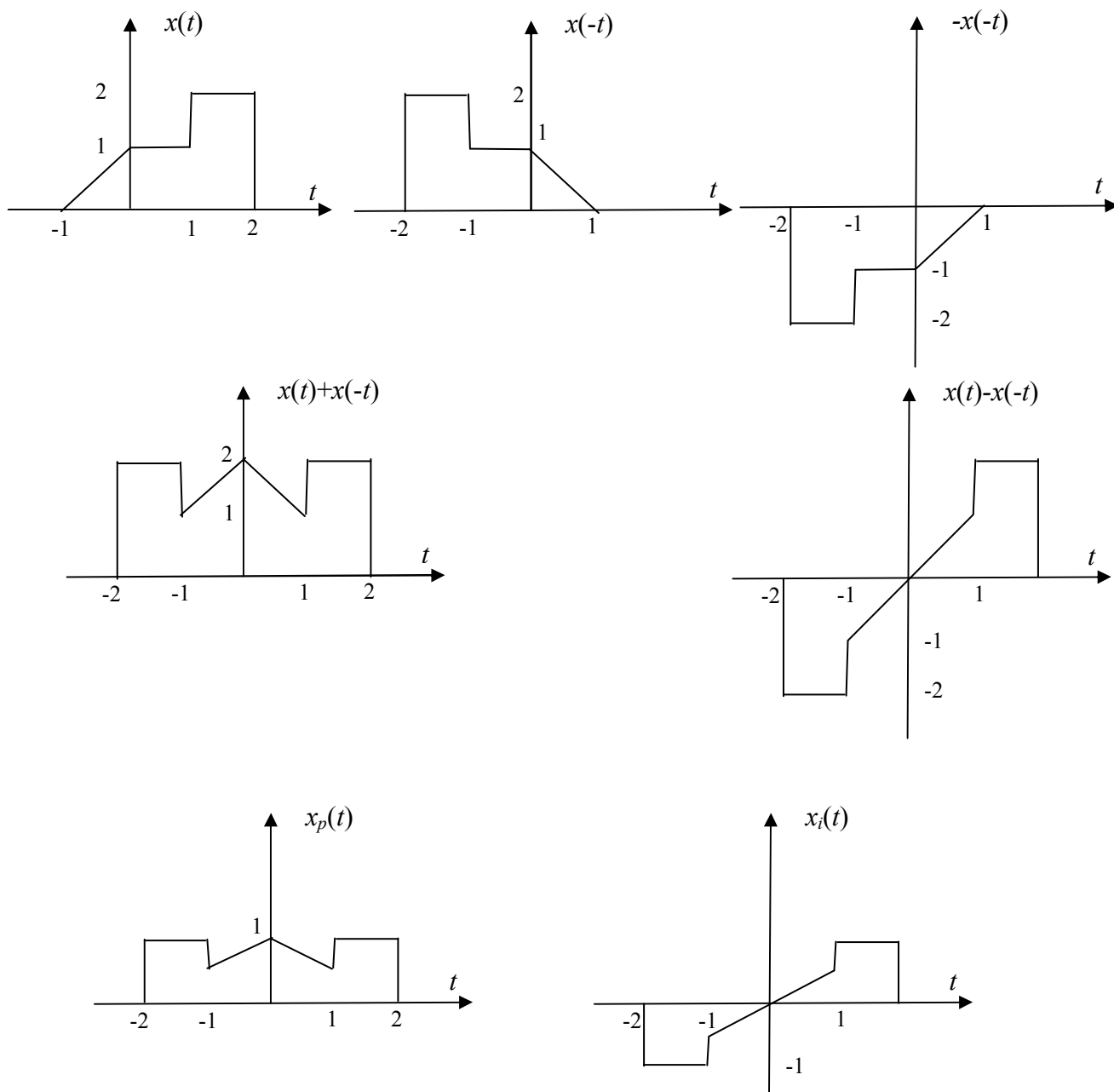
$$\triangleright \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta'(t) dt = - \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = -1$$

$$\triangleright \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta''(t-1) dt = (-1)^2 \left. \frac{d^2x(t)}{dt^2} \right|_{t=1} = \delta'(t-1)$$

4)- Parties paire et impaire du signal $x(t)$

$$\text{Partie paire: } x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$$\text{Partie impaire: } x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$



Exercice 5 (supplémentaire)

$$x(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

1)- Calcul de la puissance moyenne de $x(t)$ en fonction de l'intervalle de mesure T .

La puissance moyenne d'un signal $x(t)$ mesurée sur un intervalle de Temps T est:

$$\begin{aligned} P_x(T) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right) dt = \frac{A^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1 - \cos\left(\frac{4\pi}{T_0} t\right)}{2} dt \\ P_x(T) &= \frac{A^2}{2T} \left[t - \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{T_0} t\right)}{\frac{4\pi}{T_0}} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{A^2}{2T} \left[T - \frac{\sin\left(\frac{4\pi T}{T_0}\right)}{\frac{4\pi}{T_0}} + \frac{\sin\left(-\frac{4\pi T}{T_0}\right)}{\frac{4\pi}{T_0}} \right] \\ P_x(T) &= \frac{A^2}{2T} \left[T - \frac{\sin\left(\frac{2\pi T}{T_0}\right)}{\frac{4\pi}{T_0}} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi T}{T_0}\right)}{\frac{4\pi}{T_0}} \right] = \frac{A^2}{2} \left[1 - \frac{2\sin\left(\frac{2\pi T}{T_0}\right)}{\frac{4\pi T}{T_0}} \right] = \frac{A^2}{2} \left[1 - \frac{\sin\left(\frac{2\pi T}{T_0}\right)}{\frac{2\pi T}{T_0}} \right] \\ P_x(T) &= \frac{A^2}{2} \left[1 - \text{sinc}\left(\frac{2T}{T_0}\right) \right] \end{aligned}$$

2)- Montrons que la puissance moyenne totale est égale à celle calculée sur l'intervalle T_0 , c'est à dire:

$$P_x = P_x(T_0)$$

La puissance moyenne totale est mesurée sur tout l'axe des Temps:

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} P_x(T) \\ P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2} \left[1 - \text{sinc}\left(\frac{2T}{T_0}\right) \right] = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \text{sinc}\left(\frac{2T}{T_0}\right) \\ \text{or } \lim_{T \rightarrow \infty} \text{sinc}\left(\frac{2T}{T_0}\right) &= 0 \text{ (voir cours).} \end{aligned}$$

Par conséquent:

$$P_x = \frac{A^2}{2}$$

$$\begin{aligned} P_x(T_0) &= P_x(T) \text{ pour } T = T_0 \\ P_x(T_0) &= \frac{A^2}{2} \left[1 - \text{sinc}\left(\frac{2T_0}{T_0}\right) \right] = \frac{A^2}{2} [1 - \text{sinc}(2)] \end{aligned}$$

$$\text{or } \text{sinc}(2) = \frac{\sin(2\pi)}{2\pi} = 0.$$

Par conséquent:

$$P_x(T_0) = \frac{A^2}{2}$$

Finalement, $P_x = P_x(T_0)$

C.Q.F.D

3)- Pour quelle autre valeur de l'intervalle T obtient-on le même résultat.
Cela revient à résoudre l'équation suivante:

$$P_x(T) = \frac{A^2}{2} \Rightarrow \frac{A^2}{2} \left[1 - \text{sinc} \left(\frac{2T}{T_0} \right) \right] = \frac{A^2}{2} \Rightarrow \text{sinc} \left(\frac{2T}{T_0} \right) = 0 \Rightarrow \sin \left(\frac{2\pi T}{T_0} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi T}{T_0} = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \boxed{T = k T_0} \quad (\text{multiple de } T_0)$$

Exercice 6 (supplémentaire)

Parties paire et impaire du signal $x(t) = A \sin(\omega t - \phi)$.

Partie paire: $x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$

Partie impaire: $x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} = \frac{1}{2} [A \sin(\omega t - \phi) + A \sin(-\omega t - \phi)]$$

$$x_p(t) = \frac{A}{2} [(\sin(\omega t) \cos(\phi) - \cos(\omega t) \sin(\phi)) + (\sin(-\omega t) \cos(\phi) - \cos(-\omega t) \sin(\phi))]$$

$$x_p(t) = \frac{A}{2} [\sin(\omega t) \cos(\phi) - \cos(\omega t) \sin(\phi) - \sin(\omega t) \cos(\phi) - \cos(\omega t) \sin(\phi)]$$

$$x_p(t) = \frac{A}{2} [-2 \cos(\omega t) \sin(\phi)]$$

$$\boxed{x_p(t) = -A \cos(\omega t) \sin(\phi)}$$

$$x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} = \frac{1}{2} [A \sin(\omega t - \phi) - A \sin(-\omega t - \phi)]$$

$$x_i(t) = \frac{A}{2} [(\sin(\omega t) \cos(\phi) - \cos(\omega t) \sin(\phi)) - (\sin(-\omega t) \cos(\phi) - \cos(-\omega t) \sin(\phi))]$$

$$x_i(t) = \frac{A}{2} [\sin(\omega t) \cos(\phi) - \cos(\omega t) \sin(\phi) + \sin(\omega t) \cos(\phi) + \cos(\omega t) \sin(\phi)]$$

$$x_i(t) = \frac{A}{2} [2 \sin(\omega t) \cos(\phi)]$$

$$\boxed{x_i(t) = A \sin(\omega t) \cos(\phi)}$$