

Practico N° 1 – Operaciones entre conjuntos y Relaciones

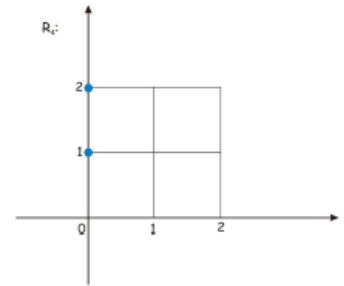
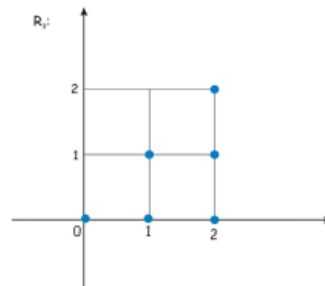
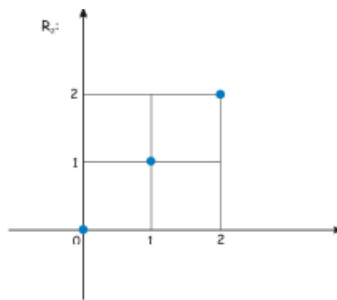
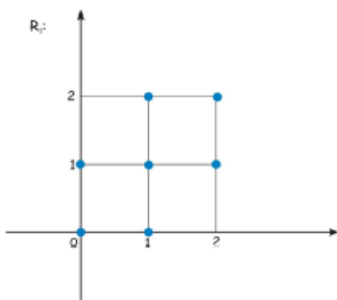
Notas:

- Leer el capítulo N° 7: Relaciones del libro "Matemática Discreta y sus aplicaciones" Kenneth H. Rosen 5 edición, Mc Graw Hill, en español.
 - Leer capítulo N° 5: Relaciones y Funciones del libro: "Matemática Discreta y Combinatoria" Ralph. P. Grimaldi Editorial Pearson Prentice Hall 3a edición.
1. Dados $A = \{2, 3, 4\}$ y $B = \{4, 5\}$, determinar: $A \times B$, $B \times A$, $B \times B$, $B \times B \times B$
 2. Del conjunto $A \times A$ se conocen los elementos (c, d) y (a, b) . Además se sabe que $|A \times A| = 16$. Hallar $A \times A$.
 3. Un alumno dice haber hallado el siguiente producto cartesiano: $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (c, 1), (c, 2)\}$, ¿es correcta su afirmación? Fundamenta tu respuesta.
 4. Halla todos los subconjuntos de $A \times B$ (es decir, su conjunto de partes $P(A \times B)$), siendo $A = \{0, 1\}$ y $B = \{2\}$.
 5. Indicar si los siguientes conjuntos son relaciones o no de A en B , siendo $A = \{2, 3, 4\}$ y $B = \{4, 5\}$: $\{\}$, $\{(2, 4)\}$, $\{(2, 4), (2, 5)\}$, $\{(2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$, $\{(2, 4), (3, 4), (4, 5)\}$, $A \times B$
 6. Dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5\}$, $C = \{3, 4, 7\}$.
Determinar: $A \times B$, $B \times A$, $A \cup (B \times C)$, $(A \cup B) \times C$, $(A \times C) \cup (B \times C)$.
 7. Dados $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 4, 5\}$, de ejemplos de tres relaciones no vacías de A en B , y de tres relaciones no vacías binarias en A .
 8. Dado $A = \{1, 2, 3\}$, señalar si las relaciones dadas a continuación cumplen o no con las propiedad reflexiva y/o simétrica:
 $R_1 = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$, $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3)\}$, $R_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$,
 $R_4 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$, $R_5 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 3)\}$
 9. Dado $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dar un ejemplo de una relaciones sobre A , que sean:
 - a) reflexiva y simétrica, pero no transitiva.
 - b) reflexiva y transitiva, pero no simétrica.
 - c) simétrica y transitiva, pero no reflexiva.
 10. Para cada una de las siguientes relaciones, determine si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.
 - a) $R \subseteq \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$, donde aRb , si a es divisor de b .
 - b) Para un universo U y un subconjunto fijo C de U , se define R sobre $P(U)$ como sigue:
Para cualquier $A, B \subseteq U$, ARB si $A \cap C = B \cap C$.
 - c) En el conjunto A de todas las rectas del plano α , se define R para cualquier par de rectas r y s de α como rRs si r es perpendicular a s .
 - d) R es la relación sobre \mathbb{Z} tal que xRy si $x+y$ es un número par (impar).
 - e) R es la relación sobre \mathbb{Z} tal que xRy si $x-y$ es un número par (impar).
 - f) Sea T el conjunto de todos los triángulos del plano \square . R es la relación sobre T tal que xRy , si x e y tienen un ángulo de igual medida.
 - g) R es la relación de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $(x, y)R(z, w)$ si $x \mid z$.

11. Indicar de la relaciones del ejercicio anterior, ¿Cuáles son relaciones de orden parcial y cuales son de equivalencia?
12. Sea $A=\{1,2,3,4\}$, y sea $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,3),(3,3),(4,4)\}$, determinar las clases de equivalencia.
13. Sean $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ y R definida en A tal que $xRy \Leftrightarrow x + y = 3$.
 - a) Determinar R por extensión.
 - b) Representarla por medio de un diagrama.
 - c) Investigar que propiedades cumple.
14. Dado $P = \{a, b, c, d\}$, en el se define la relación R tal que:

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (b, c), (c, b)\}$$
 - a) Investigar si R es de equivalencia.
 - b) En caso afirmativo, hallar las clases de equivalencia de los elementos de P .
15. Sea $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $R=\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4),(4,5), (5,4), (5,5), (6,6)\}$, determinar: a) [1], [2] y [3], b) la partición que induce R sobre A .
16. Sea R definida en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c$, se pide:
 - a) Investigar si R es una relación de equivalencia.
 - b) Escribir las clases de equivalencia y el conjunto cociente en el caso que la relación R se defina sobre el conjunto $A=\{1,2,3,4,5\}$
 - c) Hallar las clases de equivalencia y el conjunto cociente de la relación R definida en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
17. Investigar si la relación R definida en $\mathbb{Z} : xRy \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y$ es de equivalencia.
18. Se define en el conjunto de los números reales la siguiente relación: $xRy \Leftrightarrow x - y = x^3 - y^3$.
 - a) Probar que R es una relación de equivalencia.
 - b) Hallar las clases de los reales 1,2 y 3.
19. Se define en \mathbb{R}^* la siguiente relación: $aRb \Leftrightarrow a \times b > 0$.
 - a) Probar que R es de equivalencia.
 - b) Hallar las clases de equivalencia de los reales 1 y -1.
20. Se define en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la relación $(x,y) R (x',y') \Leftrightarrow x-x'=2(y-y')$
 - a) Probar que R es de equivalencia
 - b) Hallar las clases de $(0, 0)$ y de $(2,-1)$
21. Sea A un conjunto y R_1 y R_2 relaciones de equivalencia en A . Probar que $R_1 \cap R_2$ es una relación de equivalencia en A .
22. Sea R definida en A con $A \neq \emptyset$. tal que R es idéntica y transitiva; y sea S definida en A tal que $aSb \Leftrightarrow (aRb \wedge bRa)$. Demostrar que S es de equivalencia.

23. En el conjunto de las rectas del plano definimos la relación R de la siguiente manera: $s R r \Leftrightarrow s \parallel r$, siendo r y s dos rectas:
 a) Prueba que R es de equivalencia.
 b) Describe sus clases de equivalencias.
24. Sea $T : \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (a,b) T (c,d) \Leftrightarrow b - d = a^2 - c^2$
 a) Demuestra que T es una relación de equivalencia.
 b) Halla la clase de $(0, 0)$
25. Sean R_1, R_2, R_3 y R_4 , relaciones definidas en el conjunto $A = \{0, 1, 2\}$, cuyas representaciones en sistemas de ejes cartesianos son las siguientes:



Investiga si las relaciones anteriores son de equivalencia o de orden. Si alguna relación es de equivalencia, determina el conjunto cociente y si es de orden, indica si es total o parcial y halla.

26. Demuestra que la relación R definida en \mathbb{Z} , tal que: $x R y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 2x - 2y$ es de equivalencia. Investiga si $-1 \in C_3$.
27. Determina si las siguientes relaciones son o no relaciones de orden. En caso afirmativo, indica si son de orden total o parcial:
 i) la relación de inclusión entre conjuntos.
 ii) la relación \leq entre números reales.
 iii) la relación $a \mid b$ (a divide a b o b es divisor de a) en el conjunto de los naturales.
28. Dada la relación $R \subseteq \mathbb{N}^2$ tal que: $m R n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} / m^2 = kn$.
 i) ¿ R es de equivalencia? En caso afirmativo halla el conjunto cociente.
 ii) Halla $A = \{n \in \mathbb{N} / 4 R n\}$ y $B = \{m \in \mathbb{N} / m R 4\}$.

29. Dado $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, se definen las siguientes relaciones:

$$S \subset A^2 / (x,y) \in S \Leftrightarrow \frac{3(x-y)}{x+y} \in \mathbb{Z} \quad T \subset A^2 / (x,y) \in T \Leftrightarrow \frac{7(x-y)}{x+y} \in \mathbb{Z}$$

Representa S y T y averigua si son relaciones de equivalencia, en caso afirmativo halla el conjunto cociente.

Para profundizar un poco más

30. Puedes realizar todos los ejercicios propuestos en los libros:
- "Matemática Discreta y sus aplicaciones" Kenneth H. Rosen 5 edición, Mc Graw Hill, en español. Capítulo N° 7: Relaciones. Páginas 439 - 495
 - "Matemática Discreta y Combinatoria" Ralph. P. Grimaldi Editorial Pearson Prentice Hall 3a edición. Capítulo N° 5: Relaciones y Funciones. Páginas 245 - 308