Ahmed Badr

lec : 2

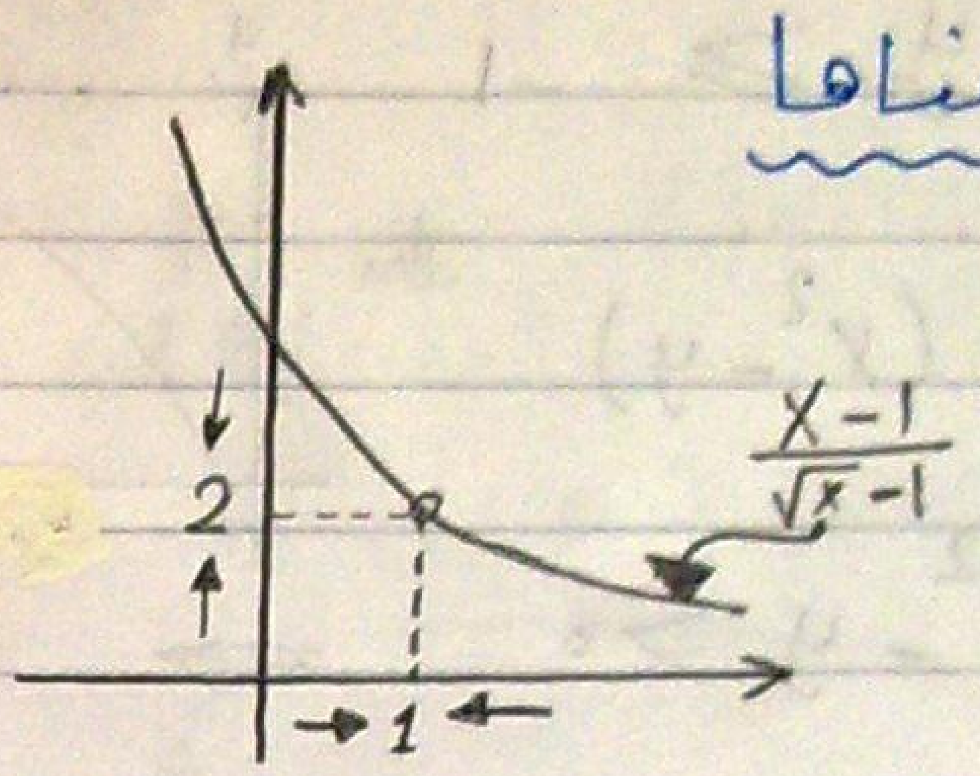
3 limits & continuity

Remember

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{0}{0}$$

$y = f(x)$

معناها



$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} * \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

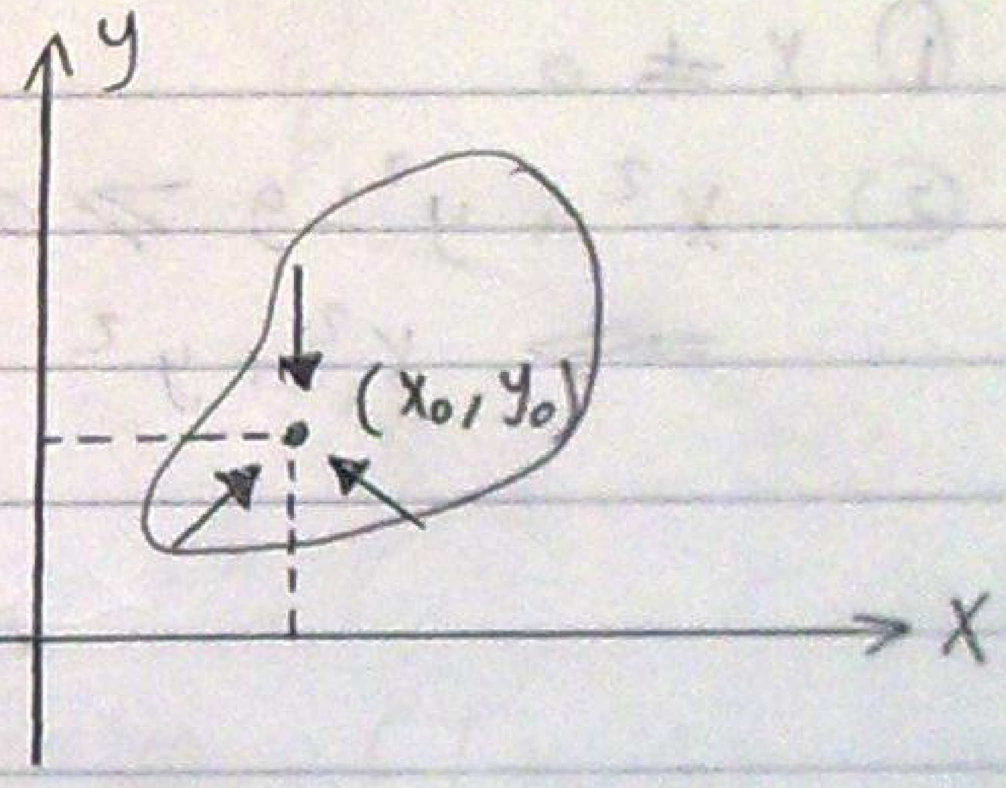
$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \to 1} \sqrt{x}+1 = 2$$

$\boxed{1}$ عندما تقترب قيمة x من

$\boxed{2}$ فإن قيمة الداله y تقترب من

$z = f(x, y)$

* إذا أردنا اثبات عدم وجود نهاية ما فإننا
* يجب أن نوضح أن النهاية تأخذ قيمتين مختلفتين على مسارين مختلفين



E.x 5 P.g 8

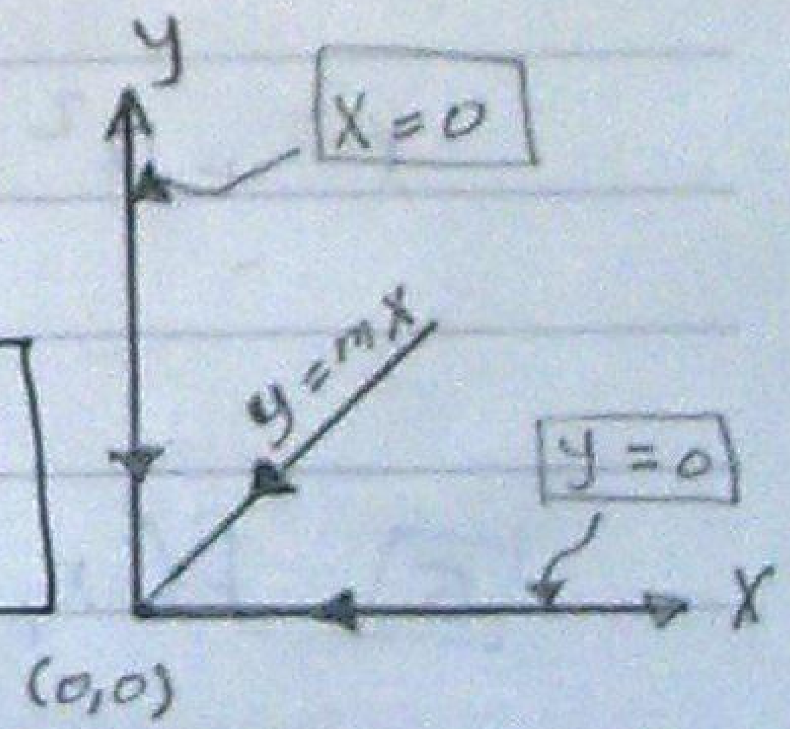
Prove that $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{2x-y}{x+3y}$ not exist

*** 1st solution**

$\boxed{1}$ $\lim_{x \to 0} \frac{2x}{x} = \boxed{2}$

مختلفين ⇐ lim غير معروفه عند النقطه (0,0)

$\boxed{2}$ $\lim_{y \to 0} \frac{-y}{3y} = \boxed{\frac{-1}{3}}$



*** 2nd solution**

$y = mx$ معادلة مستقيم

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{2x-y}{x+3y} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{2x-mx}{x+3mx} = \frac{2-m}{1+3m}$$

∴ lim غير معروفه عند النقطه (0,0) لأنها تعتمد على m

Ex.

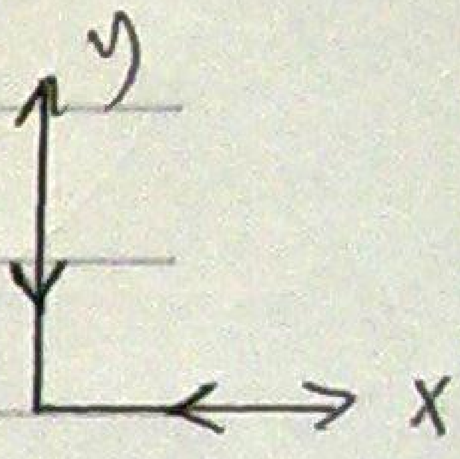
Find $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin xy}{x}$

Remember

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\sin \cancel{x}y}{\cancel{x}y}}_{\to 1} \cdot y = \lim_{y\to 2} y = 2$$

Ex. Find $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2}$



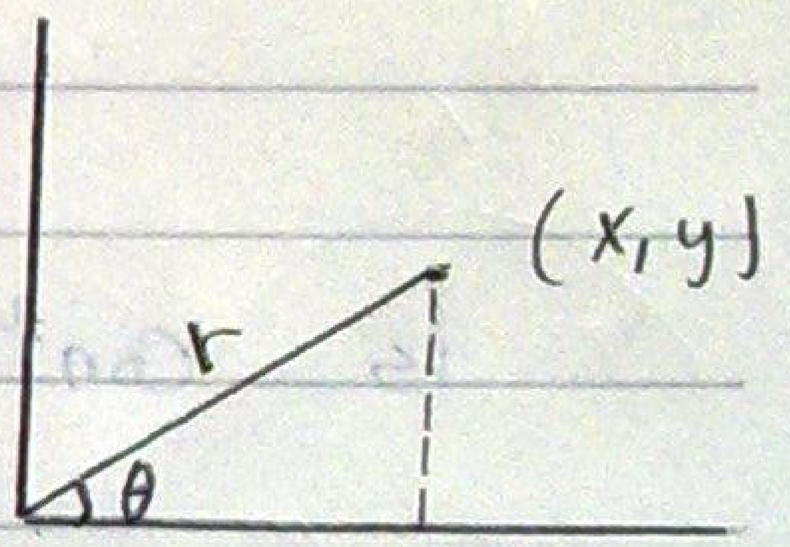
$\boxed{1}$ $x=0$ $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{y^2} = 0$ & $\boxed{2}$ $y=0$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x^2} = 0$

$$\lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)^3 (r\sin\theta)}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^{\cancel{4}\,2} \cos^3\theta \sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^2 \cos^3\theta \sin\theta$$

$= 0 \longrightarrow$ ال lim معروف وقيمته تساوي

لو المعادله النهائيه تعتمد على θ يبقى غير معروف



$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$x^2 + y^2 = r^2$

$(x,y)\to(0,0) \Rightarrow r\to 0$

Ex.

Find $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = \cos^2\theta$$

غير معروفه لأن الناتج يعتمد على θ

Continuity

يقال أن الداله $Z = f(x,y)$ متصله عند النقطه (x_0, y_0) إذا كان :-

$\boxed{1}$ لابد أن تكون الداله معرفه عند هذه النقطه $f(x_0, y_0)$

$\boxed{2}$ أن يكون هناك $\lim$ لهذه الداله عند النقطه $f(x_0, y_0)$

$\boxed{3}$ أن تتساوى قيمتى $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$

$$f(x_0, y_0) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

Ex.

Show that $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

is Continous at every point except the origin

$\boxed{1}$ if $(x,y) \neq (0,0) \Longrightarrow f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

Rational Function

$\therefore$ the function is always Continous

@ origin

$\boxed{1}$ $f(0,0) = 0$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$

$y = mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{2m}{1+m^2} \longrightarrow$$ غير معرف يعتمد على m

$\therefore$ الداله متصله عند كل النقط ما عدا $(x,y) = (0,0)$

Ex.

For the following function, define $f(0,0)$, in such away that extends f to be continous at origin

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{3x^2 - x^2y^2 + 3y^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln\left(\frac{3x^2 - x^2y^2 + 3y^2}{x^2+y^2}\right) \qquad \boxed{\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{matrix}}$$

$$\lim_{r\to 0} \ln\left[\frac{3r^2\cos^2\theta - r^4\cos\theta\sin\theta + 3r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}\right]$$

$$= \lim_{r\to 0} \ln\left[\frac{3r^2\overbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}^{1} - r^{4}\cos\theta\sin\theta}{r^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1}}\right]$$

$$= \lim_{r\to 0} \ln\left(3 - r^2\cos\theta\sin\theta\right) = \ln 3$$

$$\therefore f(x,y) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{3x^2 - x^2y^2 + 3y^2}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ \ln 3 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ahmed Badr