

أسئلة إثرائية مختارة شاملة + تصنيف لجميع الاختبارات السابقة

# الرياضيات

الصف الثاني عشر ( العلمي )

الفصل الأول ٢٠١٥ / ٢٠١٦

مديرية الوسطى

إعداد :

مشرفة البحث : سميرة حنيف

مشرف البحث : عبدالله مهنا

بسم الله الرحمن الرحيم

المعلمون والمعلمات الأفاضل

طلاب وطالبات الثانوية العامة الأعزاء

يسرُّنا أن نقدم إليكم هذا الجهد آمليْن أن يحققَ النفعَ وينالَ استحسانكم.

ملاحظة: يفضل حل هذه المادة الإثرائية بعد حل تمارين الكتاب المدرسي. 📖

والله ولي التوفيق

الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

## ورقة عمل (١)

نهاية الاقتران عند نقطة جد النهايات التالية:

$$(٥) \quad -٢ \text{ نها } \frac{س + \sqrt{٦ - س}}{٢ - \sqrt{س}} \quad -١ \text{ نها } \frac{س٥ + ٧س}{٩ - ٢(٣ - س)} \left( \frac{٧}{١٢} - \right) \leftarrow س$$

$$(٣٩) \quad ٣ - \text{إذا كان } ٥ = \xi, \text{ نها } \frac{\xi - (س)}{٥ - س} = ٧ \text{ فما قيمة نها } \frac{س٥ - (س)}{٥ - س} \leftarrow س$$

$$(٥) \quad -٥ \text{ نها } \frac{٥(١ - س)}{١ - س} \quad (٤) \quad -٤ \text{ نها } \frac{س٣ - ٢س}{١ - ١ + س} \leftarrow س$$

$$\left( \frac{٣}{٢} \right) \quad -٧ \text{ نها } \frac{٣ - ١ + س}{١ - س} \quad (٢٤) \quad -٦ \text{ نها } \frac{س}{٢س} + ٢ \leftarrow س$$

$$\left( \frac{١}{١٢} \right) \quad -٩ \text{ نها } \frac{١ + \sqrt{٨ + س} - \sqrt{٣ + س}}{١ - س} \quad \left( \frac{٢}{٣} \right) \quad -٨ \text{ نها } \frac{٢ + س - ٢س - ٣س}{٤ + س - ٢س - ٣س} \leftarrow س$$

$$(٢٤٣) \quad -١٠ \text{ نها } (س) = \xi, \text{ نها } (س) = ١٠ \text{ فما قيمة كل من أ، ب؟} \leftarrow س$$

$$-١٢ \text{ نها } \frac{١ + \sqrt{٢ + س} - \sqrt{٢٥ + س}}{٢ - س} \quad (٢٥) \quad -١١ \text{ نها } \frac{٢(٦ - س - ٢س)}{٢(٢ + س)} \leftarrow س$$

$$(٥) \quad \left. \begin{array}{l} \text{فما قيمة نها } (٢ + س) \\ \text{س} \end{array} \right\} = -١٣ \text{ نها } (س) \quad \left. \begin{array}{l} س \leq ٣, \\ س - ٢, \\ س > ٣ \end{array} \right\}$$

$$(١-) \quad -١٥ \text{ نها } \frac{١ + س - ٩س}{١ - س} \quad -١٤ \text{ نها } \frac{س \sqrt{٢} - \sqrt{١ + س}}{١ - س} \left( \frac{٥}{٢\sqrt{٢}} \right) \leftarrow س$$

$$(١-) \quad -١٦ \text{ إذا كانت نها } \frac{٤ - بس + ٢بس}{١ + س} \text{ موجودة فجد نها } \frac{بس - ٢بس}{٣ + س} \leftarrow س$$

١٧- إذا كانت  $و(س) = ٢س - ٢بس + ٥$ ،  $نهـا(س) = ٢$   $نهـا(س) = ٤$  فجد  $ا$ ،  $ب$ .  $\left(\frac{٣}{٨}, \frac{٥}{٤}\right)$

١٨-  $نهـا(س) = \frac{٦(٣-س) + ٢س - ١٨}{٣-س}$  (١٢) ١٩-  $نهـا(س) = [٥+س] - [٢+س]$  (٣)

٢٠- إذا كانت  $نهـا(س) = ١$  فما قيمة  $نهـا(س)$  و  $(٢+س)^2$  ؟ (١٤٧)

٢١-  $و(س) =$   $\left\{ \begin{array}{l} |١-س| ، ٢ > ٠ \\ [١-س] ، ٢ \geq س \geq ٤ \\ [س] + ٢ ، س > ٢ \\ [س] - ٩ ، س \leq ٢ \end{array} \right.$  فما قيمة  $نهـا(س)$  ؟ (١)

٢٢-  $و(س) =$   $\left\{ \begin{array}{l} |١-س| ، ٢ > ٠ \\ [١-س] ، ٢ \geq س \geq ٤ \\ [س] + ٢ ، س > ٢ \\ [س] - ٩ ، س \leq ٢ \end{array} \right.$  وكانت  $و(س)$  موجودة،  $\exists ص^+$  فما قيمة  $ا$  ؟ (٤)

٢٣-  $نهـا(س) = \frac{٣-س-١\sqrt{٣}}{٢+س}$  (٢-) ٢٤-  $نهـا(س) = \frac{٢-س-١\sqrt{٣}}{٢+س}$  (٢-)

٢٥- إذا كانت  $نهـا(س) = \frac{١-س}{١+س}$  فما قيمة الثابت  $ا$  ؟  $٢ = ن$

٢٦- إذا كانت  $نهـا(س) = \frac{٢س + ٢بس + ٢}{٢-س}$  فما قيمة الثابتين  $ا$ ،  $ب$  ؟ (١٠، ٣)

٢٧-  $نهـا(س) = \frac{٦+س-٢}{٣-س}$   $ب = جد ا$ ،  $ب$ . (١٥٥) ٢٨-  $نهـا(س) = \frac{١٦-س}{٨-س}$  (٨/٣)

٢٩- إذا كانت  $نهـا(س) = \frac{٢س^٢ - ٢(٢-س) - ٢٢}{٢-س}$  فما قيمة الثابت  $ا$  ؟  $١٤ = ٢$

٣٠-  $نهـا(س) = \frac{|٣-س| - |٣-س|}{س}$  (١) ٣١-  $نهـا(س) = \frac{\frac{١}{٤} - \frac{١}{٣+س}}{|١-س|}$  (١/١٦)

$$-32 \text{ نهيا } \frac{[س] - س}{|س^2 - 9|} \quad \left( \frac{1}{6} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} س^2 - 1س ، س \leq 1 \\ س^3 + س ، س > 1 \end{array} \right\}$$

$$-33 \text{ نهيا } (س) = \left. \begin{array}{l} \text{وكانت نهيا } (س) = 5 \text{ فجد أ، ب.} \\ س \leftarrow 1 \end{array} \right\} (2, 4-)$$

$$-34 \text{ نهيا } (س) = 3 ، \text{ نهيا } (س)^2 + 2(س) - \left( \frac{2}{س} \right) = 21 \text{ فجد نهيا } (س)^2 . (25)$$

$$-35 \text{ نهيا } (س) = 10 ، \text{ نهيا } (س) = 17 ، 7(س) \text{ غير معرف فجد نهيا } (س^2 + 3) (17)$$

$$-36 \text{ نهيا } (س) = 6 ، 8 = \frac{س^2 - 2س + 3}{س - 1} ، \frac{3}{2} = ب + \frac{س^2 - 2س + 3}{س - 1} . \text{ جد قيمة الثابت ب. } (1)$$

$$-37 \text{ نهيا } \frac{س^2 + 2س + 3}{س} = \frac{2 - \sqrt{2 + 2س}}{س} \text{ حيث } 2 \leq س . \left( \frac{1}{40} \right)$$

$$-39 \text{ إذا كان هكثير الحدود ، نهيا } \frac{1}{2} = \left( \frac{5 + (س)ه}{س} \right) \text{ وكانت نهيا } (س)ه = 3 + 5 - 2 \text{ فجد ب. } (4)$$

$$-40 \text{ نهيا } \frac{28س^7 - 1}{س^2 - 1} \quad \left( \frac{7}{2} \right) \quad -41 \text{ نهيا } \frac{س^6 - 1}{س^5 + 1}$$

$$-42 \text{ نهيا } \frac{1}{س - 1} \left( 1 - \frac{1}{س} \right) \quad \left( \frac{1-}{2} \right) \quad -43 \text{ نهيا } \frac{(س + 1)^2 (س - 4)}{س - 1} (6)$$

$$-44 \text{ نهيا } (س - 1) [س] (1) \quad -45 \text{ نهيا } (س - 1) [س] (1) \quad -46 \text{ نهيا } (س - 1) [س] (1)$$

$$-47 \text{ نهيا } (س - 1) [س] (4) \quad -48 \text{ نهيا } (س - 1) [س] (8) \quad -49 \text{ نهيا } (س - 1) [س] (\text{م.غ})$$

$$-50 \text{ نهيا } \frac{س^3 - س}{س^4 - 1} \quad \left( \frac{2}{3} \right)$$

السنة	السؤال	الجواب
٢٠٠٧	$\text{نها} = \frac{1+s}{s \leftarrow 1 - s - 2}$	ب
٢٠٠٧	$\text{نها} = \frac{1-s^9}{s \leftarrow 1 - s}$	ج
٢٠٠٧	$\text{نها} = \frac{\sqrt{s+3-4}}{s \leftarrow 5 - s}$	١/٦
٢٠٠٧	$\text{نها} = [s]$	أ
٢٠٠٨	$\text{نها} = \frac{s^2-4}{s \leftarrow 2 - s}$	د
٢٠٠٨	$\text{نها} = \frac{\sqrt{s+2-4}}{s \leftarrow s}$	ب
٢٠٠٨	$\text{نها} = \frac{s^3-2}{s \leftarrow s - 2}$	أ
٢٠٠٩	$\text{نها} = \frac{s^2-s}{s \leftarrow 1 - s}$	ج

٢٠٠٩	إذا كانت نهاه $(\sqrt{s})$ = نهاه $(s)$ فإن قيمة أ تساوي س ← ٢ س ← ٤	أ
٢٠١٠	١٦ (أ) ١٦ ± (ب) ٤ (ج) ٢ (د)	أ
٢٠١٠	نهاه $s - [s] =$ س ← ١ +	أ
٢٠١٠	نهاه $\frac{s^2 - 4s}{s - 4} =$ س ← ٤	أ
٢٠١٠	إذا كانت نهاه $(s) = 2 -$ فإن نهاه $(3 - (s)^2)$ = س ← ٢	أ
٢٠١١	١١ (أ) ٧ - (ب) ١٣ - (ج) ١٣ (د)	أ
٢٠١١	نهاه $\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}}{3 - s} =$ س ← ٣	د
٢٠١١	١ (أ) غ.م (ب) ١/٩ (ج) ٠ (د) ١/٩ -	د
٢٠١١	إذا كانت نهاه $(\sqrt{s})$ = نهاه $(s)$ فإن قيمة أ تساوي س ← ٢ س ← ٣	ج
٢٠١١	٣ (أ) ٣ (ب) ٩ (ج) ٨١ (د)	ج
٢٠١١	احسب نهاه $\frac{(s-1)^{\circ} - 32}{s+1}$ س ← ١ -	٨٠ -
٢٠١٢	نهاه $\frac{s-9}{3-\sqrt{s}} =$ س ← ٩	ب
٢٠١٢	١ (أ) صفر (ب) ٦ (ج) ٩ (د) غ.م	ب
٢٠١٢	إذا كانت نهاه $(s) = 7$ فإن نهاه $(3 - (s)^2)$ + $[\frac{1}{s}] =$ س ← ٢ س ← ١	ب
	٧ (أ) غ.م (ب) ٧ (ج) ٧,٥ (د) ٨	ب



٢٠١٢	$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 + \text{س} , \text{س} < 1 \\ \text{عند } \text{س} = 1 \\ \text{س} > 1 , \frac{\sqrt{1 - \text{س} - 2}}{1 - \text{س}} \end{array} \right\} = (\text{س}) = \text{البحث وجود النهاية للاقتراح}$	غ.م
٢٠١٢ إكمال	$\text{نها} = \frac{\text{س}^2 - 4}{\text{س} - 2} \quad \text{س} \leftarrow 2$ <p>(أ) -٤      (ب) ٠      (ج) ٤      (د) غ.م</p>	أ
٢٠١٣	<p>إذا كانت <math>\text{نها} = (\text{س}) = 2 - \text{س}^3</math> ، <math>\text{نها} = (\text{س}) = 8</math> <math>\text{س} \leftarrow 3</math></p> <p>فإن <math>\text{نها} = (\text{س}) \times (\text{س}) + \sqrt{(\text{س})} = \text{س}^3</math> <math>\text{س} \leftarrow 3</math></p> <p>(أ) -٦      (ب) -١٢      (ج) -٨      (د) -٤</p>	أ
٢٠١٣ إكمال	$\text{نها} = [\text{س}] \quad \text{س} \leftarrow \frac{1}{3}$ <p>(أ) -<math>\frac{1}{3}</math>      (ب) صفر      (ج) <math>\frac{1}{4}</math>      (د) <math>\frac{1}{2}</math></p>	د
٢٠١٤	$\text{نها} = \left[ \frac{1}{3} - \text{س}^3 \right] \quad \text{س} \leftarrow -\frac{1}{3}$ <p>(أ) -٢      (ب) -١      (ج) صفر      (د) ١</p>	ج
٢٠١٤	$\text{جد نها} = \left( \frac{\text{س}^2 + 1}{\text{س} - 2} - \frac{\text{س} + 2}{\text{س} - 2} \right) \quad \text{س} \leftarrow 2$	-١
٢٠١٤ إكمال صفة	$\text{نها} = \frac{\text{س}^7 - 1}{\text{س} - 1} \quad \text{س} \leftarrow 1$ <p>(أ) -٧      (ب) ٧      (ج) صفر      (د) غ.م</p>	أ
٢٠١٤ إكمال صفة	$\text{جد نها} = \frac{\text{س}^2 - 5\text{س}}{\text{س}^2 - 4\text{س} + 2} \quad \text{س} \leftarrow 0$	٦

ب	$\frac{ 2-s }{2-s} = \frac{2-s}{2-s}$ <p>(أ) ٢- (ب) ١- (ج) صفر (د) ١</p>	٢٠١٤ إكمال غرة
ب	$\frac{\sqrt{3-s} + 3}{6-s} = \frac{3-s+3}{6-s}$ <p>(أ) صفر (ب) <math>\frac{1}{3}</math> (ج) ٦ (د) غ.م</p>	٢٠١٥
ج	<p>إذا كان ق(س) كثير الحدود بحيث <math>\frac{4-s}{2-s} = \frac{8+s}{2+s}</math> فإن <math>\frac{5-s}{2-s} = \frac{8+s}{2+s}</math></p> <p>(أ) <math>\frac{21}{4}</math> (ب) <math>\frac{18}{4}</math> (ج) ٥ (د) <math>\frac{15}{4}</math></p>	٢٠١٥
أ=٦، ب=٩	<p>إذا كانت <math>\frac{\sqrt{3-b} + 3}{s} = 1</math> فما قيمة كل من الثابتين أ، ب؟</p>	٢٠١٥ إكمال

قوانين قد تهّمك في الموضوع التالي :

$\left. \begin{array}{l} 1-2 \text{ جا } s \\ 2 \text{ جتا } s - 1 \\ \text{جتا } s - \text{جا } s \end{array} \right\} = \text{جتا } s$	$\text{جا } s = 2 \text{ جتا } s$
$1 + \text{ظتا } s = \text{قتا } s$	$\text{جا } s + \text{جتا } s = 1$
$\text{ظا } s = (\pi - s)$	$\text{جا } s = (\pi - s)$
$\text{ظا } s = \left(s - \frac{\pi}{2}\right)$	$\text{جا } s = \left(s - \frac{\pi}{2}\right)$
$\text{جتا } s = (\pm \text{ب}) \pm \text{جا } s$	$\text{جا } s = (\pm \text{ب}) \pm \text{جتا } s$

## ورقة عمل (٢)

## نهاية الاقتراعات المثلثية

$$\left(\frac{1}{\pi^2}\right) \quad \frac{\text{جاس}}{\pi^2 - \text{س}} \quad \text{نہا} \quad \text{س} \leftarrow \pi$$

$$2-\text{نہا} \frac{\text{ظا}(س-۱)-\text{جا}\pi س}{س-۱} (\pi-۱-)$$

$$\frac{\text{جا}^2 \pi^2}{\text{س}^2 - 1, \text{س}^2 + 2} (\pi^2)$$

$$\frac{\text{جا ۲س - جتا ۲س} - ۱}{\text{جا س - جتا س}} \quad \text{نہا} \quad \begin{matrix} \pi \\ \leftarrow \text{س} \\ \frac{\pi}{4} \end{matrix} \quad (۲۷)$$

۵۔  $\frac{1 - \text{جٹا (ظاس)}}{\text{ظاس}}$  س ←

$$\left(\frac{1}{12}\right) \quad \frac{\text{جا (س+۲)}}{\text{س}^3 + ۸} \quad \text{نہا} \quad \text{س} \leftarrow ۲$$

$$\left(\frac{1}{4}\right) \frac{\sqrt{27} \text{ جتاس} - 1}{1 - \sqrt{2} \text{ ظاس}} \frac{\pi}{4} \text{ - نها}$$

۸- نہا  $\frac{2-2\text{جنا} 5\text{س}}{3\text{س}}$  س ← ۰

۹۔ نہا  $\frac{\text{جاس - س}}{\text{س - ظاس}}$  (۲۔)

(۸)  $\frac{10 - \sqrt{s+1}}{s}$  جا ۱۰ -

$$(۲) \quad \frac{۱ - \frac{\pi}{4} \text{ س}}{\frac{\pi}{4} \text{ س}} \frac{\text{ظاس}}{۱}$$

$$(۰) \quad \frac{۱ - \left( \frac{\pi}{۴} + s \right) \text{جا}}{\frac{\pi}{۴} - s} \quad \begin{matrix} ۱۲ - \text{نہا} \\ s \leftarrow \frac{\pi}{۴} \end{matrix}$$

۱۳- نہا  $\frac{\text{سظا س} + \text{جتا س} - ۱}{\text{س}}$  (۱-)

$$\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)$$

۱۵-  $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$  (م.غ)

(۱)  $\frac{۱-ظاس}{جتا۲س} \frac{\pi}{۴}$

$$\left( \frac{16}{9} - \right)$$

۱۸- نه اس قاس ۲۳ ظتاه س  
س ← .

$$-19 \text{ نهيا } \frac{\frac{\pi}{\text{جتا}}}{\text{س}} \text{ س } \left( \frac{\pi}{4} \right) \text{ س } \left( \frac{\pi}{4} \right)$$

$$-20 \text{ نهيا } \frac{\text{جتا}^3 \text{س}}{\pi - \text{س}} \text{ س } \left( \frac{1-}{2} \right)$$

$$-21 \text{ نهيا } \frac{\text{س}^2 (\text{س} + \text{جا}^8 \text{س} - \text{جا}^4 \text{س})}{\text{س}^2 \text{جتا} \text{س}} \text{ س } (10)$$

$$-22 \text{ نهيا } \frac{\text{جتا}^2 \text{س} - 1}{\text{س}^2} \text{ س } \left( \frac{1}{3} \right)$$

$$-23 \text{ نهيا } \frac{1 - \text{جتا}^8 \text{س} - 2 \text{جا}^2 \text{س}}{\text{س}^2} \text{ س } (3)$$

$$-24 \text{ نهيا } \frac{\text{س}^7 (\text{س}^3 \text{ظتا}^2 \text{س}^2 \text{قتا} \text{س})}{\text{س}} \text{ س } \left( \frac{7}{20} \right)$$

$$-26 \text{ نهيا } \frac{\frac{1}{\text{جاس}} - \frac{2}{\pi}}{\frac{\pi}{6} - \text{س}} \text{ س } \left( \frac{3\sqrt{2} -}{2} \right)$$

$$-27 \text{ نهيا } \frac{\text{س}^2 \text{ظتا}^3 \text{س}^3 + 1 - \text{جتا} \text{س}}{\text{س}} \text{ س } (0)$$

$$-28 \text{ نهيا } \frac{\frac{\pi}{\text{جتا}}}{\text{س} + 2} \text{ س } \left( \frac{\pi}{4} \right)$$

$$-29 \text{ نهيا } \frac{\text{جتا}^2 \text{س} + 1}{\pi - \text{جاس}} \text{ س } (4)$$

$$-30 \text{ نهيا } \frac{1 - \text{جاس}}{\frac{\pi}{2} (\text{س}^2 - \pi)} \text{ س } \left( \frac{1}{8} \right)$$

$$-31 \text{ نهيا } \frac{\text{جا}^2 \text{س}}{\pi - \text{جتا}^3 \text{س} + 1} \text{ س } \left( \frac{2}{3} \right)$$

$$-32 \text{ نهيا } \frac{1 - \text{قا}^2 \text{س}}{\text{س}^2} \text{ س } (2)$$

$$-33 \text{ نهيا } \frac{1 - \text{جا}^2 \text{س}}{\frac{\pi}{4} - \text{جتا} \text{س} - \text{جاس}} \text{ س } (0)$$

$$-34 \text{ نهيا } \frac{1 - \text{جتا}^5 \text{س}}{\text{س} - \text{جتا}^4 \text{س} - 1} \text{ س } \left( \frac{25-}{16} \right)$$

$$-35 \text{ نهيا } \frac{1 - \text{قاس}}{\text{س} - \text{جاس}} \text{ س } \left( \frac{1-}{2} \right)$$

$$-36 \text{ نهيا } \frac{1 - \text{قاس}}{\text{س} - \text{ظا}^2 \text{س}} \text{ س } \left( \frac{1-}{2} \right)$$

$$-37 \text{ نهيا } \frac{\text{جا} (\text{س}^2 - 4)}{(\text{س}^3 - 8) \text{ظا}} \text{ س } \left( \frac{1}{3} \right)$$

$$-38 \text{ نهيا } \frac{\text{س}^3 (\text{س} - 6) \text{قتا} (\text{س} - 2)}{\text{س}^2} \text{ س } (3)$$

$$-39 \text{ نهيا } \frac{\text{جتا}^3 \text{س} - \text{جتا} \text{س}}{\text{س}^2} \text{ س } (4-)$$

$$-40 \text{ نهيا } \frac{\text{جاي} \text{س}}{\text{س}^6} = \frac{\text{ظا}^5 \text{س}}{\text{س} - \text{مس}} = 2 \text{ جد ي، م.} \left( \frac{7}{2}, 1, 2 \right)$$

$$-41 \text{ نهيا } \frac{\text{جا} \left( \frac{\pi - \text{س}}{2} \right)}{(\pi - \text{س}) \text{جتا}} \text{ س } \left( \frac{1}{2} \right)$$

السنة	السؤال	الجواب
٢٠٠٧ إكمال	$\text{نہا} = \frac{\text{جتا}(\pi - s)}{s}$ <p>س ← .</p> <p>(أ) ٠ (ب) ١ (ج) غ.م (د) ١ -</p>	ج
٢٠٠٨	$\text{جد نہا} = \frac{\text{ظا}(\text{جاس})}{s^2}$ <p>س ← .</p>	$\frac{1}{4}$
٢٠٠٩	$\text{نہا} = \frac{\text{ظا} s^2}{\text{جاس} + s}$ <p>س ← .</p> <p>(أ) <math>\frac{1}{3}</math> (ب) ٢ (ج) <math>\frac{1}{3}</math> (د) صفر</p>	ج
٢٠٠٩	$\text{نہا} = \frac{\text{جتا} s^2 - \frac{1}{4}}{s - \frac{\pi}{4}}$ <p>س ← <math>\frac{\pi}{4}</math></p>	١ -
٢٠٠٩ إكمال	$\text{نہا} = \frac{s^2 \text{ظتا} s^3}{s}$ <p>س ← .</p> <p>(أ) <math>\frac{2}{3}</math> (ب) <math>\frac{3}{4}</math> (ج) صفر (د) غ.م</p>	أ
٢٠٠٩ إكمال	$\text{جد نہا} = \frac{1 - \text{جتا} s}{s^2}$ <p>س ← .</p>	٨
٢٠١٠	$\text{جد نہا} = \frac{\text{جا}(\sqrt{s+1} - 1)}{s}$ <p>س ← .</p>	$\frac{1}{3}$
٢٠١٠ إكمال	$\text{جد نہا} = \frac{s \text{ظاس}}{s - 1 - \text{جتاس}}$ <p>س ← .</p>	٢
٢٠١١	$\text{جد نہا} = \frac{1}{s^2 (\pi - s)^2 \text{قا} s}$ <p>س ← <math>\frac{\pi}{4}</math></p>	$\frac{1}{4}$

٢٠١١	إكمال	$\text{نها} = \frac{\text{جاس}}{\text{ظاس} \leftarrow \text{س}}$	ب
٢٠١٢	إكمال	$\text{أ) } ٠ \quad \text{ب) } \frac{1}{4} \quad \text{ج) } \frac{1}{4} - \quad \text{د) } ٢$	ب
٢٠١٢	إكمال	احسب نها س جتاس ظتاس	$\frac{1}{4}$
٢٠١٢	إكمال	$\text{جد نها} = \frac{١ - \text{جتاس} + \text{س جاس}}{\text{س}}$	٣
٢٠١٣	إكمال	$\text{جد نها} = \frac{\text{جاس} - \text{جاس جتاس}}{\text{س}}$	$\frac{1}{4}$
٢٠١٣	إكمال	$\text{نها} = \frac{\text{جا} (٢ - \text{س})}{١٠ - \text{س}}$	ج
٢٠١٣	إكمال	$\text{أ) } \frac{1}{٥} - \quad \text{ب) } ٠ \quad \text{ج) } \frac{1}{٥} \quad \text{د) } \text{غ.م}$	ج
٢٠١٤	إكمال	$\text{جد نها} = \frac{\left( \frac{\pi}{\text{س}} \right) \text{جا}}{١ - \text{س}}$	$\pi$
٢٠١٤	إكمال غرة	$\text{نها} = \frac{\text{جا} - \text{س}^٣}{\text{ظاس} \leftarrow \text{س}}$	ج
٢٠١٤	إكمال غرة	$\text{أ) } \frac{3}{4} \quad \text{ب) } \frac{2}{3} \quad \text{ج) } \frac{3}{4} - \quad \text{د) } \frac{2}{4} -$	ج

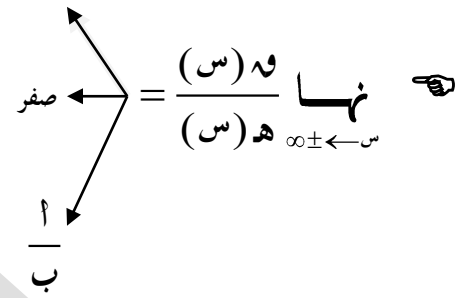
ملاحظة: يمكن حل الكثير من النهايات السابقة بطريقة سهلة عند دراسة "تعريف المشتقة" في الوحدة الثانية

## ورقة عمل (٣)

### النهاية عند اللانهاية

عندما تكون درجة البسط أكبر من درجة المقام.  $\infty$  أو  $-\infty$

عندما تكون درجة البسط أقل من درجة المقام.



عندما تتساوى درجتا البسط والمقام حيث  $\frac{1}{\text{ب}}$  معامل أعلى قوة في البسط والمقام على الترتيب.

$$(\infty-) \quad \frac{1 - \text{س}^3 + \text{س}^4}{\text{س}^3 - 2\text{س}^3 + \text{س}} \quad \text{نهما} \quad \infty \leftarrow \text{س} \quad -2$$

$$(0) \quad \frac{\text{س}^5 - 2(4 + \text{س}^3)}{\text{س}^7 + \text{س}^2 - \text{س}} \quad \text{نهما} \quad \infty \leftarrow \text{س} \quad -1$$

$$\left(\frac{1-}{2}\right) \quad \frac{3\text{س}^3 - |3\text{س}|}{3(2 + \text{س})} \quad \text{نهما} \quad \infty \leftarrow \text{س} \quad -4$$

$$\left(\frac{1}{6}\right) \quad \frac{(1 - \text{س})^4 - \text{س}^0}{\text{س}^6 - 2\text{س}^0} \quad \text{نهما} \quad \infty \leftarrow \text{س} \quad -3$$

$$(0) \quad \left( \frac{\text{س}^3}{2\text{س} + 2} + \frac{\text{س}^3}{2\text{س} - 2} \right) \quad \text{نهما} \quad \infty \leftarrow \text{س} \quad -6$$

$$(9) \quad \frac{2 - \left( \frac{3 + \text{س}}{\text{س}^3 - 1} \right)}{\text{س}} \quad \text{نهما} \quad \infty \leftarrow \text{س} \quad -5$$

$$(\infty-) \quad \left( \frac{2\text{س}^2}{3 + \text{س}} - \frac{2\text{س}}{\text{س} + 2} \right) \quad \text{نهما} \quad \infty \leftarrow \text{س} \quad -8$$

$$(9) \quad \left( 7 + \frac{1 - \text{س}^4}{5 + \text{س}^2} \right) \quad \text{نهما} \quad \infty \leftarrow \text{س} \quad -7$$

$$(1-) \quad \frac{4 + \text{س}^3}{5 - 2\text{س}^9} \quad \text{نهما} \quad \infty \leftarrow \text{س} \quad -10$$

$$\left(\frac{1}{8}\right) \quad \left( \frac{2\text{س} + 9}{3\text{س} - 2\text{س}} - \left( \frac{2 + \text{س}}{3 + \text{س}} \right) \right) \quad \text{نهما} \quad \infty \leftarrow \text{س} \quad -9$$

عندما تكون النهاية موجودة ولا تساوي الصفر فإن درجة البسط يجب أن تساوي درجة المقام!!

جد قيمة كل من  $\frac{1}{\text{ب}}$  فيما يلي :

$$(40) \quad 1 - \frac{3 + 2\text{س}^2 - \text{س}^0}{2\text{س}^4 - 1} \quad \text{نهما} \quad \infty \leftarrow \text{س} \quad -12$$

$$(64) \quad 2 = \frac{11 + \text{س}^2 - \text{س}^0}{6\text{س}^2 - 3\text{س} - 15} \quad \text{نهما} \quad \infty \leftarrow \text{س} \quad -11$$

$$(42-) \quad 2 - \frac{2(3 + \text{س}^2)}{2\text{س}^2(1 + \text{س})} \quad \text{نهما} \quad \infty \leftarrow \text{س} \quad -14$$

$$\left(\frac{1}{3}, 2\right) \quad 6 = \frac{1 - 3\text{س}^2 + \text{س}^0}{7 + \text{س}^4 - 3\text{س}} \quad \text{نهما} \quad \infty \leftarrow \text{س} \quad -13$$

$$١٥- \text{نہا} \xrightarrow{\infty \leftarrow s} s = \frac{s(5 + s^3) - 7s^4}{3 - \frac{1}{2}s^2} \quad (٤٢) \quad ١١- \text{نہا} \xrightarrow{\infty \leftarrow s} s = \left( 9 + s + \frac{1-s}{1+s} \right) \quad (٢٢)$$

$$١٧- \text{إذا كانت} \text{نہا} \xrightarrow{\infty \leftarrow s} s = 2, \text{نہا} \xrightarrow{\infty \leftarrow s} s = 2 \text{ فجد} \text{نہا} \xrightarrow{\infty \leftarrow s} s = \left( \frac{7}{s} + (s) + (s) + 4 \right) \quad (١٤)$$

$$١٨- \text{إذا كانت} \text{نہا} \xrightarrow{\infty \leftarrow s} s = 10 \text{ فجد} \text{نہا} \xrightarrow{\infty \leftarrow s} s = \left( \frac{9}{2+s} + (s) + 2 \right) \quad (٢٦)$$

$$١٩- \text{إذا كانت} \text{نہا} \xrightarrow{\infty \leftarrow s} s = 4 \text{ فجد} \text{نہا} \xrightarrow{\infty \leftarrow s} s = \left( \frac{1}{s} + 2 \right) \quad (١٣)$$

$$٢٠- \text{نہا} \xrightarrow{\infty \leftarrow s} s = \frac{1}{s} \quad (١) \quad ٢١- \text{نہا} \xrightarrow{\infty \leftarrow s} s = \frac{5}{s^2} \quad (٢٥)$$

$$٢٢- \text{نہا} \xrightarrow{\infty \leftarrow s} s = \frac{7}{(3+s)^2} \quad (٤٩) \quad ٢٣- \text{نہا} \xrightarrow{\infty \leftarrow s} s = \frac{s+|s^3-5|}{19+|1-s^6|} \quad \left( \frac{1}{3} \right)$$

$$٢٤- \text{نہا} \xrightarrow{\infty \leftarrow s} s = \left( \sqrt{s^2+5s-1} - \sqrt{s^2-s+2} \right) \quad (٣) \quad ٢٥- \text{نہا} \xrightarrow{\infty \leftarrow s} s = \frac{s^3+s^4}{s^2-5} \quad (١)$$

$$٢٦- \text{نہا} \xrightarrow{\infty \leftarrow s} s = \left( \frac{s^4-1}{3s-2} + \frac{s^3}{2s-2} \right) \quad (١) \quad ٢٧- \text{نہا} \xrightarrow{\infty \leftarrow s} s = \left( \frac{s^2}{3s-1} - \frac{s^4}{2s-3} \right) \quad (٣-)$$

$$٢٨- \text{نہا} \xrightarrow{\infty \leftarrow s} s = \left( \frac{s^2(2s+1)}{3s-4} - \frac{s^3}{2(2s-1)} \right) \quad (\infty) \quad ٢٩- \text{نہا} \xrightarrow{\infty \leftarrow s} s = \left( \frac{s+5}{3s-2} - \left( \frac{s-1}{2s+1} \right) \right) \quad (١)$$

$$٣٠- \text{إذا كان} \text{نہا} \xrightarrow{\infty \leftarrow s} s = \frac{bs}{|s|+1}, \text{نہا} \xrightarrow{\infty \leftarrow s} s = 1, \text{نہا} \xrightarrow{\infty \leftarrow s} s = 3 \text{ فجد قيمة الثابتين} \quad (٣, ٤-)$$



السنة	السؤال	الجواب
٢٠٠٧	نها $\frac{1 + 2s}{5 - 2s^3}$ $s \leftarrow \infty$	ج
	(أ) $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) غ.م	
٢٠٠٧	جد نها $\frac{3 + 2s - 5s^2}{2 - 3s^2}$ $s \leftarrow \infty$	$\frac{5}{4}$ -
٢٠٠٨	نها $\frac{3s - 2}{4 - 2s^2}$ $s \leftarrow \infty$	أ
	(أ) $\infty$ (ب) ٠ (ج) $\infty$ (د) غ.م	
٢٠٠٨ إكمال	نها $\frac{5}{s} \times \frac{s^3}{5 - s^2}$ $s \leftarrow \infty$	د
	(أ) $\infty$ (ب) $\frac{5}{2}$ (ج) $\frac{5}{2}$ - (د) $\infty$ -	
٢٠٠٩	نها $\left( \frac{5 - 3s}{1 + s} - 3s \right)$ $s \leftarrow \infty$	$\infty$
٢٠٠٩ إكمال	نها $\frac{2s^2 - 3}{s^2 + s}$ $s \leftarrow \infty$	د
	(أ) ١ - (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٢ -	
٢٠١٠	نها $\left( s - \frac{1}{s} \right)$ $s \leftarrow \infty$	ب
	(أ) ٠ (ب) $\infty$ - (ج) $\infty$ (د) غ.م	
٢٠١٠ إكمال	نها $\frac{5s^3 - 3s^2}{4s^2 - 7s}$ $s \leftarrow \infty$	د
	(أ) $\frac{5}{7}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (ج) ١ - (د) $\frac{3}{4}$ -	

٢٠١٢	إذا كانت نها $\left( \frac{s^2 + 3s}{s + 1} \right)_{s \rightarrow \infty}$ موجودة وتساوي عددا حقيقيا موجبا فما قيمة أ؟	١-
٢٠١٣	نها $\frac{s^2 - 2s + 3}{(s^3 - 1)}$ $s \rightarrow -\infty$	ج
٢٠١٤	نها $\frac{s^2 + 3}{s^2 - 9}$ $s \rightarrow -\infty$	أ
٢٠١٤ إكمال ضفة	نها $\left( \frac{s^2 - 2}{s + 1} \right)_{s \rightarrow \infty}$	ب
٢٠١٥	نها $\frac{4 s  + 3}{s^2 - 5}$ $s \rightarrow -\infty$	أ
٢٠١٥ إكمال	نها $\frac{(s - 2)^2}{s^3 + 1}$ $s \rightarrow -\infty$	د

## ورقة عمل (٤)

- ١- و (س) =  $\left. \begin{array}{l} |س - ١| ، س \leq ٣ \\ [س - ١] ، س > ٣ \end{array} \right\}$
- (٢،٤-)
- فجد نهاه (س)  $\left. \begin{array}{l} س \leftarrow ٣ \\ س \leftarrow ١ \end{array} \right\}$
- ٢- و (س) =  $\left. \begin{array}{l} س^٢ - ١س ، س \leq ١ \\ س^٣ + س + ب ، س > ١ \end{array} \right\}$
- (٢،٤-)
- ، نهاه (س) = ٥ فجد ا، ب.  $\left. \begin{array}{l} س \leftarrow ١ \\ س \leftarrow ١ \end{array} \right\}$
- ٣- و (س) =  $\left. \begin{array}{l} س^٣ - ٢س^٢ - ٥س + ٢ ، س < ١ \\ \frac{س^٣ - ٢س^٢ - ٥س + ٢}{س^٣ - ٢س^٢ - ٥س + ٢} ، س > ١ \end{array} \right\}$
- (١)
- ما قيمة ب إذا كانت نهاه (س) موجودة؟  $\left. \begin{array}{l} س \leftarrow ١ \\ س \leftarrow ١ \end{array} \right\}$
- ٤- و (س) =  $\left. \begin{array}{l} ب ، س \geq ١ \\ \frac{١ + س^٣}{١ + س^٣} ، س \neq \frac{١}{٣} \end{array} \right\}$
- (٣)
- فجد نهاه (س)  $\left. \begin{array}{l} س \leftarrow \frac{١}{٣} \\ س \leftarrow \frac{١}{٣} \end{array} \right\}$
- ٥- و (س) =  $\left. \begin{array}{l} س^٢ - ٤س ، س < ٢ \\ س^٣ ، س \geq ٢ \end{array} \right\}$
- (١)
- فما قيمة ك التي تجعل نهاه (س) موجودة؟  $\left. \begin{array}{l} س \leftarrow ٢ \\ س \leftarrow ٢ \end{array} \right\}$
- ٦- و (س) =  $\left. \begin{array}{l} [س + ٢] ، س < ١ \\ [س] - ٨ ، س > ١ \end{array} \right\}$
- فما قيمة أ حيث أ  $\exists$  ص و نهاه (س) موجودة؟  $\left. \begin{array}{l} س \leftarrow ١ \\ س \leftarrow ١ \end{array} \right\}$
- أ [٣ ، ٤] ، ٤ [٣ ، ٤]

$$(3) \quad \left. \begin{array}{l} [2+s] , \quad s < 1 \\ -7 - (s) = \end{array} \right\} \text{فما قيمة } s \text{ حيث } s \text{ و } -7 \text{ (س) موجودة؟}$$

$$(6) \quad \left. \begin{array}{l} [s] - 7 , \quad s > 1 \\ -8 - (s) = \end{array} \right\} \text{فجد } -7 \text{ (س)}$$

$$(4) \quad \left. \begin{array}{l} |10 - 2s| , \quad s \leq 3 \\ -9 - (s) = \end{array} \right\} \text{فجد } -9 \text{ (س)}$$

$$\left( \frac{1}{2} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{s^2 - 16}{8 - 2s} , \quad s > 4 \\ \frac{5 + \frac{8}{s}}{s} , \quad s = 4 \\ \frac{s - 4}{2 - s} , \quad s < 4 \\ \frac{s - 4}{|4 - s|} , \quad s < 4 \\ -10 - (s) = \end{array} \right\} \text{ما قيمة } s \text{ إذا كانت } -10 \text{ (س) موجودة؟}$$

$$(م.غ) \quad \left( \frac{1}{5} \right) \quad \begin{array}{l} -12 \text{ (س)} \\ \frac{1}{2} \leftarrow s \end{array} \quad \frac{1 + s^2}{1 + s^2 + 4s + 4} \quad \begin{array}{l} -11 \text{ (س)} \\ \frac{1}{2} \leftarrow s \end{array} \quad \frac{6 - s + s^2}{6 - s + s^2 - 4}$$

$$(4) \quad \begin{array}{l} -14 \text{ (س)} \\ \frac{1}{2} \leftarrow s \end{array} \quad \frac{|4 - s^2|}{|2 - s|} \quad (م.غ) \quad \begin{array}{l} -13 \text{ (س)} \\ \frac{1}{2} \leftarrow s \end{array} \quad \frac{[ \frac{s}{2} ] - 2s}{1 + s}$$

$$(1) \quad \begin{array}{l} -16 \text{ (س)} \\ \frac{1}{2} \leftarrow s \end{array} \quad \frac{|3 - s^2| - |3 - s|}{s} \quad (1) \quad \begin{array}{l} -15 \text{ (س)} \\ \frac{1}{6} \leftarrow s \end{array} \quad \frac{[s] - s}{|9 - s^2|}$$

(٣،٤)

، نها وه (س) موجودة فجد أ، ب .  
 $\sim \leftarrow 1$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 - \text{س}^3 + 3 \\ \text{س} - 1 \end{array} \right\} = \text{وه (س)} - 17$$

،  $1 < \text{س}$  ،

بس - ٥ ،  $1 > \text{س}$  ،

(١، ٢)

، نها وه (س) موجودة فما قيمة أ ؟  
 $\sim \leftarrow 2$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^3 + 3 \\ \text{س}^2 \geq 2 \end{array} \right\} = \text{وه (س)} - 18$$

،  $2 \geq \text{س}$  ،

،  $2 < \text{س}$  ،

(٨)

وكانت نها وه (س) موجودة فما قيمة أ حيث  $\exists \sim$  .  
 $\sim \leftarrow 4$

$$\left. \begin{array}{l} [\text{س} + 1] \\ \text{س}^3 \end{array} \right\} = \text{وه (س)} - 19$$

،  $4 < \text{س}$  ،

،  $4 > \text{س}$  ،

]٢، ٣[∃

٢٠ - ما مجموعة قيم أ التي تجعل نها [٢س] = ٣  
 $\sim \leftarrow 2$

]٣، ٥[∃

٢١ - إذا كانت نها [٨س] = ٥ فما قيمة الثابت أ ؟  
 $\sim \leftarrow 2$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^3 - \text{س}^2 \\ \text{س}^3 \end{array} \right\} = \text{وه (س)} - 22$$

،  $1 \geq \text{س}$  ،

،  $1 > \text{س} > 2$  ،

بس - ٢ ،  $2 \leq \text{س}$  ،

(٣، ٦)

جد نها (وه + ه) (س) .  
 $\sim \leftarrow 1$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 + 1 \\ \text{س}^3 \end{array} \right\}$$

،  $1 \geq \text{س}$  ،

،  $1 < \text{س}$  ،

(٢)

$$\text{وه (س)} - 23 = \frac{\text{س}^2 - \text{س}^3 + 2}{\text{س} - 1} ، \text{ه (س)}$$

(١-)

٢٤ - إذا كانت نها  $\frac{\text{س}^2 + 2}{\text{س}^2 + 2\text{س} + 1}$  غير موجودة فما قيمة أ ؟  
 $\sim \leftarrow 2$

## ورقة عمل (٥)

### الاتصال وخواص الاقتزانات المنصلة

$$\left(1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

متصل عند  $s=2$  فما قيمة الثابت  $a$  ؟

$$\left. \begin{array}{l} 2 \geq s, \\ 2 \leq s \end{array} \right\} = (s) \text{ - ١}$$

$$(-4)$$

متصل عند  $s=\frac{\pi}{2}$  فما قيمة الثابت  $a$  ؟

$$\left. \begin{array}{l} 2 \leq s, \\ \frac{\pi}{2} \geq s \end{array} \right\} = (s) \text{ - ٢}$$

$$(2)$$

متصل عند  $s=1$  فما قيمة الثابت  $b$  ؟

$$\left. \begin{array}{l} |s| - s, \\ s - 1 \end{array} \right\} = (s) \text{ - ٣}$$

$$\left(\frac{2-}{5}\right)$$

متصل عند  $s=0$  فما قيمة الثابت  $a$  ؟

$$\left. \begin{array}{l} \frac{s-3}{5}, \\ s=0 \end{array} \right\} = (s) \text{ - ٤}$$

$$(1, 9)$$

متصل في  $[-4, 4]$  فجد  $a, b$ .

$$\left. \begin{array}{l} 1 + a, \\ \frac{16 - s^2}{9 + s^2}, \\ s = 4 \end{array} \right\} = (s) \text{ - ٥}$$

٦- إذا علمت أن  $s$  (س) =  $\frac{s^3 + s^2}{[s]}$  فجد قيم  $s$  التي تجعل  $s$  (س) غير متصل .

(١-)  $\left. \begin{array}{l} s > 1, \quad \left[1 - \frac{s}{2}\right] \\ \frac{1}{s} \end{array} \right\} = s \text{ (س) } = 7$

متصل عند  $s=1$  فما قيمة الثابت  $A$  ؟

(متصل)  $\left. \begin{array}{l} s \leq 1, \\ s \neq 2, \quad \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \\ \frac{18-s}{9} \end{array} \right\} = s \text{ (س) } = 8$

ابحث اتصال  $s$  (س) عند  $s=2$

(متصل على ح)  $\left. \begin{array}{l} s \geq 3, \quad |2-s| \\ 1 - \frac{6}{s} \end{array} \right\} = s \text{ (س) } = 9$

ابحث اتصال  $s$  (س) في مجاله.

(٢٥)  $\left. \begin{array}{l} 0 \leq s < \frac{\pi}{4}, \quad \text{ب-ظاس} \\ \frac{\pi}{2} \geq s > \frac{\pi}{4}, \quad \text{ب} + \frac{4}{\pi} s \\ \frac{\pi}{4} = s, \quad 3 \end{array} \right\} = s \text{ (س) } = 10$

متصل عند  $s = \frac{\pi}{4}$  فجد  $A, B$ .

(١-)  $\left. \begin{array}{l} s \neq 1, \quad \frac{s^2 - (1+s)(1+s)}{1-s} \\ 2 \end{array} \right\} = s \text{ (س) } = 11$

متصل عند  $s=1$  فما قيمة  $k$  ؟

$s=1$

س  $\exists [1, 1]$

١٢- إذا كان  $\varphi$  (س) =  $\sqrt{\frac{س^2 + 1}{س^2 - 1}}$  فجد قيم س التي يكون عندها  $\varphi$  (س) غير متصل .

١٣-  $\varphi$  (س) =  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{س^2 - (3-2)س - 6}{س - 3} , س \neq 3 \\ 1 - س \end{array} \right\}$

(٤) متصل عند س = ٣ فما قيمة ج ؟

١٤-  $\varphi$  (س) =  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{س}{س - 1} , س < 1 \\ 2س , س > 1 \end{array} \right\}$

( $\frac{3}{4}, \frac{3}{4}$ ) ب متصل عند س = ١ فما قيمة أ، ب ؟

١٥-  $\varphi$  (س) =  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{س(س - 4)}{س^2 - 12} , س < 4 \\ 2 , س = 4 \\ \frac{س^2 - 2س - 8}{س - 4} , س > 4 \end{array} \right\}$

(٣، ٦) ٢ متصل عند س = ٤ فما قيمة كل من أ، ب ؟

١٦-  $\varphi$  (س) =  $\left\{ \begin{array}{l} 3س - 1 + س , س > 1 \\ 5 , س = 1 \\ س^2 - (1+2)س + 2 , س < 1 \end{array} \right\}$

(٣ - ١) ٥ متصل عند س = ١ فما قيمة كل من أ، ب ؟

١٧-  $\varphi$  (س) =  $\left\{ \begin{array}{l} 3 + س^2 , 1 \leq س \leq 2 \\ 9 , س > 2 \end{array} \right\}$

{ ٢ } متصل على [١، ٤] . متصل على [٤، ١] - { ٢ }

١٨-  $\varphi$  (س) = [٢س] فما مجموعة قيم س التي عندها  $\varphi$  (س) غير متصل ؟ غير متصل عند س = س =  $\frac{2}{3}$  حيث  $\varphi \ni \varphi$

١٩- إذا كان  $\varphi$  (س) =  $[1 - \frac{س}{3}]$  فما مجموعة قيم س التي يكون عندها  $\varphi$  (س) غير متصل ؟ س = ٣ ،  $\varphi \ni \varphi$



٢٠- إذا كان ق(س) متصلا عند س=٢ وكانت نها (٥-٣)هـ(س) = ١٧ فجد هـ(٢) (٤-)

٢١- إذا كان ق(س) متصلا عند س=٢، وكانت نها هـ(س) = ٥ فجد نها (٥(س) - [س - ١/٢]) (٤)

٢٢- إذا كانت نها (هـ(س) + ٤) = ٩ وكان ق(٣) = ٥ فابحث اتصال ق(س) عند س=٣. (متصل)

٢٣- هـ(س) = { ٥س - ٢ ، س ≥ ١  
٣س + ٨ ، س < ١ } متصل عند س=١ فما قيمة أ ؟ (٥)

٢٤- إذا كان هـ(س) متصل عند س=٣، وكان ق(٣) = ١ فجد نها هـ(س). (١/٢)

٢٥- هـ(س) = { س + ٢ - س ، س ≥ ١  
[س] + ٢ - س ، س < ١ } متصلا على [١، ١-] ، [١، ١-] متصلا على [١، ١-] . (١)

٢٦- هـ(س) = (س - ٢ - ٣س - ٥) / (س - ٢ - ٢س + ١٢) متصل على ح فما مجموعة قيم الثابت أ ؟ (١)

٢٧- ق(س) متصل عند س=٤، ق(٤) = ٦، نها هـ(س) = ٤ ب فما قيمة الثابت ب ؟ (١/٢)

٢٨- هـ(س) = { ١/س + س ، س > ٢  
[س] + ٣ ، س > ٢ ، س < ٣  
٧ ، س = ٣ } متصل عند س=٢ . جد أ وابحث الاتصال على [٣، ٣٠] . (١)

٢٩- هـ(س) = { ٤ ، س > ٢  
٢ + |س| ، س > ٢  
س ، س ≤ ٢  
١ ، س = ٢ } متصلا على ح - {٢-} . (١)

السنة	السؤال	الجواب
٢٠٠٨	$\left. \begin{array}{l}  س - ٢ ، ٣ \geq س > ٤ \\ ٤ - س، ٤ \geq س \geq ٥ \end{array} \right\} = (س) =$ <p>البحث في اتصال <math>٥</math> و <math>(س)</math> في الفترة <math>[٥، ٣]</math></p>	متصل على $\{٤\} - [٥، ٣]$
٢٠٠٩	$\left. \begin{array}{l} س^٢ - س + ٩، س \geq ١ \\ س^٥ - ١، س > ١، س \geq ٢ \end{array} \right\} = (س) =$ <p>البحث في اتصال <math>٥</math> و <math>(س)</math> في الفترة <math>[٢، ٠]</math></p>	متصل على $\{١\} - [٢، ٠]$
٢٠١٠	$\left. \begin{array}{l}  س  + س^٢ - ٥، س \geq ٠ \\ ٣س + ٢س، س < ٠ \end{array} \right\} = (س) =$ <p>البحث في اتصال <math>٥</math> و <math>(س)</math> عندما <math>س = ٠</math> متصل عند <math>س = ٠</math></p>	متصل عند $س = ٠$
٢٠١٠ إكمال	$\left. \begin{array}{l} ٣س^٢ - ٣س + \pi، س \geq ١ - \pi \\ س^٢ + ٣س + \pi، س > ١ - \pi \end{array} \right\} = (س) =$ <p>البحث في اتصال <math>٥</math> و <math>(س)</math> في الفترة <math>[١، ١ - \pi]</math></p>	متصل في الفترة $[١، ١ - \pi]$
٢٠١٢	<p>أحد الاقترانات متصل عند <math>س = ١</math> (أ) <math>١ = (س)</math> (ب) <math>١ = (س)</math> (ج) <math>١ = (س)</math> (د) <math>١ \neq (س)</math></p>	ج
٢٠١٢ إكمال	<p>الاقتران <math>ق(س) = [٠، ٨ + س]</math> متصل عند <math>س =</math></p> <p>(أ) <math>٠، ٨ -</math> (ب) صفر (ج) <math>٠، ٢</math> (د) <math>١، ٢</math></p>	ب
٢٠١٣	<p>إذا كان <math>ق(س)</math> اقترانا متصلا على <math>ح</math>، وكانت <math>٣ = (س + س) = ٤</math> فإن <math>ق(٢) =</math></p> <p>(أ) <math>٢</math> (ب) <math>٣</math> (ج) <math>٤</math> (د) <math>\frac{١٣}{٣}</math></p>	ج

٢٠١٣	$\left. \begin{array}{l}  س  + ٣ \geq ١, ٢ \geq س \\ س - ٤ \geq ١, ٢ > س \geq ٤ \\ س - ٢ \end{array} \right\} = \text{ابحث في اتصال الاقتران ق(س)}$	متصل على [١، ٤]	في الفترة [١، ٤]
٢٠١٣	$\left. \begin{array}{l} \frac{\sqrt{س+١} - ١}{\sqrt{س+١}} \neq ٠ \\ \frac{س}{٤} = ٠ \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$	٢-	متصل عند س=٠ فما قيمة ج؟
٢٠١٣ إكمال	$\left. \begin{array}{l} \frac{س^٣ + ١}{س + ١}, ٣ \geq س > ١ \\ ١ - س \geq ٢ - س \end{array} \right\} = \text{ابحث في اتصال الاقتران ق(س)}$	متصل على [-٣، ٢]	في الفترة [-٣، ٢]
٢٠١٤	<p>إذا كان ق(س) متصلاً وكانت نهايتها <math>٣ + ٢(س + ١) = ٧</math> فإن ق(٢) =</p> <p>س ← ١</p> <p>أ) ١      ب) ٢      ج) ٤      د) ٧</p>	ب	
٢٠١٤	$\left. \begin{array}{l} \frac{\sqrt{١-س}}{\sqrt{١-س}} \neq ١, س < ١ \\ ٢ + ١, س = ١ \\ ٢ + س, س > ١ \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$	$\frac{١}{٢} = أ$ $\frac{١}{٢} = ب$	متصلاً عند س=١ ، جد الثابتين أ ، ب.
٢٠١٤ إكمال ضفة	<p>إذا كان ق(س) متصلاً عند س=٢ ، ق(٢)=٣ وكانت نهايتها <math>٥ = (س)</math> ،</p> <p>س ← ١</p> <p>فإن نهايتها <math>٣ - (١ - س) = ٢</math></p> <p>س ← ١</p> <p>أ) ٣      ب) ٢      ج) ٤      د) ٧</p>	ب	

متصل على $\{0\} - [\pi, 2-]$	$\left. \begin{array}{l} \frac{\sqrt{2-s}}{2} \\ \frac{s-1}{s+5} \\ \frac{-jas}{s5} \end{array} \right\} = (s) =$ $s = -2, \quad 2- > s \geq 0, \quad \pi \geq s > 0,$ على $[\pi, 2-]$	٢٠١٤ إكمال ضفة
ج	الفترة التي يكون فيها الاقتزان $\sqrt{3-s} = (s)$ متصلا عليهما بين الفترات التالية هي : (أ) ح $[\infty, 3]$ (ب) $[\infty, 3]$ (ج) $[3, \infty]$ (د) $[0, \infty]$	٢٠١٤ إكمال غرة
متصل على $[1, 2-]$	$\left. \begin{array}{l} s^2 - 2s + 2, \quad 2- > s \geq 0 \\ s \in [2, 1] \end{array} \right\} = (s) =$ في الفترة $[1, 2-]$	٢٠١٥

## ورقة عمل (٦)

### نظرية القيم الوسطية ونظرية بلزانو

١-  $و(س) = س^3 - س^2 + س$  يحقق شروط نظرية القيم الوسطية في  $[١, ١]$  وكان  $ق(ج) = ٢٢$  ، ج  $\in [١, ١]$  .

(٤)

فما قيمة  $ل$  علما بأن  $ل \in ط$  ؟

٢- إذا علمت أن ٢، ٣ هما صفرا للاقتزان  $ق(س)$  وكان  $ه(س) = س^2 + س - ٥$  حيث  $ق(س)$  متصل. أثبت وجود صفر للاقتزان  $ه(س)$  في  $[٢, ٣]$  .

٣- إذا كان  $و(س) = س^2 + س - ل$  يحقق شروط نظرية بلزانو في  $[١, ١]$  فجد قيمة الثابت  $ل$  .

٤- ليكن  $و(س) = س^2 + س$  ،  $س \in [٢, ٢]$  . بين أنه يوجد ج  $\in [٢, ٢]$  بحيث  $ق(ج) = ١$

(٣، ٥)

٥- مكعب حجمه ٤٠ سم<sup>٣</sup> فما طول ضلعه لأقرب منزلة عشرية ؟

٦-  $و(س) = س^3 + س^2 - س + ل$  . ما قيمة  $ل$  إذا كان للاقتزان صفر في  $[٣, ١]$  ؟

٧-  $و(س) = س^3 + س^2 - س + ل$  . جد قيمة  $ل$  إذا علمت أن للاقتزان صفرا حقيقيا على الأقل .

٨-  $و(س) = س^3 + س - ٢$  ،  $ق(ج) = ٢٣$  حيث ج  $\in [١, ١]$  . جد  $ل$  علما بأن  $ل \in ص$  .

(٣)

٩-  $ق(س)$  متصل في  $[٤, ٢]$  ،  $ق(٢) = ٣$  ،  $ق(٤) = ١٥$  بين أنه يوجد ج  $\in [٤, ٢]$  بحيث  $ق(ج) = ٣$  ج .

(٤ = ١)

حيث  $س \in [٥, ٥]$  فإذا علمت أن  $ق(س)$

(١، ٢٥)

يحقق شروط بلزانو فجد  $ل$  والتقريب الثاني

لصفر الاقتزان.

$$\left. \begin{array}{l} س^2 - ١ \geq ٠ ، ٣ \geq س \\ س^2 - ١ < ٠ ، ٣ > س \geq ٥ \end{array} \right\} = ١٠ - ق(س)$$

١١-  $ق(س)$  ،  $ه(س)$  اقتزانان متصلان في  $[٥, ٢]$  وكان  $ق(٢) = ٧$  ،  $ق(٥) = ٢$  ،  $ه(٢) = ٣$  ،  $ه(٥) = ١٠$  بين أنه يوجد ج  $\in [٥, ٢]$  بحيث  $ق(س) = ه(س)$  .

١٢-  $ق(س)$  ،  $ه(س)$  متصلان في  $[١, ١]$  بحيث  $١ < ه(١)$  ،  $١ > ه(١)$  أثبت أن للمعادلة  $ق(س) = ه(س)$  حلا في  $[١, ١]$  .

١٣- برهن أن للمعادلة  $س - س + ١ = ٠$  جذرا واحدا على الأقل في  $[٣, ٣]$  .

١٤- ليكن  $و(س) = س^2 + س - ١$  ، ج  $< ٠$  يحقق شروط بلزانو في  $[١, ١]$  . بين أن  $ه(١) - ه(٠) > ١$  حيث أن  $و(٠) < ٠$  .

١٥-  $ق(س)$  ،  $ه(س)$  متصلان في  $[٢, ١]$  وكان  $ق(١) = ٣$  ،  $ق(٢) = ٤$  ،  $ه(١) = ٢$  ،  $ه(٢) = ٧$  . أثبت أن للمعادلة  $ق(س) = ه(س)$  حلا في  $[٢, ١]$  .

١٦- ق(س) متصل في  $[١٠,٠]$  وكان  $٠ < ق(س) < ١$  ،  $\forall س \in [١٠,٠]$  . أثبت أنه توجد جـ  $\exists$   $[١٠,٠]$  بحيث ق(ج)=جـ.

١٧- ق(س)، ه(س) متصلان في  $[٣,١]$  حيث ق(١)=١٠، ه(١)=٢، ق(٣)=٣، ه(٣)=٧. أثبت وجود جـ  $\exists$   $[٣,١]$  بحيث  $ه(ج) = ه^٢(ج)$  .

$$٢ > س \geq ٠ ، \quad ١ + س^٢$$

١٨- ق(س)=  $\left. \begin{array}{l} ١ + س^٢ \\ ٢ \leq س \end{array} \right\}$  أثبت وجود جـ  $\exists$   $[٥,٠]$  بحيث ق(ج)=١٧ ثم جد جـ . (٤)

١٩- عند استخدام نظرية بلزانو لإيجاد صفر حقيقي للاقتزان ق(س) وجد أن هذا الصفر ينتمي للفترة  $[٣,٢]$  وكان  $ه(٢) = ٥$  ،  $ه(\frac{٥}{٢}) = ١$

ما التقريب الثاني لصفر الاقتزان ؟ (٢,٧٥)

٢٠- إذا كان ق(س) متصلا على  $[٥,١]$  وكان : ق(١)=صفر ، ق(٢)=٩ ، ق(٣)=١ ، ق(٤)=١٦ ، ق(٥)=١ .

ه(س) =  $\sqrt[٥]{٢ - (س)}$  ، فما هو أقل عدد ممكن لأصفار ه(س) يمكن التأكد منها في  $[٥,١]$  . (٤)

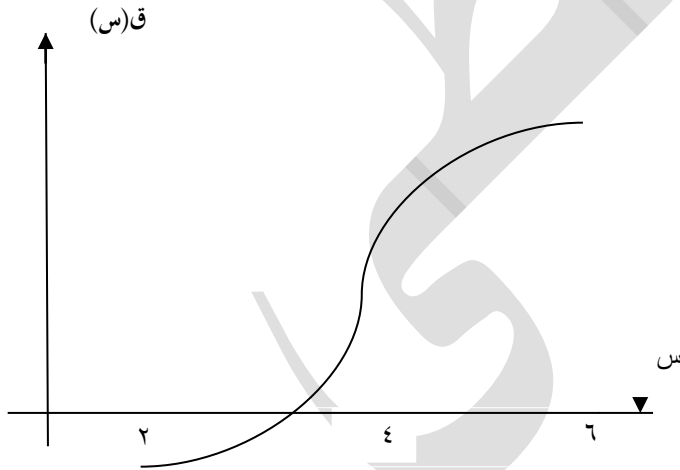
٢١- ليكن ق(س) كثير حدود معرفا في  $[٦,٢]$  حيث ق(٢)×ق(٦) > صفر وكان ق(٢)=٧ ، ق(٤)=٨ ، ق(٥)=١- . فما هو أفضل تقريب لصفر

الاقتزان ق(س) في الفترة  $[٦,٢]$  ؟؟ (٤,٥)

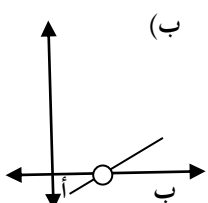
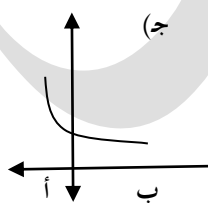
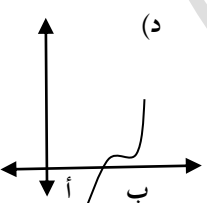
٢٢- الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) المتصل على  $[٦,٢]$  .

بين أن ق(س) يحقق بلزانو في تلك الفترة وجد التقريب الثاني

لصفر هذا الاقتزان. (٣)



٢٣) إذا كان ق(س) يحقق بلزانو على  $[أ,ب]$  ، وكان ق(أ)=ب ، ق(ب)=أ وكان ه(س) = ٢س فأثبت أن ك(س)=ق(س)-ه(س) يحقق بلزانو على نفس الفترة.

السنة	السؤال	الجواب
٢٠٠٧	إذا كان $هـ(س) = س^٣ - ٢س^٢ + س - ١$ فإنه يوجد للاقتان $ق(س)$ صفر في الفترة: (أ) $[١, ٠]$ (ب) $[٠, ١]$ (ج) $[١, ٢]$ (د) $[-٢, -١]$	ج
٢٠٠٧ دراسات	ليكن $هـ(س) = س - ١$ ، $هـ(س) = \sqrt{س}$ ، أثبت وجود $ج \in [١, ٠]$ بحيث $ق(س) = هـ(س)$ .	😊
٢٠٠٧ إكمال	إذا كان $ق(س) = جتاس$ ، أثبت وجود $ج \in [٠, \pi]$ بحيث $ق(ج) = ٠$ ثم جد $ج$ .	$\frac{\pi}{٢}$
٢٠٠٨	إذا كان $هـ(س) = س^٣ + س - ١$ ، $س \in [٢, ١]$ ، أثبت وجود $ج \in [٢, ١]$ بحيث $ق(ج) = ٧$ .	😊
٢٠٠٨ إكمال	ليكن $هـ(س) = س^٥ - س - ٢$ ، أثبت باستخدام نظرية بلزانو وجود صفر واحد على الأقل للاقتان $ق(س)$ في مجاله.	😊
٢٠٠٩	استخدم نظرية بلزانو في إيجاد قيمة تقريبية ثانية للعدد $\sqrt[٣]{٣}$ .	$\frac{٧}{٤}$
٢٠٠٩ إكمال	بين أنه يوجد للمعادلة $س^٣ - س = ١$ حل حقيقي واحد على الأقل.	😊
٢٠١٠	$ق(س)$ كثير حدود على الفترة $[٢, ٦]$ ، $ق(٢) = ٣$ ، $ق(٤) = -١$ ، $ق(٦) = -٣$ ما التقريب الثاني لصفر الاقتان في الفترة $[٢, ٦]$ ؟ (أ) ٥ (ب) ٤ (ج) ٣ (د) ٢	ج
٢٠١٠	إذا كان $هـ(س) = \frac{س^٢ + ٢س + ١}{س + ٤}$ ، $س \in [٣, ١]$ فأثبت وجود $ج \in [٣, ١]$ بحيث $ق(ج) = ٢$ .	😊
٢٠١٠ إكمال	استخدم نظرية بلزانو لإيجاد قيمة تقريبية ثانية للعدد $\sqrt[٥]{٣}$ في الفترة $[٣, ٢]$ .	٢,٢٥
٢٠١١	أحد الاقتانات المرسومة يحقق شروط نظرية بلزانو في الفترة $[أ, ب]$ (أ)  (ب)  (ج)  (د) 	د
٢٠١١	$ق$ ، $هـ$ كثيرا حدود موجبان في $[٣, ١]$ بحيث $هـ(١) - \frac{٢}{(١)} > ٠$ ، $هـ(٣) - \frac{٢}{(٣)} < ٠$ ، بين أنه يوجد على الأقل $ج \in [٣, ١]$ بحيث $ق(ج) = هـ(ج) = ٢$ .	😊

٣,٥	$\left. \begin{array}{l} ٤س + ١ - ٠ \geq ١ \geq ٣س \\ ٥س - ٢ \geq ٣س > ٥ \end{array} \right\} \text{إذا كان ق(س) =}$ <p>بين أن ق(س) يحقق شروط نظرية القيم الوسطية</p> <p>على <math>[١, ٥]</math> وأنه يوجد ج <math>\exists [١, ٥]</math> بحيث ق(ج) = ٢٠ ثم أوجد قيمة تقريبية ثانية للعدد ج.</p>	٢٠١١ إكمال
٢,٧٥	استخدم نظرية بلزانو لإيجاد قيمة تقريبية ثانية للعدد $\sqrt{٨}$ في الفترة $[٢, ٣]$ .	٢٠١٢
١,٢٥	إذا كان $٩س = (س)٢س + ٣س + ٢س$ ، $\exists [٢, ١]$ ، أثبت وجود ج $\exists [٢, ١]$ بحيث ق(ج) = ٩ ثم جد التقريب الثاني لقيمة ج.	٢٠١٢ إكمال
١,٢٥	باستخدام نظرية بلزانو بين أن للاقتان $٩س = (س)٢س + ٣س + ٢س - ٥$ صفرا واحدا على الأقل في الفترة $[٢, ١]$ ، ثم جد قيمة تقريبية ثانية لهذا الصفر.	٢٠١٣
١,٥	إذا كان $٨س = (س)٣س + ٣س + ٢س$ ، $\exists [٣, ١]$ ، أثبت وجود ج $\exists [٣, ١]$ بحيث ق(ج) = ٨ ثم جد قيمة تقريبية ثانية للعدد ج.	٢٠١٣ إكمال
$١٥,٣ \in \mathbb{A}$	إذا كان $٩س = (س)٢س - ٢س - ٣س - ١$ يحقق شروط بلزانو على $[-٣, ٣]$ ، جد جميع قيم الثابت أ.	٢٠١٤
$\frac{\pi}{6}$	إذا كان $٢س = (س)٢س - ١$ ، $\exists [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ ، أثبت وجود جذر واحد على الأقل لمنحنى الاقتان ق(س) على الفترة $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ ثم جد تلك الجذور.	٢٠١٤ إكمال غرة
٢,٥	إذا كان $٨س = (س)٣س - ٨س + ١٠س$ ، $\exists [٣, ١]$ ، أثبت وجود ج $\exists [٣, ١]$ بحيث ق(ج) = ٨ ثم جد قيمة تقريبية ثانية للعدد ج.	٢٠١٥
أ	إذا كان $٩س = (س)٣س - ٨س + ٦س$ ، فمن المؤكد أن للمعادلة $٢ =$ حلا في (أ) $[١, ٠]$ (ب) $[٣, ٤]$ (ج) $[١, ٢]$ (د) $[١, ٠]$	٢٠١٥



# الوحدة الثانية

## التفاضل

## ورقة عمل (V)

### متوسط التغير

١- إذا كان  $U(s) = \sqrt{3-s}$  ، متوسط التغير له في  $[٦,١]$  يساوي  $\frac{1}{3}$  فما قيمة  $١$  ؟ (٢)

٢- ليكن متوسط تغير الاقتران  $U(s)$  على الفترة  $[٥,٢]$  يساوي  $٦$  ، وكان  $هـ(s) = ٢U(s) + ٣ - ٢$  .  
جد متوسط تغير  $هـ(s)$  على نفس الفترة. (١٥)

٣- إذا كان  $U(s) = \frac{هـ(s)}{س}$  ، وكان متوسط تغير  $U(s)$  ،  $هـ(s)$  في  $[٢,١]$  هما  $٥,٢$  على الترتيب. جد  $هـ(١)$  . (٩)

٤- ليكن  $U(s) = ١٠ - ٢هـ(s)$  ،  $هـ(٢) = ٣$  ،  $هـ(٥) = ١٢$  . جد متوسط تغير  $U(s)$  في  $[٥,٢]$  . (٦-)

٥- إذا كان  $U(s) = س^٢$  فما متوسط تغير الاقتران عند  $س = ٤$  ؟ (٨ + هـ)

٦- إذا علمت أن  $U(٣) = ٤$  ،  $U(٦) = ١٢$  فما متوسط تغير  $U(s)$  عندما تتغير  $س$  من  $٣$  إلى  $٦$  ؟ (٣-)

٧-  $U(s) = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{١٦ + س^٢} ، \quad ٤ \geq س \geq ١ \\ ١١ - ٢س ، \quad ٤ > س \geq ٦ \end{array} \right\}$  جد قيمة  $١$  علما بأن  $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = -٢$  في  $[٦,١]$  . (٣)

٨- إذا علمت أن متوسط تغير  $U(s) = ٦$  في  $[٤,٢]$  ، متوسط تغير  $U(s) = ٨$  في  $[٨,٤]$  .

فما متوسط التغير لهذا الاقتران في  $[٨,٢]$  ؟؟ (٢٢/٣)

٩- إذا كان الاقتران  $U(s)$  كثير حدود من الدرجة الأولى ويمر بمنحاه بالنقطة  $(٤,٢)$  وكان متوسط التغير له في الفترة  $[س١, س٢]$  يساوي  $٨$  .

جد قاعدة الاقتران .  $U(s) = ٨س - ١٢$  (١٢ - س)

١٠- مربع يتغير طول ضلعه من  $س$  إلى  $س+هـ$  . ما متوسط التغير في محيطه ؟ (٤)

١١- إذا كان متوسط تغير  $U(s)$  ،  $هـ(s)$  على  $[٦,٣]$  هما  $٩$  ،  $١١$  على الترتيب ، فجد متوسط تغير

$ل(s) = U(s) + هـ(s)$  على  $[٦,٣]$  . (٢٠)

١٢- أثبت أن متوسط تغير الاقتران الخطي يساوي  $١$  (معامل  $س$ ) .

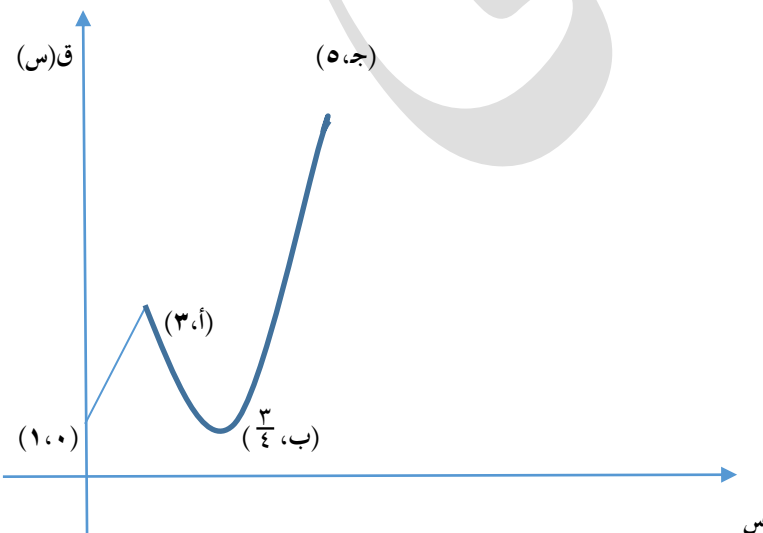
١٣- أثبت أن متوسط تغير الاقتران الثابت يساوي صفرا .

(١٠)  $\pi$ 

١٤- احسب متوسط تغير مساحة دائرة عندما يتغير نصف قطرها من ٤ سم إلى ٦ سم .

١٥- إذا كان متوسط تغير  $u(s)$  في  $[٣,١]$  يساوي ٥ وكان  $u(١) \times u(٣) = ١٢$  ، هـ  $u(s) = \frac{1}{u(s)}$  ، جد متوسط تغيرالاقتران هـ  $u(s)$  في  $[٣,١]$  .  $(\frac{5}{12})$ ١٦- يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث بعده ( ف ) بالأمتار عن نقطة ثابتة ( و ) بعد ( ن ) ثانية يعطى بالعلاقة :  $٢٠ + ٧٢ - ٢٧٢ = (٧) ف$ . جد السرعة المتوسطة في الفترة  $[٦,٢]$  .  $(١٤)$ ١٧- إذا كان القاطع المار بالنقطتين (٢، ٢) و (٣، ٣) يصنع زاوية قياسها  $(١٢٠^\circ)$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، فجد متوسط تغير  $u(s)$  عندماتتغير  $s$  من ٢ إلى ٣ .  $(\sqrt{3} - ١)$ ١٨- تحرك جسم في المستوى على منحنى الاقتران  $u(s)$  من النقطة أ(س، ص) إلى النقطة ب(٣، ٥) فإذا كانت  $\Delta s = ١$  ،  $\Delta v = ٨$  ،جد إحداثيي النقطة أ .  $(٩، ٢٠٢، ٤)$ ١٩- إذا كان  $u(s) = ظاسه$  فأثبت أن متوسط تغير  $u(s)$  يساوي  $\frac{قاسه ظاه}{(١ - ظاسه ظاه)}$  عندما تتغير  $s$  من  $s$  إلى  $s+h$  .٢٠-  $u(s) = [س + [س]]$  فجد متوسط تغير الاقتران في  $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$  .  $(٢)$ ٢١- إذا كان متوسط تغير الاقتران  $u(s) = ٤س - ٢$  في الفترة  $[٢, ب]$  يساوي -٤ فما قيمة ب ؟  $(٣ -)$ ٢٢- إذا كان متوسط تغير الاقتران  $u(s) = ٢س + ١ + س$  في  $[١, ٢٤]$  يساوي ١٣ فما قيمة الثابت أ ؟  $(٢)$ ٢٣- مكعب من الثلج يذوب بحيث يبقى محافظا على شكله ، تغير طول ضلعه من ٤ سم إلى ٢ سم . ما مقدار متوسط تغير حجمه؟  $(٢٨)$ 

مستعينا بالله ثم بالشكل المجاور أجب عن الأسئلة ٢٥، ٢٦، ٢٧.

٢٤- متوسط التغير في  $[١, ٥]$  يساوي ٢ . جد أ .  $(١)$ ٢٥-  $\frac{\Delta v}{\Delta s} = ٣ -$  في  $[١, ب]$  . جد ب .  $(\frac{7}{4})$ ٢٦-  $\frac{\Delta u(s)}{\Delta s} = ٤$  في  $[ب, ج]$  . جد ج .  $(\frac{45}{11})$ 

السنة	السؤال	الجواب
٢٠٠٧	إذا كان $١(س) = س^٢$ ، فإن قيمة متوسط التغير عندما تتغير س من ١ إلى ٣ هي :	أ) ٢ (ب) ٢,٥ (ج) ٤ (د) ٥
٢٠٠٧ دراسات ٢٠٠٩ إكمال	إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) بين س=١ ، س=٣ يساوي ٤ وكانت ق(٣)=٨ فإن قيمة ق(١)=	أ) ١٦ (ب) ٢ (ج) صفر (د) ٤
٢٠٠٧ إكمال	ليكن ق(س)= $\left. \begin{array}{l} س^٣ + س + ٤ \\ س^٢ + س^٣ + س \end{array} \right\}$ ، $س > ٢$ جد متوسط تغير ق(س) عندما تتغير س من ٢ إلى ١.	٣
٢٠٠٨	إذا كان $١(س) = س + [س]$ ، فإن قيمة متوسط التغير في $\left[ \frac{١}{٢} , ١ \right]$ هي :	أ) ٢ (ب) ٣ (ج) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$
٢٠٠٨ إكمال	متوسط تغير الاقتران $١(س) = س^٢ + س - ٥$ عندما تتغير س من ١ إلى ٤ يساوي	أ) ١٨- (ب) ٦- (ج) ٦ (د) ١٨
٢٠٠٩	إذا كان المستقيم القاطع لمنحنى ق(س) في النقطتين (١،١)، (٣،٥) يصنع زاوية مقدارها ١٣٥ مع محور السينات الموجب. احسب متوسط تغير الاقتران ه(س)= $\frac{٢}{س}$ في الفترة [١، ٣]	$\frac{٢}{٣٥}$
٢٠١٠	إذا كان متوسط تغير الاقتران $١(س) = \sqrt{٤س + ١}$ في الفترة [٠، ب] يساوي ١ ، فما قيمة الثابت ب ؟	٢
٢٠١٠ إكمال	إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في [١، ١٦] يساوي ٩ ، فإن متوسط تغير الاقتران $١(س^٢)$ في [١، ٤]	أ) ٩ (ب) ٣ (ج) ٤٥ (د) ١٥
٢٠١١	إذا علمت أن متوسط التغير للاقتران ق(س) في $[-٤، ١]$ يساوي ٣ ، وأن ق(١)=٢ فإن ق(٤)=	أ) ١٥- (ب) ١٣- (ج) ١٣ (د) ١٥
٢٠١٣	إذا كان متوسط تغير ق(س) في [١، ٤] يساوي ٥ ، وكان ق(٤)=٣ ، فإن ق(١) يساوي	أ) ١٨ (ب) ١٥ (ج) $\frac{٣}{٢}$ (د) ١٢-
٢٠١٤	إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) على $[-٢، ٢]$ يساوي ٥ ، جد متوسط تغير الاقتران ه(س)=٣ ق(س)-٢س على نفس الفترة.	١٣

أ	إذا كان متوسط تغير ق(س) في [٤،١] يساوي ٥ ، وكان ق(١)=٢ ، فإن ق(٤) يساوي ١٧ (أ)      ١٦ (ب)      ١٥ (ج)      ١٣ (د)	٢٠١٤ إكمال غزوة
٧	إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [٢،١] يساوي ٤، ومتوسط تغير ق(س) في الفترة [٥،٢] يساوي ٨، فما متوسط تغير ق(س) في الفترة [٥،١]	٢٠١٥



## ورقة عمل (٨)

### تعريف المشتقة

١- إذا كانت  $\Delta v = \Delta s^2 + \Delta s + 5$  فجد  $\frac{dv}{ds}$  . (س ٢)

٢- إذا علمت أن  $\frac{dv}{ds} = \frac{\Delta v}{\Delta s} = s^2 + 5s + 2$  فجد  $v(1)$  . (٧)

٣- إذا كان  $v(5) = (5+h)u = (5+h)u + 3h + 2$  فما قيمة  $v'(5)$  ؟ (٣)

٤- أثبت أن  $v'(s) = \frac{v(s+2) - v(s)}{2}$  . (س)

٥- إذا كان  $v(s) = 8s + 1$  وكانت  $v'(s) = \frac{v(s+4) - v(s)}{4}$  فجد قيمة الثابت  $1$  . (٣)

٦- أثبت أن  $v'(s) = \frac{v(s+3) - v(s)}{3}$  . (س)

٧- إذا كان  $v(s) = s + \frac{1}{s}$  ،  $s \neq 0$  وكانت  $v'(s) = \frac{v(s+2) - v(s)}{2}$  فجد قيمة الثابت  $1$  . (٢)

٨- إذا كان  $v(s) = s^2 + 3s + 2$  فجد  $v'(s)$  . (١)

٩- إذا علمت أن  $v(s) = s^2$  فجد ما يلي:

(أ)  $v'(s) = \frac{v(s+5) - v(s)}{5}$  ، (ب)  $v'(s) = \frac{v(s+2) - v(s)}{2}$  . (٣)

(ج)  $v'(s) = \frac{v(s+2) - v(s)}{2}$  ، (د)  $v'(s) = \frac{v(s+5) - v(s)}{5}$  . (٣)

١١- إذا كان  $v'(s) = (5-s)$  ،  $v(3) = 7$  فجد  $v(s)$  . (١٢)

$$\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$12- \text{جد نها} \frac{(3) \cup - (\sqrt{7+e}) \cup}{2-e} \text{ علما بأن } \varepsilon = (3)' \cup \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow e \\ 3 \leftarrow \varepsilon \end{matrix}$$

$$(9)$$

$$13- \text{إذا كان متوسط تغير ق(س) يساوي } (3 \text{ س} + 4 \text{ س}^2 \text{ ه}) \text{ فجد } \cup (3)' \cup .$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$14- \text{إذا كان التغير في ق(س) يساوي } (2 \text{ س}^2 \Delta \text{ س} + \Delta \text{ س}) \text{ فجد نها} \frac{\text{ه}}{(1) \cup - (\text{ه} + 1) \cup} \quad \begin{matrix} \text{ه} \leftarrow \text{ه} \\ 1 \leftarrow \text{ه} \end{matrix}$$

$$(10)$$

$$15- \text{إذا كان } \cup (س) = 2 \text{ س} |س| \text{ فاستخدم تعريف المشتقة لإيجاد } \cup (0)' \cup .$$

$$(20.غ)$$

$$\text{جد إن أمكن } \cup (1)' \cup \text{ باستخدام تعريف المشتقة.}$$

$$16- \text{ق(س)} = \left. \begin{matrix} \text{س} |س| + 3, \quad 1 < \text{س} < 1 \\ \text{س} |س| + 3, \quad 1 \leq \text{س} < 2 \end{matrix} \right\}$$

$$\left(\frac{1-}{2}\right)$$

$$17- \cup (س) = \frac{1}{\sqrt{س}} + 2, \text{ جد } \cup (1)' \cup \text{ باستخدام تعريف المشتقة.}$$

$$\left(\frac{1-}{\sqrt{س^2-3}}\right)$$

$$18- \cup (س) = 1 + \sqrt{س^2-3} \text{ جد } \cup (س)' \cup \text{ باستخدام تعريف المشتقة.}$$

$$(7)$$

$$19- \text{إذا كان } \cup (3) = 5, \quad \varepsilon = (3)' \cup \text{ فما قيمة } \frac{\cup (3) \text{ س} - \cup (س) 3}{3-س} \text{ نها} \quad \begin{matrix} 3 \leftarrow \varepsilon \\ 3 \leftarrow \varepsilon \end{matrix}$$

$$\left((\varepsilon)'' \cup\right)$$

$$20- \text{جد نها} \frac{(2) \cup - (\sqrt{س}) \cup}{\varepsilon - س} \quad \left(\frac{1}{\varepsilon} \cup (2)'\right) \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow \varepsilon \\ 2 \leftarrow \varepsilon \end{matrix}$$

$$21- \text{نها} \frac{(4)' \cup - (\cup (2 \text{ س}))'}{2-س} \quad \left(\frac{1}{\varepsilon} \cup (2)'\right) \quad \begin{matrix} 2 \leftarrow \varepsilon \\ 2 \leftarrow \varepsilon \end{matrix}$$

$$22- \text{نها} \frac{5(2+\text{ه}) - 640}{\text{ه}} \quad (224) \quad \begin{matrix} \text{ه} \leftarrow 0 \\ \infty \leftarrow \text{ه} \end{matrix}$$

$$(42-)$$

$$24- \text{إذا كانت } \cup (4) = 6 \text{ فجد نها} \frac{(4) \cup - (\text{ه}^2 - 4) \cup}{\text{ه}} \quad \begin{matrix} \text{ه} \leftarrow 0 \\ \text{ه} \leftarrow 0 \end{matrix}$$

السنة	السؤال	الجواب
٢٠٠٧	إذا كان $u(s) = \sqrt{s^2 + 1}$ ، أوجد باستخدام تعريف المشتقة $u'(4)$	$\frac{1}{3}$
٢٠٠٧	إذا كان $u'(5) = 3$ فأوجد $u(s)$ هنا $\frac{u(s) - (7 - 3s)}{8 - 2s}$ $s \leftarrow 4$	$\frac{9}{2}$
٢٠٠٨	إذا كان $u'(s) = s^2 + 4$ فإن $u(s)$ هنا $\frac{u(s) - (3)}{3 - s}$ تساوي $s \leftarrow 3$	١
٢٠٠٨	استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة لإيجاد مشتقة الاقتران $u(s) = s^2 + s$ عند $s=2$	٥
٢٠٠٩	استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة لإيجاد مشتقة الاقتران $u(s) = \sqrt{s - 3}$ عند $s=6$	$\frac{1}{3}$
٢٠٠٩ إكمال	استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة لإيجاد مشتقة الاقتران $u(s) = \frac{s - 1}{s + 1}$ عند $s=2$	$\frac{2}{9}$
$\frac{1}{2}$	استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة لإيجاد مشتقة الاقتران $u(s) = s + \frac{2}{s}$ عند $s=1$	$1 -$
٢٠١٠ إكمال	استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة لإيجاد مشتقة الاقتران $u(s) = \sqrt{s + 2}$ عند $s=2$	$\frac{1}{4}$
٢٠١١	استخدم التعريف لإيجاد مشتقة $l(s) = u(s) + 2$ عند $s=1$ علما بأن $u'(3) = 5$	١٥
٢٠١١ إكمال	إذا كان $u(s) = \frac{s^2 + 3}{s^2 - 1}$ فأوجد باستخدام التعريف $u'(4)$	$\frac{8-}{49}$
٢٠١٢ إكمال	استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة لإيجاد مشتقة الاقتران $u(s) = \sqrt{s^2 + 3}$ عند $s=3$	$\frac{1}{3}$
$\frac{3}{4}$	استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة لإيجاد مشتقة الاقتران $u(s) = s + \frac{4}{s}$ عند $s=1$	$\frac{3}{4}$
٢٠١٣ إكمال	استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة لإيجاد مشتقة الاقتران $u(s) = \sqrt{s + 3}$ عند $s=6$	$\frac{1}{3}$
٢٠١٤ إكمال	إذا علمت أن $u'(s) = 2s - 4$ ، وأن $u'(2) = 3$ ، $u'(2) = 6$ أوجد $u'(2)$ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.	٢



١٣	إذا كان $\frac{s^2}{s+1} = (s)$ ، $s \neq -1$ ، جد باستخدام التعريف المشتقة الأولى للافتراض عندما $s=1$	٢٠١٤ إكمال غزوة
😊	إذا كان $\frac{s}{s-2} = (s)$ ، $s \neq 2$ ، فأوجد $\phi(s)$ باستخدام تعريف المشتقة.	٢٠١٥
١٦-	إذا كان $\phi(s)$ كثير الحدود بحيث $\phi(0) = 0$ ، $\phi'(0) = 1$ ، فاحسب $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\phi(s) - \phi(0)}{s - 0}$	٢٠١٥

الامتحان

## ورقة عمل (٩)

### قواعد الاشتقاق

١- إذا علمت أن  $U(s) = 3s - 5$ ،  $U'(3) = 2$ ، فجد  $U'(3)$ . (٢٨)

٢- ليكن  $U(s) = \frac{1}{3}s^3 - 3s^2$ ، جد قيمة  $s$  حيث أن  $U''(s) = 1 + U'(s)$ . (٧١)

٣- إذا علمت أن  $U(s) = \frac{s+5}{s^2-6}$ ،  $s \neq 3$ ، فجد  $U'(2)$ . (٤)

٤- إذا كان  $U(s) = s^3 - 4s^2 + 9s + 8$  وكانت  $U''(1) = 6$ ، فجد قيمة الثابت  $A$ . (٤)

٥- إذا كان  $U(s) = \frac{1}{s^3 + 3s}$ ،  $s \neq \frac{3}{2}$  وكانت  $U'(1) = 2$ ، فجد قيمة الثابت  $A$ .  $\left(2 - \frac{9}{2}\right)$

٦-  $U(s) = s^2 H(s) - (s)$ ،  $H(2) = 3$ ،  $H'(2) = 2$ ،  $H(2) = 8$ ، فجد  $U'(2)$ . (١٢)

٧- إذا كانت  $V = s^3$ ،  $\exists \tau$  وكانت  $\frac{V}{s} = 210s^{3-\tau}$ ، فما قيمة  $\tau$ ؟ (٧)

٨- ق(س) كثير حدود من الدرجة الثانية وكان  $U(0) = 5$ ،  $U'(3) = 9$ ،  $U''(5) = 2$ ، فجد قاعدة الاقتران.

٩- إذا كان  $U(s) = \frac{1}{s}$ ،  $H(2) = 20$ ،  $H'(2) = 8$ ، فجد  $U'(H \times H')$ . (٣)

١٠- إذا كان  $U(1) = 3$ ،  $U'(1) = 2$ ، فجد  $U'(\sqrt{s} \cdot U(s))$ .  $\left(\frac{1}{4}\right)$

١١- إذا كان  $U(s) \times H(s) = 1$ ،  $H(1) = 3$ ،  $H'(1) = 5$ ، فما قيمة  $U'(1)$ ؟  $\left(\frac{5}{9}\right)$

١٢-  $U(s) = \frac{s|s^2-1|}{s+1}$  فجد  $U'(0)$ . (١)

١٣-  $\frac{[s^{\frac{1}{3}}]}{s-3} = U(s)$  فجد  $U'\left(\frac{7}{3}\right)$ .  $(-4)$

١٤- إذا كان  $U(s) = s \times \left[\frac{s}{3} - 2\right]$  فجد (إن أمكن)  $U'(3)$ .  $(20.8)$

١٥-  $U(s) = [2s + \frac{2}{s}]$  جد (إن أمكن)  $U'\left(\frac{4}{5}\right)$ .  $(20.8)$

١٦-  $U(s) = [s] \times [s]$ ،  $s \in [2, 3]$ ، فجد  $U'\left(\frac{5}{4}\right)$ . (٣)

١٠	إذا كانت $ص = (س - ٣)هـ (س)$ ، جد $\frac{ص}{س}$ عند $س = ١$ علماً بأن $هـ = (١) = ٤$ ، $هـ = (١) = ٢$	٢٠٠٨
ب	إذا كان $ق(س) + هـ(س) = ٨$ ، $ق(٢) = ٥$ ، $ق(١) = ٢$ فإن $\frac{س}{س + هـ(س)}$ عندما $س = ٢$ تساوي (أ) ١ (ب) ٠ (ج) ٨ (د) ٣	٢٠٠٩
د	إذا كان $ق(س) = س^٣ - س$ فإن $\frac{ق(٢) - (٢ + هـ)ق(٢)}{هـ} =$ هـ ← ٠ (أ) ١٢ (ب) ١٠ (ج) ٦ (د) ١١	٢٠٠٩ إكمال
ب	إذا كان $ق(س) = \frac{٢}{س^٢ + ١}$ فإن $\frac{ق(١) - (١ + هـ)ق(١)}{هـ} =$ هـ ← ٠ (أ) ١ (ب) -١ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٢} -$	٢٠١٠ إكمال
ج	إذا كان $ق(س) = س^٣ - س^٢$ فإن $\frac{ق(١)' - (١ + هـ)ق(١)'}{هـ} =$ هـ ← ٠ (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٤ (د) غ.م	٢٠١٢
٧	احسب $\frac{س(ق(١) - (س)ق(١))}{س - ١}$ علماً بأن $ق(١) = ٣$ ، $ق(١) = ٤$	٢٠١٢
١	إذا كان $ق(س) = \frac{س^٢ + ١}{ل(س)}$ ، وكان لمنحنى $ك(س)$ مماس أفقي عند النقطة $(١, ٢)$ ، جد $ق(١)$	٢٠١٢
أ	إذا كان المستقيم $ص = ٣س - ١$ مماساً لمنحنى $ق(س)$ عند $(٢, ٥)$ فإن $\frac{ق(٢) - (٢ + هـ)ق(٢)}{هـ} =$ هـ ← ٠ (أ) ٣ (ب) ٤ (ج) صفر (د) ٥	٢٠١٣
٣ = أ ٥ = ب	إذا كان $ق(س) = \frac{س}{س} + \frac{ب}{س}$ ، $س \neq ٠$ ، أ، ب $\exists$ ح وكان متوسط تغير $ق(س)$ في $[١, ٥]$ هو ٢ وكانت $\frac{ق(١) - (١ + هـ)ق(١)}{هـ} = ٤$ فجد قيم الثابتين أ، ب.	٢٠١٤ إكمال غرة
١٠ -	إذا كان $ق(س) = س^٢ + ٢هـ(س) =  ٥ - ٤س $ فأوجد $(١)'(هـ \times هـ)$	٢٠١٥ إكمال

## ورقة عمل (١٠)

### الاتصال وقابلية الاشتقاق

$$(١١) \quad \left. \begin{array}{l} \text{جد أ، ب التي تجعل } \mathcal{U}'(2) \text{ موجودة.} \\ \text{أس}^3 + \text{بس} \quad , \quad \text{س} > 2 \end{array} \right\} = -1 \text{ ق(س)}$$

$$(٣-١٢، ٦) \quad \left. \begin{array}{l} \text{جد أ، ب، ج التي تجعل } \mathcal{U}''(2) \text{ موجودة.} \\ \text{أس}^2 + 9\text{بس} - 12\text{س} \quad , \quad \text{س} \leq 2 \\ \text{أس}^2 - \text{بس} + 5 \quad , \quad \text{س} \geq 2 \end{array} \right\} = -2 \text{ ق(س)}$$

$$(٢٠، غ) \quad \left. \begin{array}{l} \text{جد (إن أمكن) } \mathcal{U}'(1) . \\ \text{س}^3 + 3\text{ج} \quad , \quad \text{س} < 2 \\ \text{س}^2 + 5\text{س} - 8 \quad , \quad \text{س} \leq 1 \end{array} \right\} = -3 \text{ ق(س)}$$

$$(٣) \quad \begin{array}{l} 4- \text{إذا كانت } \mathcal{U}'(2) = 8, \text{ نها } \mathcal{U}(س) = 3, \text{ فجد } \mathcal{U}(2). \\ \text{س} \leftarrow 2 \end{array}$$

$$(٧) \quad 5- \text{إذا كانت } \mathcal{U}'(2) = 3 \text{ وكان ق(س) يمر بالنقطة } (2, 5) \text{ فجد نها } \mathcal{U}(س) - (1 + س) - س^2 + 3س \text{ } \text{س} \leftarrow 1$$

$$(١) \quad 6- \text{إذا كانت } \mathcal{U}'(1) = 9, \mathcal{U}(1) = 5 \text{ فجد نها } \frac{\mathcal{U}(س) - 3}{س - 3} \text{ } \text{س} \leftarrow 1$$

$$(٢٠، غ) \quad \left. \begin{array}{l} \text{جد } \mathcal{U}'(2) . \\ [1 + س] \quad , \quad 1 \leq س \leq 2 \\ 4 + \frac{|س|}{س} \quad , \quad 2 > س > 5 \end{array} \right\} = -7 \text{ ق(س)}$$

$$(٢٠، غ) \quad 8- \text{ق(س)} = |س - 2| + |س| . \text{ بين أن } \mathcal{U}'(0) \text{ غير موجودة } 9- \text{ق(س)} = [1 + س] \times |س - 1| . \text{ جد } \mathcal{U}'(1) .$$

٢٠٠٧	إذا كان ق(س)=[س+٨,٠] فإن ق(٥)= (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٥ (د) غير موجودة	أ
٢٠٠٧	إذا كان ق(س) < صفر $\forall$ س $\exists$ أ، ب [ $\exists$ ج، أ، ب ] فإن ق(س) عند س=ج يكون (أ) متصلا (ب) منفصلا (ج) متناقضا (د) مقعر للأعلى فقط	أ
٢٠٠٧ إكمال	إذا كان ق(س) متصلا عند س=أ فإن: (أ) ق(أ)=صفر (ب) ق(أ) موجودة (ج) ق(أ) غير موجودة (د) ق(أ) قد تكون موجودة	د
٢٠٠٨	إذا علمت أن ه(س)= $\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 + 2 \leq \text{س} \\ \text{س}^2 + \text{بس} > \text{س} \end{array} \right\}$ قابلا للاشتقاق عند س=٢ فجد الثابتين أ، ب	$\frac{3}{2} = \text{أ}$ $2 = \text{ب}$
٢٠٠٨ إكمال	إذا كان ق(س)= $\left. \begin{array}{l} \text{س}^3 + 3\text{س} + 1 \leq \text{س} \\ \text{س}^2 - 9\text{س} + 2 > 1 \end{array} \right\}$ ، جد ق(س)	$\left. \begin{array}{l} \text{س}^6 > 1 \\ \text{س}^2 > 1 \\ \text{م.غ.} = 1 \end{array} \right\}$
٢٠١٠	إذا كان ق(س)= $\left. \begin{array}{l} \text{س}^3 - 3\text{س} \geq 1 \\ \text{س}^2 - 2\text{م} < 1 \end{array} \right\}$ وكانت ق(١) موجودة فإن قيمة الثابت م= (أ) ١ (ب) ٣ (ج) $\frac{9}{4}$ (د) $\frac{2}{9}$	ج
٢٠١٢	إذا كان ق(س)= $\left. \begin{array}{l} \text{ب} (3 + \text{س}^2) > 1 \\ \text{س}^2 + 1 \leq \text{س} \end{array} \right\}$ قابلا للاشتقاق عند س=١، جد الثابتين أ، ب	$15 = \text{أ}$ $1 = \text{ب}$
٢٠١٣	إحدى العبارات صحيحة دائما: (أ) إذا كانت ق(أ) موجودة فإن ق(أ) موجودة (ب) إذا كان ق(س) متصلا عند س=أ، فإن ق(أ) موجودة (ج) إذا كانت ق(أ) غير موجودة فإن ق(س) ليس متصلا عند س=أ (د) إذا كانت ق(أ) موجودة فإن ق(س) متصل عند س=أ	د

$a = 0$ $b = \frac{1}{3}$	$\left. \begin{array}{l} s^2 + b \leq s \\ s > \frac{1}{[s]} \end{array} \right\} \text{إذا كان } q(s) =$ <p>جد قيمتي الثابتين أ ، بحيث تكون المشتقة الأولى للاقتزان ق(س) عند س=٣ موجودة</p>	٢٠١٤ إكمال غرة
------------------------------	--	----------------



## ورقة عمل (١١)

### تطبيقات فيزيائية

١- يتحرك جسم حسب العلاقة  $f(v) = \frac{1}{v}$ . أثبت أن  $v^2 t + v^2 c = f$ .

٢- إذا كانت  $f = \sqrt{18 + 2v^2}$  احسب المسافة التي يقطعها الجسم عندما تكون سرعته ١ م/ث. (٦)

٣- قذف جسم رأسيا لأعلى بحيث المسافة التي يقطعها  $f = v^2 - ١٦$ . جد أ علما بأن أقصى ارتفاع يصله الجسم ٣٦ م. (٤٨)

٤- قذف جسم لأعلى بسرعة ابتدائية ١٤٤ م/ث فإذا كانت  $f = v^2 - ١٦$  فجد :

أولا : السرعة والتسارع بعد ٣ ثوان ثانيا : الزمن اللازم ليعود الجسم لنقطة القذف (٩ ، ٣٢-، ٤٨)

٥- إذا علمت أن  $f = v^2 + ١٦$  حيث بدأ الجسم حركته من السكون ، وكانت السرعة ١٠ م/ث عندما كانت المسافة المقطوعة ١٠٠ م فجد

أ ، ب . ( صفر ، ٢٥ ، ٠ )

٦- يتحرك جسم على محور السينات بحيث يقطع س كم بعد ن ثانية حسب العلاقة  $s = ٢ - ٦٣v + ١٥v^2 - ٣v^3$ . جد :

أولا : قيم ن التي تجعل السرعة موجبة . ثانيا : تسارع الجسم عندما تنعدم السرعة ( ١٢- ، ١٢=ت ، ٧ ، ٣ [  $\exists v$  )

٧- يتحرك جسم حسب العلاقة  $f = v^3 - ٢٤v + ٢٠$ . متى تتساوى السرعة مع التسارع عدديا؟ (٤)

٨- إذا كانت  $f = v^3$  ، ج  $< ٠$  . وكانت سرعته بعد ١٠ ث ضعفي سرعته بعد ٥ ث فما قيمة ج ؟ (٢)

٩- إذا كانت سرعة جسم  $c = \sqrt{f}$  حيث  $f < ٠$  وكان تسارعه ٢ م/ث فجد قيمة أ . (٢)

١٠- جسم يتحرك حيث  $c^2 = f - ١$  احسب التسارع لهذا الجسم عندما تنعدم سرعته . (  $1 \pm$  )

١١- تتحرك نقطة مادية حسب العلاقة  $c^2 = \frac{b}{f} + ١$  ، ب ، ب ثابتان أثبت أن التسارع يتناسب عكسيا مع مربع المسافة .

١٢- قذف جسم رأسيا لأعلى من قمة برج ارتفاعه ٢٢٥ م وكانت المسافة الرأسية التي يقطعها  $f = v^2 - ٦٠$ . جد سرعة الجسم لحظة وصوله للأرض

( ٩٠- )

١٣- قذف جسم رأسيا لأعلى من قمة برج بحيث المسافة الرأسية التي يقطعها معطاة بالعلاقة  $f = v^2 - ١٠$ . جد ارتفاع البرج علما بأن أقصى

ارتفاع وصله عن سطح الأرض ١٥ م . ( ١٠ )

١٤- قذف جسم رأسيا لأعلى من قمة برج ارتفاعه ٤٥ م بحيث المسافة الرأسية التي يقطعها  $f = v^2 - ٦٠$ . جد سرعته عندما يكون على ارتفاع ٩٩ م

من سطح الأرض . (  $48 \pm$  )

١٥- سقط جسم من سطح برج بحيث المسافة المقطوعة  $f = v^2 - ١٦$  وفي نفس اللحظة قذف جسم لأسفل من سطح البرج بحيث المسافة المقطوعة

$f = ٤٠ + v^2$  فإذا ارتطم الجسم الأول بالأرض بعد ثانية واحدة من وصول الثاني فجد :

أولا : سرعة الثاني لحظة وصوله للأرض ثانيا : ارتفاع البرج ( ١٠٤ ، ١٤٤ )

١٦- قذف جسم رأسيا لأعلى حيث أن المسافة التي يقطعها  $f = v^2 - ١٥$ . ما سرعته بعد ثانيتين إذا كان أقصى ارتفاع للجسم ٤٥ مترا؟ (١٠)

السنة	السؤال	الجواب
٢٠٠٧	يتحرك جسيم في خط مستقيم حسب العلاقة $v = v_0 - at^2$ حيث $v_0 = ٧$ ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، أوجد سرعة وتسارع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة.	ع=٤ ت=٨
٢٠٠٧ دراسات	تحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة $v = v_0 - at^2$ فإن سرعة الجسم وتسارعه يتساويان عدديا عندما (أ) $v = ٢$ (ب) $v = ٣$ (ج) $v = ٤$ (د) عند بدء الحركة	ج
٢٠٠٧ دراسات	يتحرك جسيم في خط مستقيم حسب العلاقة $v = v_0 - at^2$ حيث $v_0 = ٥$ ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، أوجد سرعة الجسيم عندما يكون تسارعه $٤٠$ م/ث <sup>٢</sup> .	١٣٣
٢٠٠٧ إكمال	من قمة برج يرتفع عن سطح الأرض $٢٠$ م، أطلق جسم رأسيا لأعلى فكانت إزاحته ف بالأمتار عن قمة البرج بعد ن ثانية تعطى بالقاعدة: $f = v_0 - \frac{1}{2}at^2$ ، جد سرعة الجسم بعد ثانيتين	١٠-
٢٠٠٨	يتحرك جسم وفق العلاقة $v = v_0 - at^2$ ، حيث ع، ف هما السرعة والإزاحة على الترتيب فإن تسارع هذا الجسم = (أ) ٦ (ب) ١٢ (ج) ١٨ (د) ٣٦	ج
٢٠٠٨	قذف جسم رأسيا للأعلى فكانت العلاقة بين ارتفاعه (ف) بالأمتار عن نقطة قذفه وزمن حركته (ن) هي: $f = v_0 - \frac{1}{2}at^2$ ، جد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم والمسافة التي قطعها الجسم في الثواني الست الأولى	١٣٠
٢٠٠٨ إكمال	يتحرك جسم في خط مستقيم تبعا للعلاقة $v = v_0 - at^2$ حيث $v_0 = ٤$ ف (ن) إزاحة الجسم بالأمتار عن نقطة ثابتة (و) على خط الحركة، (ن) الزمن بالثواني جد السرعة المتوسطة والتسارع المتوسط لهذا الجسم في الفترة الزمنية [٢، ٤]	ع=٣٢ ت=١٨
٢٠٠٩	تحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة $v = v_0 - at^2$ ، سرعة الجسم وتسارعه يتساويان عدديا عندما ن= (أ) صفر (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤	د
٢٠١٠	قذف جسم رأسيا للأعلى فكانت العلاقة بين ارتفاعه (ف) بالأمتار عن نقطة قذفه وزمن حركته (ن) هي: $f = v_0 - \frac{1}{2}at^2$ ، جد الزمن اللازم لتكون المسافة التي قطعها الجسم تساوي ١٣٠ م.	٦
٢٠١١	أطلق جسم رأسيا لأعلى من قمة برج بحيث أن ارتفاعه بالأمتار عن سطح الأرض بعد ن ثانية يعطى بالقاعدة : $f = v_0 - \frac{1}{2}at^2$ ، جد أقصى ارتفاع عن قمة البرج يصل إليه الجسم.	٦٤
٢٠١١ إكمال	قذف جسمان معا رأسيا لأعلى ، الأول يتحرك وفق العلاقة $f = v_0 - \frac{1}{2}at^2$ والثاني وفق العلاقة $f = v_0 - \frac{1}{2}at^2$ . جد ارتفاع الجسم الثاني عندما يصل الأول لأقصى ارتفاع له .	صفر



٢٠١٢	إذا تحرك جسم وفق العلاقة $v = v_0 + at$ ، فإن التسارع المتوسط للجسم في الثواني الثلاث الأولى يساوي	ب
٢٠١٢ إكمال	قذف جسم رأسياً لأعلى من نقطة على سطح الأرض وكان ارتفاعه يعطى بالعلاقة $v^2 = v_0^2 - 2gh$ ، جد:	١٨ م ٦ م/ث
٢٠١٣	قذف جسم رأسياً للأعلى من نقطة على سطح الأرض وكان ارتفاعه يعطى بالعلاقة $v^2 = v_0^2 - 2gh$ حيث $v_0 = ١٠$ م/ث، ف المسافة بالأمطار، ن الزمن بالثواني. جد: (١) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم (٢) التسارع المتوسط في الفترة الزمنية [١، ٣]	١٢٥ ١٠ م/ث <sup>٢</sup>
٢٠١٣ إكمال	إذا تحرك جسم على خط على خط مستقيم بحيث كانت $v = v_0 + at$ (ن) تمثل إزاحته عند زمن (ن) فإن سرعته اللحظية =	د
٢٠١٤	قذف جسم رأسياً للأعلى بحيث أن ارتفاعه عن نقطة القذف معطى بالعلاقة $v^2 = v_0^2 - 2gh$ حيث $v_0 = ١٦$ م/ث، ف الارتفاع بالأمطار، ن الزمن بالثواني. جد: (١) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم (٢) سرعة الجسم عندما يكون قد قطع مسافة ٢٧٢ م	٢٥٦ م ٣٢ م/ث
٢٠١٤ إكمال ضفة	تحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة $v = v_0 + at$ ، سرعة الجسم وتسارعه يتساويان عددياً عندما $v = ١٠$ م/ث، جد:	ج
٢٠١٥	من قمة برج يرتفع عن سطح الأرض ٥٠ م أطلق جسم رأسياً لأعلى فكانت إزاحته ف بالأمطار عن قمة البرج بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة: $v^2 = v_0^2 - 2gh$ ، جد:	ن=١، ن=٢ ف=٦١،٢٥ م
٢٠١٥ إكمال	قذف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطة على سطح أرض أفقية حسب العلاقة $v^2 = v_0^2 - 2gh$ (ن) حيث $v_0 = ١٦$ م/ث، ف: المسافة بالأمطار، ن: الزمن بالثواني	ف=٦٤ م

## ورقة عمل (١٢)

### تطبيقات هندسية

١- إذا كان  $\Gamma = (س)$  إس  $^3 +$  بس  $^2$  يمر بالنقطة  $(١, ٥)$  ومعادلة المماس لمنحنى الاقتزان عندها  $ص = ٨ - ٣س$  فجد أ ب . (١٨، ١٣-)

٢- جد مساحة المثلث المتكون من محور السينات والمماس والعمودي عليه للاقتزان  $\Gamma = (س)$  عند  $س = ١$ . (المساحة = ٥)

٣- جد معادلة المماس للاقتزان  $\Gamma = (س)$   $٦ = ٣س - ٢$  العمودي على المستقيم  $س + ٦ص = ٠$  (المعادلة  $ص = ٦ + س$ )

٤-  $\Gamma = (س)$  إس  $^2 +$  بس  $^2 +$  ج  $^2 = (س)$  ه  $^2 = جس - ٣س$  لهما مماس مشترك عند  $(٢, ٠)$  جد أ ب ج . (٤، ٤، ٣-)

٥- المستقيم المار بالنقطتين  $(١, ٤)$ ،  $(١, ٠)$  يمس منحنى  $\Gamma = (س)$  إس  $^2 +$  س . جد قيمة أ (١٦)

٦- جد معادلة المماس لمنحنى  $\Gamma = (س)$   $س = ٣ + |س - ٢|$  عند  $س = ٣$  (ص = ٣١ - س٦٣)

٧- جد معادلة المماس المرسوم من  $(٠, ٨)$  لمنحنى  $س^2 - ص^2 = ٨$  . (ص = ٣ - س٨، ص = ٣ - س٨)

٨- جد معادلة المماس لمنحنى  $(س + ص)^3 - ٥س + ص = ١$  عند نقطة تقاطعه مع المستقيم  $س + ص = ١$  (ص = ٤ - س٣)

١٠- إذا علمت أن جاص  $س^2 +$  س فجد معادلة المماس عند  $(٠, \pi)$  .  $ص = \pi - س$

١١- اثبت أن المنحنيين  $\Gamma = (س)$   $س^3 - ٣س^2 - ٢س + ٤ = (س)$  ه  $س^2 - ٥س - ٥ = (س)$  متماسان عند  $(٣, -٢)$  ثم جد معادلة المماس المشترك لهما (ص = ٧ - س٢٣)

١٢-  $ص = (١ + س^2)^3$ ،  $س = (١ - س^2)^4$  . جد معادلة مماس  $\Gamma = (س)$  عند  $س = ٢$  (ص = ٢٢٥ + س٢٥)

١٣- إذا رسم مماس من النقطة  $(٢, ٦)$  لمنحنى  $\Gamma = (س)$   $س^2 = ٢س$  فما إحداثيات نقطة التماس؟ (١٨، ٣)، (٢، ١)

١٤-  $\Gamma = (س)$   $س - جاص = ٢س$  . جد قيم س التي يكون المماس عندها موازيا لمحور السينات،  $س \in [\pi, ٠]$  .  $\{ \frac{\pi}{٢}, \frac{\pi}{٤} \}$

١٥- إذا علمت أن  $ص = ٣ + س^2$  هي معادلة المماس للاقتزان  $\Gamma = (س)$  عند  $(٠, ٢)$  وكانت :  $ص = س + ب$  هي معادلة العمودي على المماس عند نفس النقطة فجد أ ب .

$$\left( ٢, \frac{١-}{٣} \right)$$

١٦- أثبت أن المماسين لمنحني  $س^2 + ص = ٨$ ،  $س = ٢$  متعامدان عند  $(٠, ٠)$  .

١٧- جد مساحة المثلث المتكون من المماسين المرسومين من النقطة  $(١, ٢)$  لمنحنى  $\Gamma = (س)$   $س^2 - ٣س = ٢$  ومحور السينات. (٢)

١٨- إذا علمت أن  $ص = س + جيمس$  منحنى  $ص^2 = ٤س$  فاثبت أن  $ج = \frac{١}{م}$  حيث أ ج م ثوابت.

١٩- أثبت أن المماس لمنحنى  $\Gamma = (س)$   $س^2 = ٢$  عند النقطة  $(١, ٢)$  يقطع محور السينات في  $\left( \frac{١}{٢}, ٠ \right)$  .

٢٠- رسم مماس من النقطة  $(س١، ص١)$  الواقعة على منحنى  $ص٢ = س٤$ . أثبت أن المماس يقطع محور السينات في  $(س١، ٠)$ .

٢١- إذا كان  $ص(س) = س٢ - س٤$ ، فجد جميع قيم  $س$  التي يكون عندها العمودي على المماس لمنحنى  $ق(س)$  موازيا لمحور

الصادات ثم جد معادلة أحد هذه المماسات فقط .

٢٢- إذا كان منحنى الاقتزان  $ق(س)$  يمر بالنقطة  $(١، ٢)$  وكان المماس المرسوم لمنحنى  $ق$  عند هذه النقطة يصنع زاوية قياسها  $٥٤^\circ$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$$\frac{1}{2}$$

فما قيمة  $س٢ - س٤$  ؟

٢٣- إذا كان المستقيم المار بالنقطتين  $(٢، ٦)$ ،  $(٠، ٢)$  يمس منحنى الاقتزان  $ص(س) = س٢ + س٣ - س١$  فما قيمة الثابت  $ب$  ؟

٢٤- إذا كان منحنيا  $ص(س) = س٢ + س٣ + ب$ ،  $ه(س) = س٣ - س٢ - س٣ + ج$  متماسين عند  $(١، ٠)$  فجد :

أولا: قيم الثوابت  $أ$ ،  $ب$ ،  $ج$ ، ثانيا : معادلة المماس المشترك للاقتزائين  $ق$ ،  $ه$  عند النقطة  $(١، ٠)$

٢٥- جد معادلة المماس لمنحنى الاقتزان  $ص(س) = س٢ - س٤ + س٣$  بحيث يكون هذا المماس عموديا على المستقيم  $ص٦ - س٣ - س٥ = ٠$  عند نقطة التماس.

$$\frac{9}{4}$$

٢٦- إذا علمت أن المستقيم  $ص٣ - س٤ + ج = ٠$  يمس القطع  $ص = س٢$  فما قيمة الثابت  $ج$  ؟

٢٧- إذا كان منحنى  $ص(س) = س٢ + س٣ + ج$  يقطع محور الصادات في النقطة  $(٠، ٣)$  وله مماسان : الأول عند  $س = ١$  ويصنع زاوية قياسها

$٥٤^\circ$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، والثاني عند  $س = ٢$  ويصنع زاوية قياسها  $١٣٥^\circ$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

جد قيم الثوابت  $أ$ ،  $ب$ ،  $ج$  .

٢٨- بين أن المماسين لمنحني  $ص(س) = \frac{1}{س}$ ،  $ه(س) = س$  متعامدان عند نقطة تقاطعهما .

٢٩- جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى  $ص(س) = س٢$  إذا كان العمودي مرسوما من النقطة  $(٠، \frac{9}{4})$  .

$$ص - س٤ = \pm \frac{1}{4}(س - ٢)، س = ٠$$

٣٠- بين أن لمنحنى الاقتزان  $ص(س) = س٤$  مماسين مرسومين من النقطة  $(٠، \frac{3}{4})$  .

٣١- إذا كان المستقيم  $ص٣ - س١ = ١$  مماسا لمنحنى  $ق(س)$  عند النقطة  $(٢، ٥)$  فجد  $س٢ - س٤$  .

٣٢- جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى العلاقة  $ص٢ - ص٢ = ٨$  من النقطة  $(٤، ٠)$  .

٣٣- جد جميع النقط الواقعة على منحنى الاقتزان  $ص(س) = س٢ - س٣ + س٣ + س٥ + ٧$  التي يكون المماس لمنحنى  $ق(س)$  عندها عموديا على

المستقيم  $ص٥ + س٢ = ٠$

٣٤- إذا كان  $ص(س) = \sqrt{س}$  وكان المماس لمنحنى  $ق$  عند  $س = ٤$  موازيا للقاطع المار بالنقطتين  $(١، ق(١))$ ،  $(م، ق(م))$ ، حيث  $م < ١$

جد قيمة  $م$  .

٣٥- رسم مماس لمنحنى الاقتزان  $ص(س) = س٢ + ١٠$  من النقطة  $(٩، ٠)$  . جد مساحة المثلث المحصور بين المماس ومحور الصادات

والمستقيم  $ص = ٤$  .

٢٠٠٧ دراسات	إذا كان ميل المماس = -٢ فإن ميل العمودي عليه يساوي	ب
٢٠٠٧ دراسات	أوجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{1}{س}$ من النقطة (١، ٠) الواقعة خارجه، س < ٠.	ص = -٤ + س
٢٠٠٧ إكمال	إذا كانت معادلة العمودي على منحنى ق(س) عند النقطة (٣، ٠) هي: ٢س - ٣ص = ٦ فإن ق(٣) تساوي	ج
٢٠٠٧ إكمال	بين وجود مماسين من النقطة (١، ٠) للاقتران $٧(س) = س^٢$ ، ثم جد معادلتيهما	ص = ٠، ص = ٤ - س
٢٠٠٨	إذا كانت معادلة العمودي على منحنى ق(س) عند النقطة (٣، ٠) هي: ٢س + ٣ص = ٦ فإن ق(٣) تساوي	د
٢٠٠٨	إذا كان المستقيم الواصل بين النقطتين (٠، ١) - (١، ٠) مماساً لمنحنى الاقتران $٧(س) = س^٢ - س + ٧$ ، جد قيمة الثابت ب.	١٠، -٦
٢٠٠٨ إكمال	إذا كان المستقيم ص = س مماساً لمنحنى $ص = س^٢ + ١$ فإن قيمة أ تساوي	ج
٢٠٠٩	إذا كانت معادلة العمودي على مماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (١، ٣) هي $ص = \frac{1}{س}$ فإن ق(١) =	د
٢٠٠٩	جد الميل لجميع المماسات المرسومة لمنحنى $٧(س) = س^٢$ من النقطة (١، -٣).	٢، -٦
٢٠٠٩ إكمال	إذا كان المستقيم ص = س + ٤ مماساً لمنحنى ل(س) عند س = ٢ وكان ق(س) = (س × ل(س))، جد ق(٢).	٨
٢٠١٠ إكمال	إذا كان ك(س) = (ق(س) + س) × ه(س)، جد ك(٣) علماً بأن للمنحنيين ق(س)، ه(س) مماساً أفقياً مشتركاً عند النقطة (٣، ٤) الواقعة على كليهما.	٤
٢٠١١	إذا كانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (٢، ١) هي اص = س وكانت ق(١٢) = ٦ فإن قيمة الثابت ب =	ب



## ورقة عمل (١٢)

### قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني

١- إذا كانت  $v = \frac{1-2}{1+2}$  ،  $\sqrt{s} = \frac{2}{s}$  فجد  $\frac{dv}{ds}$  عند  $s=4$  .

$\frac{1}{18}$

٢- إذا كان  $u = (1+s^2) = 2s^2 - 4s + 9$  فجد  $u'(5)$

٢

٣- إذا كان  $u = (2s) = 3s$  ،  $s \in [\frac{\pi}{6}, 0]$  فما قيمة  $u'(\frac{\pi}{12})$  ؟

$\sqrt{2}$

٤- إذا كانت  $v = \frac{1}{3} \ln s - \frac{1}{3} \ln s^3$  فأثبت أن :  $v' = -\frac{1}{3} \ln s^3 = 0$

٥- لتكن  $v = \ln s$  فأثبت أن :  $v' = \frac{1}{s} + \ln s = 2 \ln s$

٦- إذا علمت أن  $v = \ln s + \ln s^3$  فأثبت أن  $v' = 9 + v = 0$

٧- إذا علمت أن  $v = \ln s$  وكانت  $\frac{dv}{ds} = \frac{2}{s} + v = 4 \ln s$  فما قيمة  $v$  ؟

$\frac{4}{7}$

٨- إذا كانت  $v = \frac{1+\ln s}{1-\ln s}$  ،  $s \in [\frac{\pi}{4}, 0]$  فأثبت أن  $\frac{dv}{ds} = \frac{2}{1-\ln s} = \frac{2}{1-\ln s}$

٩- إذا علمت أن  $v' = (1+s)^{-1}$  فأثبت أن  $\frac{dv}{ds} = \frac{1}{s} (1-\frac{v}{s}) = \frac{1}{s} (1-\frac{v}{s})$

١٠- ليكن  $u = (s+v) = (s) + (v) + (s) + (v) + (s) + (v) = 3$  جد  $u'(s)$

$(3+s)$

١١- ليكن  $u = (2s) = 2s^2 + 2s + 9$  ،  $u'(9) = 3$  . جد قيمة  $u$  حيث  $u < 0$  .

٣

١٢-  $u = (s) = \ln s$  ،  $u = (s) = 2 \ln s$  جد  $u'(\frac{\pi}{4})$

٢-

١٣- إذا كان  $\sqrt{s} = \sqrt{s} + \sqrt{s}$  فجد  $\frac{dv}{ds}$

$\sqrt{\frac{s}{s}}$

١٤- إذا كان  $s = (1-v^2)(1+v^2)(1+v^4)$  فجد  $\frac{dv}{ds}$  عندما  $s=0$

$\pm \frac{1}{8}$

$$-\frac{3}{8}, -\frac{2}{3}$$

$$١٥- \text{ليكن } ص(س+ص) = ٦ \text{ فجد } \frac{ص}{س} \text{ عندما } ص=٢$$

$$١٦- \text{إذا كان } ص^٢ + ص^٢ = ٥ \text{ فأثبت أن } \frac{ص^٢}{س} - \frac{ص}{س} + \frac{ص}{س} = \frac{٥}{٣}$$

$$١٧- \text{إذا علمت أن } ص = \text{جتا } ص \text{ فأثبت أن : } ٢ \text{ جا } ٣ ص = \frac{ص^٢}{س} + ص = ٠$$

$$١٨- \text{إذا علمت أن } ص = \text{ظا } ص \text{ فأثبت أن : } \frac{ص^٢}{س} + \text{جا } ٢ ص = \frac{ص}{س} = ٠$$

$$١٩- \text{جد } \frac{١}{س} \text{ (( } \sqrt{٣+ص} \text{ ) } \cup \text{ ) } \text{ عند } ص=١ \text{ علما بأن } ٢ = (٢) \cup, ١ = (٢)' \cup$$

$$٢٠- \text{إذا كان } \cup (س - \sqrt{س}) = ص^٣ \times ه(س), ه(س) = ١ + ص^٢ \text{ فجد } \cup (٢)'$$

$$٢١- \text{إذا كانت } ص = \text{جتا } ص \text{ فأثبت أن : } ١ \text{ جا } ٣ ص \times ص'' + ص = ٠$$

$$٢٢- \text{إذا علمت أن } ص = \left( \frac{١}{٢} \text{ ظا } ص \right)^٣ \text{ فأثبت أن : } \frac{ص}{س} = ٣ \text{ جا } ٤ ص \text{ جا } ٢ ص$$

$$٢٣- \text{إذا علمت أن } ص(١+ص) = (٢-ص)^٢ \text{ فأثبت أن : } ٩(١+ص) \left( \frac{ص}{س} \right)^٢ = ٤$$

$$٢٤- \text{إذا كان } ص = \text{جا } ٢ ص, ص = \text{جتا } ٢ ص \text{ فأثبت أن } \frac{ص^٢}{س} = -\text{قتا } ٣ ص$$

$$٢٥- \text{إذا كان } ص^٢ = ٣ ص^٢ + ٥ \text{ فما قيمة } \frac{ص}{س} \text{ علما بأن } ص = ٣ س ؟$$

$$٢٦- \text{جد } \frac{١}{س} \cup (٢(س)) \text{ عند } ص=٣ \text{ علما بأن } ٤ = (٣) \cup, ٢ = (٣)' \cup$$

$$٢٧- \text{إذا كان } ص = \left( \frac{١+ع}{١-ع} \right)^٢, ع = ص^٢ + ٢ ص \text{ فجد } \frac{ص}{س} \text{ عندما } ص = ١$$

$$٢٨- \text{إذا كان } \cup (س) = \text{ظا } ٢ ص, ه(س) = \frac{١}{١+ص^٢} \text{ وكان } (ه \circ \cup)' \left( \frac{\pi}{٤} \right) = \frac{٨}{٢٥} \text{ فما قيمة } ١ ؟$$

$$٢٩- \text{إذا كان } ص - ص = \text{جتا } ص \text{ فأثبت أن : } \left( \frac{ص^٢}{س} \right) = ٢ \left( \frac{ص}{س} \right) \text{ (قا } ص + \text{ظا } ص)$$

$$٣٠- ه(س) = \sqrt[٥]{س^٣ - ٤س + ١}, \cup (٢) = ٣, \cup (٢)' = ١, ل(س) = ه(س) \times \cup (س). \text{ جد } ل(٢)$$

$$٣١- ل(س) = \sqrt[٤]{(س^٢ - ١ + س)}, \cup (١) = ٤, \cup (١)' = ٢. \text{ جد } \left( \frac{\cup}{ل} \right)' (١)$$

$$٣٢- \text{إذا كان } س + ص = \text{جاس فثبت أن : } \left( \frac{ص}{س} \right)^2 = \frac{ص^2 س}{س^3} = \frac{ظتاص - قتاص}{س^2}$$

$$٣٣- \text{إذا كان } ص - س = \text{جاس فثبت أن : } ص'' + ص = ٢ص \times' (١ - س)^{-١}$$

$$٣٤- \text{إذا كان } جتاص - س = ٢ص \text{ فثبت أن : } ص \times'' (س + جاص) + ص \times' (٢ + ص'جتاص) = ٠$$

$$٣٥- \text{إذا كان } ص = \sqrt[3]{ظاس + \sqrt[3]{ظاس + \sqrt[3]{ظاس + \sqrt[3]{ظاس + \dots}}} \text{ فثبت أن } \frac{قاس}{١ - ص} = \frac{ص}{س}$$

$$٣٦- \text{إذا كان } ص = (قاس + ظاس)^2 \text{ فثبت أن } \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} = م قاس$$

$$٣٧- \text{إذا كان } ع = س^2 + س + ١, \frac{١}{س^3} = س^3 + س^٥ + س^٧ \text{ فما قيمة } \frac{ع^2 س}{ص} \text{ عند } س = ١$$

$$٣٨- \text{إذا كان } \frac{ص}{س} = س^2 \text{ فجد } \frac{ص^2 س}{ص^2 س} \quad ٣٩- \text{إذا كان } ص = ظا(س) \text{ فثبت أن } \frac{ص + ص^3}{(١ + ص^2)س - ١} = \frac{ص}{س}$$

$$٤٠- \text{إذا كان } ع^2 = \frac{س}{(٢س)^2} \text{ وكان } ع = (١) \text{ و } ع' = (١) \text{ ، } ع < ٠ \text{ فجد } \frac{ع س}{س} \text{ عند } س = ١$$

$$٤١- \text{إذا كان } س = (١ + ص^2) \text{ فجد } \frac{ص}{س} \text{ عندما } ص = ٢, \text{ و } ع = (٥) \text{ و } ع' = (٥)$$

جد المشتقة التوفية ( )<sup>(٧)</sup> (س) للاقتارات التالية:

$$٤٢- (س) = \text{جاس} \quad ٤٣- (س) = \text{جتاس} \quad ٤٤- (س) = \frac{١}{س}$$

$$٤٥- (س) = \frac{١}{س - ١} \quad ٤٦- (س) = \frac{١}{(س - ١)س} \quad ٤٧- (س) = س هـ (س)$$

$$٤٨- \text{إذا كان } (س) = ٢ظتاس, هـ (س) = (س^3 - س^2) \text{ وكان } (هـ \circ \text{و})' = \left( \frac{\pi}{٤} \right)' = ٠ \text{ فما قيمة } ؟ \left( \frac{١}{٢} \right)$$

$$٤٩- \text{إذا كان } ص = \sqrt[3]{٣ + ٤جتاس} \text{ فثبت أن } ٢ص + \frac{ص^2 س}{س^2} + \left( \frac{ص}{س} \right)^2 = ٢ص + ع$$



السنة	السؤال	الجواب
٢٠٠٧	إذا كان $ص = ع^2 + ١$ ، $ع = ٢س - ٣$ فإن $\frac{ص}{س}$ عند $س = ٢$ تساوي (أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٨	ب
٢٠٠٧	إذا كان $ل (س) = س \times هـ (س^2 - ٣س + ٣)$ فأوجد $ل (٣)$ علما بأن هـ (٣) = ٤، هـ (٣) = ١	١٣
٢٠٠٧ دراسات	إذا كان $و (س) = س^3 + ٢س^2 + ٥$ ، هـ (س) = $س^2 + ١$ فأوجد (ق هـ) (س)	$٦س (س^2 + ١) + ٤س$
٢٠٠٨ إكمال	إذا كان $و (س) = ل (س^2 + ١)$ ، $ل (٥) = ١$ ، $ل (٥) = ٣$ فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق (س) عند $س = ٢$	$ص = ٤س - ٥$
٢٠٠٩	إذا كان $و (س) = \frac{١}{س}$ ، هـ (س) = $٢س^2 - ١$ فإن (ق هـ) (١) = (أ) ٤ - (ب) ١ - (ج) ١ (د) ٤	أ
٢٠٠٩ إكمال	إذا كان $ص = ع^3 - ١$ ، $ع = (١ + س)^3$ فجد $\frac{ص}{س}$ عند $ص = ٠$	٩
٢٠١٠	إذا كان $و (س) = ٢س^2 + س - ١$ ، هـ (س) = $\sqrt{س}$ فإن (ق هـ) (١) = (أ) ٣ - (ب) $\frac{١}{٢}$ - (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) ٣	د
٢٠١٠	إذا كانت $ص = (ع^3 - ٢ع)$ ، $ع = ١$ فجد $\frac{ص}{س}$ عند $س = ١$	٣ -
٢٠١٠ إكمال	إذا كانت $ص = ع^3 + ع^2 - ٦$ ، $ع = ٢س - ٣$ ، $س < ١$ فجد $\frac{ص}{س}$ عند $ع = ١$	٢٠
٢٠١١	إذا كان ق (س) قابلا للاشتقاق وكان $و (س^3 + ١) - س = ٠$ ، فإن ق (٩) = (أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٩}$ (ج) صفر (د) ٣٣	أ
٢٠١١	إذا كانت $ص = \sqrt{ع + ٣}$ ، $ع = ٣س^3$ فجد $\frac{ص}{س}$ عند $س = ٣$	$\frac{١٨}{٧}$
٢٠١٢	إذا كان $و (س) = س^2$ فإن (ق هـ) (١) = (أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨	د

٢٠١٢	إذا كان $\sqrt{\frac{ص}{١-ص}} = \sqrt{\frac{ص}{١-ص}}$ ، أثبت أن: $ص = ص(١-ص)$	😊
٢٠١٣	إذا كان $٧(س) = ٢س + ١ - س$ ، هـ (س) = $\sqrt{س}$ فإن (ق هـ) $(\frac{١}{٤}) =$ (أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) ٣ (ج) ٣- (د) $\frac{١}{٤} -$	ب
٢٠١٣ إكمال	إذا كان $٧(س) = ٨هـ (\sqrt{س})$ وكان هـ (٣) = ٢ ، ق (٩) = $\frac{٢}{٣}$ فإن قيمة الثابت أ تساوي (أ) ٢ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (ج) ١ (د) $\frac{١}{٣}$	أ
٢٠١٤	إذا كان (ق هـ) = ٢٧ حيث $٧(س) = ٢س - ٥س$ ، هـ (٢) = ٣ فإن هـ (٢) = (أ) ٢١ (ب) ١٦ (ج) ٩ (د) ٧	د
٢٠١٤	إذا كان $٧(س) = ٢س + ٣$ ، هـ (س) = $٣ + ٢$ فجد (ق هـ) (٢) ٩٦٦	
٢٠١٤	إذا كان $ص = ج هـ$ ، س = ق هـ ، أثبت أن : $\frac{٢ص}{٣س} + \frac{٢ص}{٣س} = ٥$	😊
٢٠١٥	إذا كان (ق هـ) = (س) ، س = وكانت ق (س) = $\frac{١}{س}$ حيث هـ (س) قابل للاشتقاق فإن هـ (س) = (أ) ١ (ب) س (ج) ق (س) (د) هـ (س)	د
٢٠١٥	إذا كان $\left(\frac{ص}{ب}\right)^٢ = \left(\frac{س}{١}\right)^٢$ حيث أ، ب عددا حقيقيان لا يساويان الصفر، م، ن عددا صحيحان موجبان غير متساويين فأثبت أن $\frac{٢ص}{س} = \frac{٢ص}{س} \left(\frac{س}{س}\right)$	😊
٢٠١٥ إكمال	إذا كان $٧هـ (س) = ١ - ٣س$ ، $٢س + ٢$ فإن هـ (٧) = (أ) $\frac{٢}{٣١}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (ج) ٤ (د) ١٤	ب

### الاشتقاق الضمني

٢٠٠٧	إذا كان $(س + ص) = ٥$ ، $٢ص + ٣ = ١ + ٣$ فأوجد $\frac{ص}{س}$ عند النقطة (١، ١)	$\frac{٧٨-}{٧٧}$
٢٠٠٨	إذا كانت $ع = ٥ص - ٢ص + ٨$ ، $٢ص = ٢ + ص$ جد $\frac{ع}{س}$ عند $ص = ١$ ، $١ = ص$	١



٢٠٠٨ إكمال	$\text{نها} = \frac{\text{جنا} (٢س - هـ) - \text{جنا} ٢س}{هـ}$ <p>(أ) ٢- جنا س (ب) جنا س (ج) ٢ جنا س (د) - جنا س</p>	ب
٢٠٠٩	$\text{نها} = \frac{\text{جنا} (\pi + هـ) - \text{جنا} (\pi)}{هـ}$ <p>إذا كان ق(س) = ظا س، فإن</p> <p>(أ) غ.م (ب) ٢- (ج) صفر (د) ٢</p>	د
٢٠٠٩	$\text{إذا كان ص} = \text{ظا} ٢س، \text{ أثبت أن } \frac{٢س}{٣} = \frac{٢(١ + ص)(١ + ٣ص)}{٣}$	😊
٢٠١٠	$\text{إذا كان ق(س)} = \text{جنا} ٢س، \text{ فإن ق(س)} + ٥\text{ق(س)} =$ <p>(أ) جنا س (ب) ٩ جنا س (ج) ٩ جنا س (د) - جنا س</p>	أ
٢٠١٠	$\text{نها} = \frac{\text{ظا} (٢س - هـ) - \text{ظا} ٢س}{هـ}$ <p>(أ) قا ٢س (ب) - قا ٢س (ج) ٢ قا ٢س (د) ٢ - قا ٢س</p>	ب
٢٠١٠ إكمال	<p>إذا كان المستقيم ص = س مماساً لمنحنى الاقتران ص = جا س + أ، س ∈ [٠, π] فإن الإحداثي السيني لنقطة التماس هو :</p> <p>(أ) <math>\frac{\pi}{٣}</math> (ب) <math>\frac{\pi}{٤}</math> (ج) <math>\frac{\pi}{٦}</math> (د) <math>\frac{\pi}{٣}</math></p>	ب
٢٠١١	<p>جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = <math>\frac{١}{٣}</math> جنا س + جنا س عند النقطة/النقاط التي يكون عندها المماس أفقياً في الفترة <math>[\frac{\pi}{٣}, \frac{\pi}{٣} -]</math></p>	ص - $\frac{٢}{٣} = ٠$
٢٠١٢	$\text{إذا كان ص} = \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} \text{ فإن } \text{ظا س} + \text{قاس} = \frac{\text{ص}'}{\text{ص}}$ <p>(أ) قاس (ب) قتا س (ج) - قاس (د) - قتا س</p>	ج
٢٠١٣	$\text{إذا كان ص} = \text{قتا} ٢س \text{ فإن } \frac{٢س}{٣} =$ <p>(أ) قتا س ظتا س (ب) ٢ قتا س ظتا س (ج) - قتا س ظتا س (د) ٢ ظتا س</p>	ب

٢٠١٣ إكمال	إذا كان $v = 1 - \text{جاس فأنثبت أن } \frac{u}{v} = \left( \frac{\text{جتاس}}{v} \right)$ ، حيث $v \neq 0$ .	😊
٢٠١٤	إذا كان $u (س) = \text{جا} \sqrt{س} \text{ فإن ق} \left( \frac{2\pi}{3} \right) =$ (أ) $\pi -$ (ب) $1 -$ (ج) $\frac{1}{\pi} -$ (د) صفر	ج
٢٠١٤	$\frac{\text{جا}^3 (س - ٢هـ) - \text{جا}^3 س}{\text{هـ}^3}$ (أ) - جاس جاس $س$ (ب) $٢ \text{ جا}^2 س$ (ج) $\frac{2}{3} \text{ جتا}^2 س$ (د) جاس جتا $س$	أ
٢٠١٥	إذا كان $v = \text{ظاس جا}^2 س$ فإن $\frac{u}{v}$ عندما $س = \frac{\pi}{4}$ تساوي (أ) صفر (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $٤$ (د) $٢$	د



# الوحدة الثالثة

## تطبيقات التفاضل

## ورقة عمل (١٣)

### نظرية القيمة المتوسطة و رول:

ج	قيمة ج التي تحددها نظرية رول على الاقتران ق(س)=جاس+جتاس في الفترة $[\frac{\pi}{3}, 0]$ هي:	٢٠٠٧، ٢٠٠٧ دراسات
	(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{6}$ (ج) $\frac{\pi}{4}$ (د) $\frac{\pi}{3}$	٢٠١١
$\pm \sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left. \begin{array}{l} \text{س}^3 - 2, \text{س} \geq 1 \\ \text{س}^3 - 4, \text{س} < 1 \end{array} \right\} = \text{س}$ <p>بين فيما إذا كان الاقتران ق(س)=</p> <p>يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على <math>[-1, 3]</math> ثم أوجد ج التي تعينها النظرية .</p>	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{2}$	إذا كان $ق(س) = \text{س}^2 - 3\text{س} + 6$ فابحث في توفر شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[-1, 2]$ ثم أوجد ج التي تعينها النظرية .	٢٠٠٧ دراسات
أ	ليكن ق(س) كثير حدود من الدرجة الثانية وكان ق(أ)=ق(ب) فإنه يوجد على الأقل ج $\in [أ، ب]$ بحيث (أ) ق(ج)=0 (ب) ج نقطة انعطاف (ج) ق(ج)=0 (د) غير ذلك	٢٠٠٧ إكمال
ب	قيمة ج التي تحددها نظرية القيمة المتوسطة للاقتران $ق(س) = \text{س}^2 + \text{س} - 6$ في $[-1, 2]$ هي:	٢٠٠٨
	(أ) $-\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{5}{4}$	
١	بين أن $ق(س) = \text{س}^2 + \frac{1}{\text{س}}$ يحقق شروط رول على $[\frac{1}{2}, 2]$ ثم جد ج التي تعينها النظرية	٢٠٠٨ إكمال
أ=٥ ، ب=٢	$\left. \begin{array}{l} 1 - \text{س}^2, \text{س} \geq 2 \\ 2 - \text{س}, \text{س} < 2 \end{array} \right\} = \text{س}$ <p>إذا كان الاقتران ق(س)=</p> <p>يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في <math>[-2, 2]</math> ، جد قيمتي الثابتين أ، ب ثم جد قيمة ج التي تعينها النظرية.</p>	٢٠٠٩
ج= $-\frac{1}{8}$		
١	بين أن الاقتران $ق(س) = \text{س} + \frac{1}{\text{س}}$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في $[\frac{1}{2}, 2]$ . ثم جد قيمة /قيم ج التي تعينها النظرية.	٢٠٠٩ إكمال

٢	$\left. \begin{array}{l} ٣س - ٢س - ٢س \geq ١ - , ١س > ١ \\ ٣س \geq ١س \geq ١ , ٤س - ٢س + ٢س \end{array} \right\} = (س) \text{ إذا كان الاقتراح ق(س)}$ <p>فابحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة للاقتراح ق(س) على <math>[١- , ٣]</math> ثم أوجد ج التي تعينها النظرية .</p>	٢
١ ١١	$\left. \begin{array}{l} ٣س - ٢س \geq ١ - , ١س > ١ \\ ٢س \geq ١س \geq ١ , ٥س + ٤س - ٢س \end{array} \right\} = (س) \text{ بين أن الاقتراح ق(س)}$ <p>يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة <math>[١- , ٢]</math> ثم أوجد قيمة/قيم ج التي تعينها النظرية .</p>	٢
😊	<p>ق، ك اقتراحان كل منهما يحقق شروط نظرية رول في الفترة <math>[أ , ب]</math>، ابحث هل يحقق حاصل الضرب ق(ك) شروط هذه النظرية على الفترة <math>[أ , ب]</math> .</p>	٢٠١١ إكمال
ج	<p>مجموعة جميع قيم ج التي يمكن الحصول عليها من تطبيق نظرية رول على الاقتراح ق(س) <math>= ٨</math> في <math>[١ , ٠]</math> هي:</p> <p>أ) <math>\{ \}</math> ب) <math>\{ \text{صفر} \}</math> ج) <math>[١ , ٠]</math> د) <math>[١ , ٠]</math></p>	٢٠١٢
٥	<p>بين أن الاقتراح <math>ق(س) = ٢س + ٣س + ١</math> يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في <math>[١ , ٤]</math> . ثم جد قيمة/قيم ج التي تعينها النظرية.</p>	٢٠١٢
٣=أ ٢=ب ١=ج	$\left. \begin{array}{l} ٣س - ٢س \geq ١ - , ١س > ١ \\ ٢س \geq ١س \geq ١ , ٤س - ٢س + ٢س \end{array} \right\} = (س) \text{ إذا كان الاقتراح ق(س)}$ <p>يحقق شروط نظرية رول للاقتراح ق(س) على <math>[١ , ٢]</math> فجد قيمتي أ، ب ثم أوجد قيمة ج التي تعينها النظرية</p>	٢٠١٢ إكمال



$2 = \alpha$ $19 = \beta$ $\frac{9}{4} = \gamma$	$\left. \begin{array}{l} 3 - s, \quad s > 4 \\ s - 2 + s - 1, \quad s \leq 4 \end{array} \right\} \text{إذا كان الاقتران ق(س) =}$ <p>يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة للاقتران ق(س) على <math>[2, 6]</math> فجد قيمتي أ، ب ثم أوجد قيمة ج التي تعينها النظرية</p>	٢٠١٣
$\frac{1}{4} -$	$\left. \begin{array}{l} s + 2 + s + 1, \quad s \geq 1 \\ s, \quad s < 1 \end{array} \right\} \text{إذا كان الاقتران ق(س) =}$ <p>بين أن ق(س) يحقق باقي شروط نظرية رول على <math>[-3, \frac{7}{3}]</math> ثم أوجد قيمة/قيم ج التي تعينها النظرية .</p>	٢٠١٢ إكمال
$\sqrt{5}$	$\left. \begin{array}{l} s + 2 + s, \quad 1 \leq s \leq 2 \\ s - 3 + s + 2, \quad 2 < s \leq 3 \end{array} \right\} \text{بين أن الاقتران ق(س) =}$ <p>يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة <math>[1, 3]</math> ثم أوجد قيمة/قيم ج التي تعينها النظرية .</p>	٢٠١٤
$6 = \alpha$ $3 = \beta$ $9 = -\gamma$	$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{3} + s, \quad 1 \leq s < 3 \\ s - 2 + s, \quad 3 \leq s \end{array} \right\} \text{إذا كان الاقتران ق(س) =}$ <p>يحقق شروط نظرية رول ، أوجد الثوابت أ، ب، ج.</p>	٢٠١٤
$1$	$\frac{s + 6}{3} = \text{ق(س)}$ <p>بين أن الاقتران ق(س) يحقق شروط نظرية رول في <math>[\frac{1}{3}, 2]</math> . ثم جد قيمة /قيم ج التي تعينها النظرية.</p>	٢٠١٤ إكمال ضفة

$1 = \text{أ}$ $7 = \text{ب}$ $5 = \text{ج}$	$\left. \begin{array}{l}  س^2 - س - 6  , س \geq 0 , س > 1 \\  س + ب  , س \geq 1 , س > 2 \\ س = 2 , ج \end{array} \right\} = \text{جد الثوابت أ، ب، ج التي تجعل الاقتران ق(س) =}$ <p>يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة [0، 2]</p>	٢٠١٤ إكمال غرة
د	<p>إذا كان ق(س) = <math>س^3 - 3س - 2</math> يحقق شروط نظرية رول على الفترة <math>[-1, 1]</math> فإن قيمة الثابت أ تساوي</p> <p>أ) ١      ب) ٢      ج) ٣      د) ٤</p>	٢٠١٥
$1 = \text{أ}$ $6 = \text{ب}$ $\sqrt[3]{\frac{13}{3}} = \text{ج}$	$\left. \begin{array}{l}  س^2 + 2س - 6  , س \geq 0 , س \geq 2 \\  س^3 - 3س - 2  , س > 2 , س \geq 3 \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س) =}$ <p>يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة</p> <p>للاقتران ق(س) على <math>[0, 3]</math> فعين قيمتي أ، ب ثم جد قيمة/قيم ج التي تعينها النظرية.</p>	٢٠١٥
ج	<p>إذا كان ق(س) يحقق شروط نظرية رول في الفترة <math>[أ، ب]</math>، فإن العبارة الصحيحة دائماً هي</p> <p>أ) ق(أ) × ق(ب) &gt; صفر      ب) يوجد على الأقل ج3] أ، ب] بحيث ق(ج) = صفر</p> <p>ج) يوجد على الأقل ج3] أ، ب] بحيث يكون مماس ق عندها أفقياً</p> <p>د) ق(س) يحقق شروط رول على أي فترة جزئية من <math>[أ، ب]</math></p>	٢٠١٥ إكمال
$\frac{9}{4} = \text{ج}$	$\left. \begin{array}{l} 2 \leq س \leq 1 , س^2 - 3 \\ 3 \geq س > 2 , 7 - س^2 - 6س \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س) =}$ <p>فابحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة <math>[1, 3]</math> ثم أوجد قيمة/قيم ج التي تعينها النظرية .</p>	٢٠١٥ إكمال

## ورقة عمل (١٤)

الزائد والشاخص والقيم القصوى والنقص اختر الإجابة الصحيحة :

١- إذا كان  $U(s) = |s - 3| = 5$  فإن أصغر قيمة للاقتزان  $U(s)$  هي :

- (أ) ٥ (ب) صفر (ج) ٢- (د) ٥-

٢- إذا كان  $U(s) = \sqrt{s^2 - 2s + 3}$  فإن مجموعة قيم  $s$  التي يكون للاقتزان  $U(s)$  عندها نقط حرجة هي :

- (أ)  $\{2\}$  (ب)  $\{3, 1\}$  (ج)  $\{3, 2, 1\}$  (د)  $\{3, 2, 1, 0\}$

٣- إذا كان  $U(s) = |s - 2| = 5, s \in [1, 5]$  فإن مجموعة قيم  $s$  التي يكون للاقتزان  $U(s)$  عندها نقط حرجة هي :

- (أ)  $\{5, 0, 1\}$  (ب)  $\{5, 2, 1\}$  (ج)  $\{5, 4, 1\}$  (د)  $\{2, 0\}$

٤-  $U(s)$  معرف على  $[3, 0]$  وقابل للاشتقاق على  $[3, 0]$  حيث  $U'(s) = \frac{s - 2}{s + 1}$  فإن عدد النقط الحرجة للاقتزان  $U(s)$  يساوي

- (أ) ٥ (ب) ٤ (ج) ٣ (د) ٢

٥- إذا كان للاقتزان  $U(s) = s^3 - bs + 6$  قيمة قصوى محلية عند  $s = 2$  فما قيمة  $b$

- (أ) ٦ (ب) ٦- (ج) ١٢ (د) ١٢-

٦-  $U(s)$  معرف على  $[3, 0]$  وقابل للاشتقاق على  $[3, 0]$  حيث  $U'(s) = \frac{s - 2}{s + 1}$  فإن جميع قيم  $s$  التي عندها نقط حرجة للاقتزان  $U(s)$

- (أ)  $\{3, 2, 1, 0\}$  (ب)  $\{3, 2, 0\}$  (ج)  $\{3, 0\}$  (د)  $\{2\}$

٧- إذا كان للاقتزان  $U(s) = s^3 - 3s^2 + 2s$  قيمة صغرى محلية عند  $s = 2$  فإن قيمة الثابت  $m$  تساوي

- (أ) ١- (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

٨- إذا كان  $U(s) = s^2 - s$  ،  $0 \leq s \leq 1$  ،

،  $1 < s \leq 3$  ، فإن جميع قيم  $s$  التي يوجد عندها نقط حرجة للاقتزان  $U(s)$  في  $[3, 0]$  هي

- (أ)  $\{3, 0, \frac{1}{2}\}$  (ب)  $\{3, 1, 0\}$  (ج)  $\{3, 1, \frac{1}{2}, 0\}$  (د)  $\{3, 0\}$

٩-  $U(s)$  معرف على  $[3, 0]$  وكان  $U(1) = 2$  ،  $U'(1) = 0$  ،  $U''(1) = 3$  فإن القيمة العظمى المحلية للاقتزان  $U(s)$  تساوي

- (أ) ٢- (ب) ٣- (ج) صفر (د) ١

١٠-  $U(s) = \sqrt{s^2 - 2s + 5}$  ، الفترة التي يكون فيها الاقتران متزايدا :

- (أ)  $[-1, \infty)$  (ب)  $[-1, \infty)$  (ج)  $[-1, \infty)$  (د)  $[-1, 1]$

١١-  $U(s) = \left[1 + \frac{1}{s}\right]$  معرف على  $[-3, 3]$  فإن الإحداثي السيني للنقط المخرجة للاقتران  $Q(s)$  :

- (أ)  $\frac{1}{3}$  (ب)  $\{3, -3\}$  (ج)  $[-3, 3]$  (د)  $[-3, 3]$

١٢- مجموعة النقط المخرجة للاقتران  $U(s) = \sqrt{s^2 - 6s}$  هي :

- (أ)  $\{0, 16\}$  (ب)  $\{0, 8, 16\}$  (ج)  $\{8\}$  (د)  $\emptyset$

١٣- إذا كان للاقتران  $U(s) = s^3 - 9s^2$  نقطة حرجة عند  $s=2$  فإن قيمة الثابت  $m$  تساوي

- (أ) ٢ (ب) ٥، ١ (ج) ٥، ٤ (د) ٣

١٤- إذا كان  $U(s) = \sqrt{s^2 - 36}$  ،  $|s| \geq 6$  فإن  $Q(s)$  يكون متزايدا عندما :

- (أ)  $s \leq 0$  (ب)  $s \leq -6$  (ج)  $-6 \leq s \leq 0$  (د)  $0 \leq s \leq 6$

١٥- إذا كانت النقطة  $(2, 1)$  نقطة انعطاف لمنحنى  $Q(s)$  وكانت  $U'(s) = s^3 - 4s^2 - Ls$  ، حيث  $L$  ثابت فإن  $L =$

- (أ) ٦ (ب) ١٢ (ج) ٤ (د) ٢٤

١٦- إذا كان لمنحنى  $U(s) = s^3 + 8s^2$  نقطة انعطاف عند  $s = \frac{\pi}{6}$  فما قيمة الثابت  $A$  ؟

- (أ) ١ (ب)  $\frac{1}{2}$  (ج) ٠ (د)  $\frac{1}{4}$

١٧-  $U(s) = (s^2 - 4)^3 + 3$  ،  $s \in \mathbb{R}$  فإن منحنى  $Q(s)$  يكون مقعرا لأعلى في :

- (أ)  $[-4, -\infty)$  (ب)  $[-2, \infty)$  (ج)  $[2, \infty)$  (د)  $[-\infty, 0]$

١٨- إذا كان المستقيم  $s+3=0$  مماسا لمنحنى  $Q(s)$  عند نقطة الانعطاف  $(-1, 1)$  فإن ظل زاوية الانعطاف عند النقطة  $(-1, 1)$  يساوي :

- (أ) -١ (ب) ١ (ج) صفر (د) -٣

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨
الإجابة	د	ب	ب	ج	ج	ب	ب	أ	أ	ب	د	أ	د	ج	أ	د	ج	د

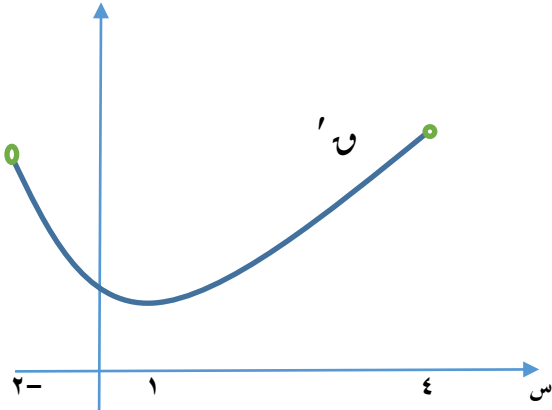
لكل من الاقتراعات التالية جد : أ) فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى ب) فترات التغير ونقط الانعطاف

- ١-  $٦ - ٣س - ٢س = (س)٧$
- ٢-  $٣س = (س)٧$
- ٣-  $٩ - ٢س = (س)٧$
- ٤-  $٩ - ٢س = (س)٧$
- ٥-  $١ - ٤س - ٢س = (س)٧$  ،  $\left[ \frac{\pi}{2}, ٠ \right] \ni س$
- ٦-  $\frac{١}{٤ - ٢س} = (س)٧$  ،  $٢ \neq \pm ٢$
- ٧-  $٣س - ٣س + ١ = (س)٧$  ،  $٢ > ٣ \geq س$
- ٨-  $٣س - ٢س = (س)٧$  ،  $٢ \leq س$
- ٩-  $١ + ٢س = (س)٧$  ،  $٢ > ٣ \geq س$
- ١٠-  $١ + ٢س = (س)٧$  ،  $٢ > ٣ \geq س$

أجب عن الأسئلة التالية :

- ١- إذا كان  $٣س + ٢س + ١ = (س)٧$  ، جد قيم الثوابت أ ، ب ، ج إذا علمت أن للاقتراح نقطة حرجة عند  $(١ - ، ٥)$  ونقطة انعطاف عند  $س = ٢$  .  
( أ = ٦ ، ب = ١٥ ، ج = ٣ )
- ٢- إذا كان منحنى  $٣س + ٢س + ١ = (س)٧$  يمر بالنقطة  $(٠ ، ٢)$  ، وكانت النقطة  $(١ - ، ٥)$  نقطة انعطاف لهذا المنحنى ، فجد قيم الثوابت أ ، ب ، ج .  
( أ = ١ ، ب = ٣ ، ج = ٢ )
- ٣- جد قاعدة كثير الحدود من الدرجة الثالثة والذي يمر بالنقطة  $(٠ ، ٥)$  ومعادلة المماس لمنحناه عند نقطة الانعطاف  $(١ ، ٣)$  هي :  $٢س = ١$  .
- ٤- جد معادلة المماس لمنحنى  $٣س - ٢س + ١٥ = (س)٧$  عند نقطة الانعطاف .  
( ص = ١٢ + ٢٣ )
- ٥-  $٣س - ٢س + ١٥ = (س)٧$  ،  $٣س - ٢س + ١٥ = (س)٧$  ،  $٣س - ٢س + ١٥ = (س)٧$  . جد القيم العظمى والصغرى المطلقة للاقتراح .  
{ ٧ ، - ٢٠ }
- ٦-  $٣س = (س)٧$  ، جد : فترات التزايد والتناقص والتغير .  
٧-  $\frac{١ - س}{٣ + ٢س} = (س)٧$  ، جد فترات التزايد والتناقص .
- ٨- أوجد القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية (إن وجدت) للاقتراح  $٣س - ٢س + ١٥ = (س)٧$  .  
[  $\pi$  ، ٠ ]
- ٩- إذا كان  $٣س - ٢س + ١٥ = (س)٧$  ، فجد فترات التزايد والقيم العظمى والصغرى المطلقة وفترات التغير لأسفل .  
[  $\pi$  ، ٠ ]
- ١٠- إذا كان  $٣س - ٢س + ١٥ = (س)٧$  ، فجد فترات التزايد والقيم العظمى المحلية للاقتراح (س) .  
[  $\pi$  ، ٠ ]

١١- يمثل الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى للاقتزان ق المتصل على  $[-٢، ٤]$



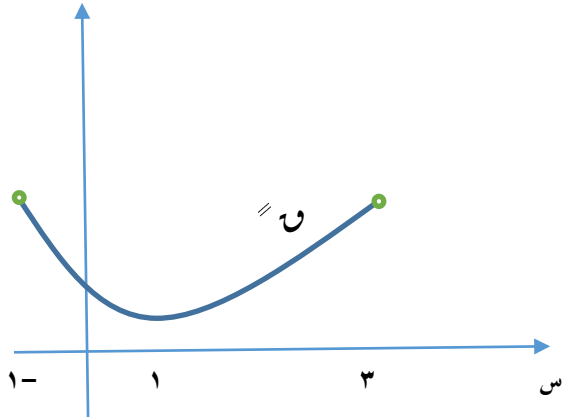
١- حدد الفترة التي يكون فيها ق(س) متزايدا .

٢- حدد الفترة التي يكون فيها منحنى ق(س) مقعرا لأعلى.

١٢- يمثل الشكل المجاور منحنى المشتقة الثانية للاقتزان ق المتصل على  $[-١، ٣]$

حدد الفترة التي يكون فيها  $f''(s)$  متزايدا .

حدد الفترة التي يكون فيها منحنى ق مقعرا لأعلى.

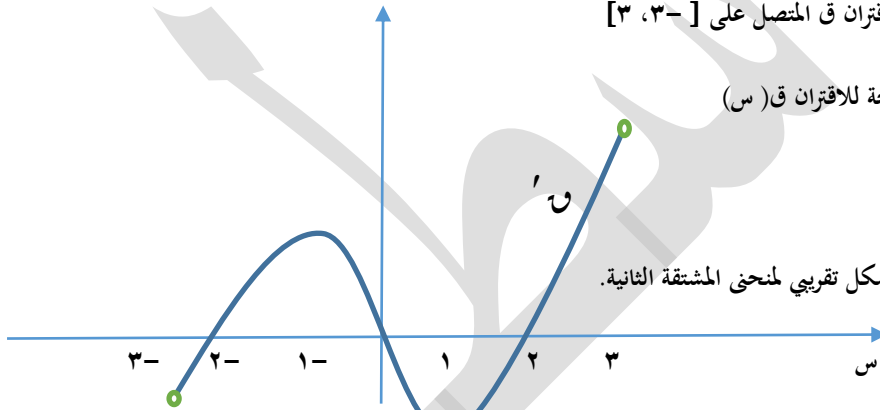


١٣- يمثل الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى للاقتزان ق المتصل على  $[-٣، ٣]$

جد : ١- فترات التزايد والتناقص والنقط الحرجة للاقتزان ق(س)

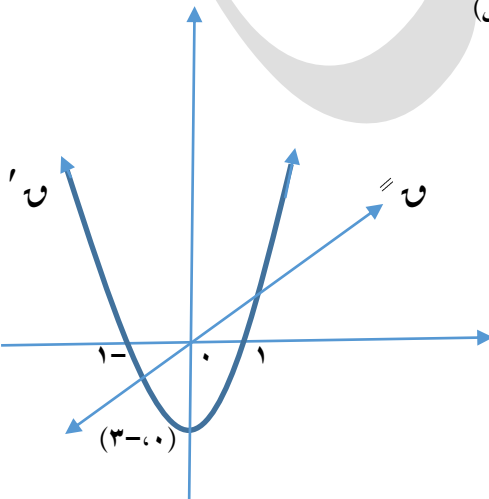
٢- التغير ونقط الانعطاف لمنحنى ق(س) وارسم شكل تقريبي لمنحنى المشتقة الثانية.

٣- النقط الحرجة للاقتزان ق(س) .



١٤- يمثل الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى والمشتقة الثانية لكثير الحدود ق(س)

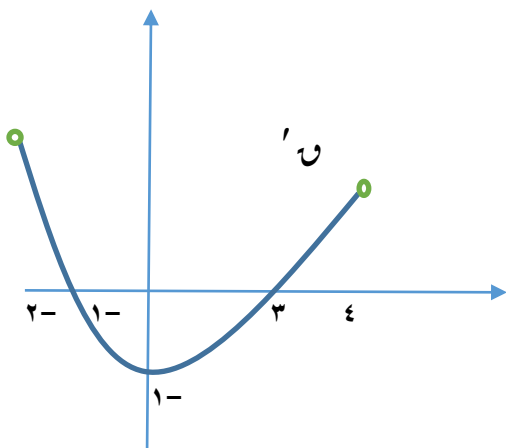
١- حدد فترات تزايد وتناقص ق(س) ٢- القيم القصوى للاقتزان ق(س)



٤- نقطة انعطاف ق(س) (إن وجدت)

٣- فترات تغير ق(س)

١٥- يبين الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى للاقتزان ق(س) المتصل على  $[-٢, ٤]$



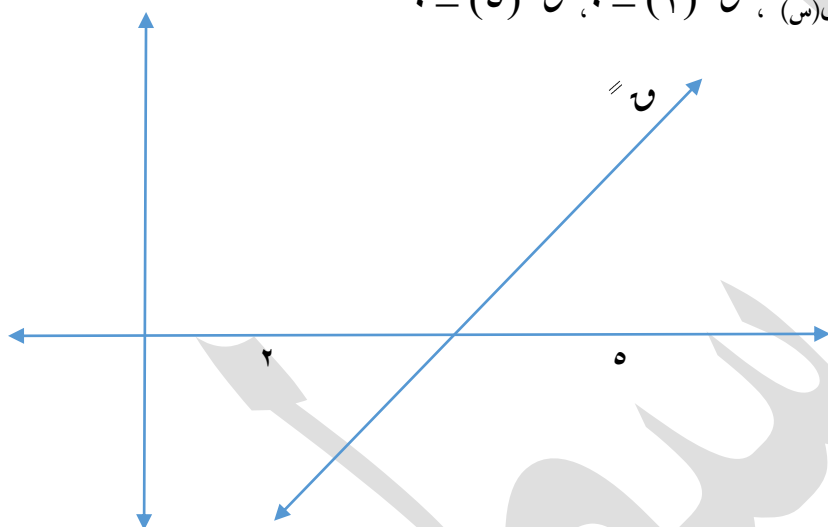
١- حدد الإحداثيات السينية للنقط الحرجة للاقتزان ق ٢- حدد الإحداثي السيني لنقطة الانعطاف

٣- حدد فترات تناقص وتزايد ق(س)

٤- حدد فترات تقعر ق(س)

١٦- يمثل الشكل المجاور منحنى المشتقة الثانية لكثير الحدود ق(س) ،  $٠ = (٢)' ق$  ،  $٠ = (٥)' ق$

جد :



١- القيم العظمى والصغرى للاقتزان ق(س)

٢- فترات تقعر ق(س) ونقط الانعطاف (إن وجدت)

٣- فترات تزايد وتناقص ق(س)

١٧- الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الأولى والمشتقة الثانية للاقتزان ق(س)

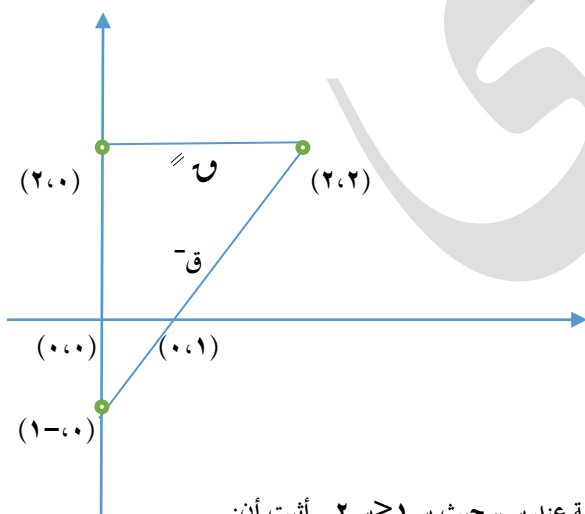
المعرف على  $[٠, ٢]$

جد :

النقط الحرجة للاقتزان ق(س)

تزايد وتناقص ق(س)

تقعر ق(س) ونقط الانعطاف إن وجدت



١٨ ق(س) كثير الحدود من الدرجة الثالثة له قيمة صغرى محلية عند س١، وقيمة عظمى محلية عند س٢، حيث س١ > س٢ . أثبت أن:

ثانيا : ق(س) متناقص على ح

أولا: ق(س) مقعر لأسفل على ح

الاقترانات المتزايدة والمتناقصة

متزايد $[-2, \infty)$ $\cup$ $[0, 2]$ متناقص $[2, 0]$ $\cup$ $[-\infty, -2]$	عين فترات التزايد والتناقص للاقتزان $ (س) - ٢  = ٤$	٢٠٠٧ إكمال
😊	بين أن $(س) = جاس - س$ متناقص على $[٠, \frac{\pi}{٣}]$ ومن ذلك أثبت أن: $جاس \geq س$ في نفس الفترة.	٢٠٠٨
😊	إذا كان الاقتزان $ق(س)$ كثير الحدود على $[٢, ٦]$ ويقع منحناه في الربع الأول ومتناقص على مجاله وكان الاقتزان $هـ(س) = ٨ - س$ ، بين أن الاقتزان $ك(س) = ق(س) \times هـ(س)$ متناقص في $[٢, ٦]$ .	٢٠٠٩
😊	إذا كان $ق(س) = جتاس - هـ(س) + س٣$ ، $س \in [٠, \frac{\pi}{٣}]$ أثبت أن: الاقتزان $ق(س) + هـ(س)$ متزايد في تلك الفترة.	٢٠١٠
أ	إذا كان $ق(س)$ ، $هـ(س)$ معرفان على $ح$ ، وكان $ق(س)$ متزايداً على $ح$ ، $ق(س) \neq ٠$ بحيث $ق(س) \times هـ(س) = ٧$ فإن إحدى العبارات التالية صحيحة دائماً  أ) $هـ(س)$ متناقص على $ح$ ب) $هـ(س)$ متزايد على $ح$ ج) $هـ(س)$ ثابت على $ح$ د) $ق(س) > هـ(س)$ على $ح$	٢٠١٢
😊	إذا كان $ق(س) = جاس + جتاس$ ، $س \in [٠, \frac{\pi}{٣}]$ ، أثبت أن $ق(س)$ متزايد على مجاله ومن ذلك أثبت أن: $جاس + جتاس \leq ١$ في تلك الفترة.	٢٠١٢
ج	الشكل المجاور يبين منحنى $ق(س)$ فإن مجموعة حل المتباينة $ق(س) < ٠$ صفر هي:  أ) $[١, ٣]$ ب) $[٢, \infty)$ ج) $[-٢, \infty)$ د) $[-١, ٣] \cup [٣, \infty)$  	٢٠١٥

القيم القصوى

د	للاقتزان $ق(س) = ٥ - ٢س$ قيمة عظمى في $[٣, ٠]$ عندما $س =$  أ) ١      ب) $\frac{٣}{٢}$ ج) $\frac{٥}{٢}$ د) صفر	٢٠٠٧
متزايد $س < ٠$ ، متناقص $س > ٠$ قيمة صغرى محلية $= ٠$ عند $س = ٠$	عين فترات التزايد والتناقص للاقتزان $ق(س) = \frac{س^٢}{س^٢ + ٢}$ ثم أوجد القيم القصوى له.	٢٠٠٧



٢٠٠٧ دراسات	أكبر قيمة يأخذها الاقتران ق(س) = جاس + ٣ لكل س $\exists$ ح هي ٢(أ)    ٣ (ب)    ٤- (ج)    ٤ (د)	د
٢٠٠٨ دراسات	$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2, \quad 1 - \text{س} \geq \text{س}^2 > 2 \\ \text{س} = 2, \quad 4 \end{array} \right\} = \text{إذا كان الاقتران ق(س)}$ <p>عَيِّن القيمة / القيم القصوى للاقتران على مجاله</p>	<p>صغرى محلية = ٠ عند س = ٠</p> <p>عظمى محلية = ١ عند س = -١</p> <p>عظمى محلية = ٤ عند س = ٢</p>
٢٠٠٨	جد القيم القصوى المحلية للاقتران $ق(س) = س^3 - ٣س^2 + ٦س$ ، س $\exists$ ح	<p>عظمى محلية = ٦ عند س = ٠</p> <p>صغرى محلية = ٢ عند س = ٢</p>
٢٠٠٨ إكمال	إذا كان للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عند س = ج فإن إحدى العبارات صحيحة دائما: أ) ق(ج) > ٠    ب) ق(ج) = ٠    ج) ق(ج) < ٠    د) ج، ق(ج) نقطة حرجة ل ق(س)	د
٢٠٠٩ م	إذا كان الاقتران ق(س) متصلا على $[٥, ١]$ ، ق(س) < ٠ لكل س $\exists$ $[٥, ١]$ فإن إحدى العبارات التالية صحيحة دائما: أ) لا يوجد ل ق(س) نقطة انعطاف في $[٥, ١]$ ب) ل ق(س) قيمة عظمى محلية عند س = ٥ ج) ق(س) مقعر للأعلى على $[٥, ١]$ د) ل ق(س) قيمة عظمى محلية عند س = ١	ب
٢٠١٠ م	إذا كان ق(س) معرفا على $[٣, ٠]$ ، ق(س) = (س-٢)(س+١) فإن مجموعة جميع قيم س التي يكون عند كل منها نقطة حرجة للاقتران ق(س) هي: أ) $\{٣, ٢, ١, ٠\}$ ب) $\{٣, ٠\}$ ج) $\{٢, ١\}$ د) $\{٣, ٢, ٠\}$	د
٢٠١٠ م	إذا كان ق(س) = جاس + جتاس، س $\exists$ $[٣, ٠]$ فجد: ١- مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) ٢- الإحداثيات السينية لنقاط القيم العظمى والصغرى للاقتران ق(س)	<p>متزايد على <math>[٣, ٠]</math>، <math>\frac{\pi}{4}</math></p> <p>متناقص على <math>[\pi, \frac{\pi}{4}]</math></p> <p>س = ٠، <math>\frac{\pi}{4}</math>، <math>\pi</math></p>

٢٠٠٩ إكمال	إذا كان ق(س) معرفاً على $[٤,٠]$ ، $٧(س)' = \frac{س + ٢}{س + ١}$ فإن مجموعة الإحداثيات السينية للنقط الحرجة : أ) $\{٢-، ٠، ١، ٤\}$ ب) $\{٢-، ١\}$ ج) $\{٤، ٠\}$ د) $\{٢-\}$	ج
٢٠٠٩ إكمال	$٧(س) = س٣ - س٢$ وكان لمنحنى ق(س) قيمة قصوى عند $س=١$ فإن $أ=$ أ) ٢ ب) ٣- ج) ٣ د) ٢-	ج
٢٠١٠	إذا كان $٧(س) = \frac{س}{س٢ + ١}$ فجد : ١- فترات التزايد والتناقص للاقتزان ق(س) ٢- القيم الصغرى المحلية للاقتزان ق(س)	متزايد على $[-١، ١]$ متناقص $[-١، ٠]$ $\cup$ $[١، \infty)$ قيمة صغرى $= \frac{١}{٣}$ عند $س=١$
٢٠١١	جد مجالات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية للاقتزان $٧(س) = \frac{س + ١}{س٣ + ٢س}$	متزايد على $[-٣، ١]$ متناقص $[-٣، ٠]$ $\cup$ $[١، \infty)$ صغرى $= \frac{١}{٣}$ ، عظمى $= \frac{١}{٣}$
٢٠١٢	ق(س) معرف على ج، $٧(س)' = \frac{س٣ + ٢س}{(س + ١)٢}$ فإن عدد النقط الحرجة ل ق(س) أ) ٠ ب) ١ ج) ٢ د) ٣	ج
٢٠١٣	ق(س) $= [س-٤، س] \ni [٢، ٠]$ فإن جميع قيم س التي يكون عندها نقط حرجة ل ق(س): أ) ٢، ٠ ب) $[٢، ٠]$ ج) $[٢، ٠]$ د) ٢، ١، ٠	ب
٢٠١٣	القيمة الصغرى المطلقة للاقتزان $٧(س) = س٣ - س٣$ في الفترة $[-٣، ١]$ هي: أ) ١٨- ب) ٢- ج) ٣٦- د) ٣-	أ
٢٠١٤	إذا كان $٧(س) =  س-٢  - س٥$ ، $\ni [٢، ٢-]$ ، فإن القيمة المطلقة العظمى للاقتزان ق(س) في مجاله هي: أ) ١ ب) ١- ج) ٥- د) ٩-	ب

د	إذا كان ق(س) متصلا على $[٣, ١]$ ، ق(س) > صفر لجميع قيم $s \in [٣, ١]$ ، ق(س) له ثلاث نقاط حرجة فقط في $[٣, ١]$ وكان ق(٢) = صفر فإن أ) ق(٢, ٥) < صفر ب) ق(٢, ٥) < ق(٢) ج) ق(٢, ٥) = ق(٢) د) ق(٢, ٥) > ق(٢)	٢٠١٤
---	--	------


### التعر وتقط الانعطاف

مقعر لأعلى $]-\infty, ٠]$ مقعر لأسفل $]-\infty, ٠]$ (٢, ٠) نقطة انعطاف	حدد فترات التعر لأعلى ولأسفل للاقتزان $u(s) = s^3 - s^2 + ٢$ ثم جد نقطة الانعطاف إن وجدت.	٢٠١٤
أ	يقع الاقتران فوق جميع مماساته عندما يكون الاقتران : أ) مقعرا لأعلى ب) مقعرا لأسفل ج) متزايدا د) متناقصا	٢٠٠٧ دراسات
أ	إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثانية فإن الاقتران ق(س): أ) لا توجد له نقط انعطاف ب) توجد له نقطة انعطاف واحدة ج) توجد له نقطتنا انعطاف د) توجد له نقطة انعطاف واحدة على الأقل	٢٠٠٧ دراسات
د	إذا كان $u(s) = s s $ فإن: أ) ق(٠) غير موجودة ب) ق(٠) قيمة عظمى ج) ق(٠) قيمة صغرى د) (٠, ٠) نقطة انعطاف	٢٠٠٧ دراسات
ب	إذا كانت النقطة (٢, ١) نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران ق(س) وكانت $u'(s) = s^3 - s^2$ حيث ل ثابت فإن ل = أ) ٤ ب) ٦ ج) ١٢ د) ٢٤	٢٠٠٧ إكمال
ج	إذا كان ق(س) معرفا على $[-١, ١]$ ، ق(س) موجودة في $[-١, ١]$ ، توجد نقطة انعطاف عند $s=٠$ فإن إحدى العبارات التالية صحيحة دائما أ) ق(س) مقعر لأسفل على $[-١, ٠]$ ولأعلى على $[٠, ١]$ ب) ق له نقطة حرجة في $[-١, ١]$ ج) ق له نقطة حرجة في $[-١, ١]$ د) ق له نقطة حرجة في $[-١, ١]$	٢٠٠٨
	جد مجالات التعر لأعلى ولأسفل للاقتزان ق(س) = $s^3 - ٣s$ جاس جتاس في $[\pi, ٠]$ لأسفل $[\frac{\pi}{٢}, ٠]$ ، لأعلى $[\frac{\pi}{٢}, \pi]$	٢٠٠٨

متزايد $[-\infty, 0]$ $\cup$ $[4, \infty)$ متناقص $[0, 4]$ لأسفل $[-\infty, 2]$ ، لأعلى $[2, \infty)$	إذا كان $U(s) = s^3 - 3s^2$ ، جد: ١- مجالات التزايد والتناقص للاقتزان $Q(s)$ ٢- مجالات التفرع لأعلى ولأسفل للاقتزان $Q(s)$	إكمال ٢٠٠٨
$[-3, 3]$	$Q(s)$ معرف على $H$ ، $U'(s) = \frac{s}{s^2 + 9}$ ، جد التفرع لأعلى ل $Q(s)$	٢٠٠٩
متناقص $[-2, 2]$ ، متزايد $[-2, 2]$ لأعلى $[0, \infty)$ ، لأسفل $[-\infty, 0]$	للاقتزان $U(s) = s^3 - 3s^2 - 2s + 3$ ، جد: ١- مجالات التزايد والتناقص والقيم القصوى ٢- مجالات التفرع للاقتزان $Q(s)$	٢٠٠٩ إكمال
ب	$Q(s)$ له قيمة عظمى واحدة، $Q'(1) = 0$ ، $Q'(3) = -3$ ، $Q'$ يمر بالنقطة $(1, -2)$ ، القيمة العظمى هي: (أ) $-3$ (ب) $-2$ (ج) $0$ (د) $1$	٢٠١٠
لأعلى $[-\infty, 2]$ $\cup$ $[2, \infty)$ لأسفل $[-2, 2]$ نقاط الانعطاف عند $s = -2, 2$	معتمدا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $Q'(s)$ جد: ١- مجالات تفرع $Q(s)$ لأعلى ولأسفل ٢- الإحداثيات السينية لنقط الانعطاف	٢٠١٠
صغرى محلية $= \frac{10}{4}$ عند $s = 3$ لأسفل $[0, 2]$ ، لأعلى $[-2, \infty)$	إذا كان $U(s) = \frac{1}{4}s^4 - s^3 + 2$ ، فجد: ١- القيم القصوى للاقتزان $Q(s)$ ٢- مجالات التفرع للاقتزان $Q(s)$	٢٠١٠ إكمال
ب	إذا كانت $Q'(1) = 0$ وكانت $Q'(3) = 0$ وكانت $Q'(s) < 0$ في الفترة $[-2, 2]$ فإن: (أ) $Q'(1)$ عظمى محلية (ب) $Q'(1)$ صغرى محلية (ج) $Q'(3)$ عظمى محلية (د) $Q'(3)$ صغرى محلية	٢٠١١
د	إذا كان للاقتزان $U(s) = s^3 + s^2$ نقطة انعطاف عند $s = -1$ فإن $A =$ (أ) $-3$ (ب) $-\frac{3}{2}$ (ج) $\frac{3}{2}$ (د) $3$	٢٠١١
لأسفل $[2, 3]$ ، لأعلى $[-3, 2]$ $s = 2, 3$	إذا كان $U(s) = s^4 - s^3 + 3s^2 + 3$ ، جد: ١- مجالات التفرع للاقتزان $Q(s)$ ٢- الإحداثيات السينية لنقط الانعطاف	٢٠١١

عظمى ق(٠) = ٠ ، صغرى ق(٢) = -٤ لأعلى [١، ٠٠] ، لأسفل [-٠، ٠٠]	للاقتزان $١(س) = س^٢ (س - ٣)$ ، جد : ١- القيم القصوى المحلية ٢- مجالات التقعر للأعلى وللأسفل	٢٠١٢
متزايد [٠، ٠٠] ، متناقص [-٠، ٠٠] لأعلى [١، ١-] لأسفل ح- [١، ١-] س = -١، ١	إذا كان $١(س) = \frac{س}{س^٢ + ١}$ فجد : ١- فترات التزايد والتناقص للاقتزان ق(س) ٢- مجالات التقعر للاقتزان ق(س) ٣- الإحداثيات السينية لنقاط الانعطاف	٢٠١٢
صغرى ق(٠) = -١ ، عظمى ق(٣) = $\frac{\pi}{٣}$ لأعلى $[\frac{\pi}{٤}، ٠]$ لأسفل $[\frac{\pi}{٣}، \frac{\pi}{٤}]$	للاقتزان $١(س) = جا^٢ س - جتا^٢ س$ ، $س \in [٠، \frac{\pi}{٣}]$ ، جد : ١- القيم العظمى والصغرى المحلية ٢- فترات التقعر للاقتزان ق(س)	٢٠١٣

إن لم تستطع قول الحق فلا تصفق للباطل

	 <p>الشكل المجاور يمثل جزءاً من منحنى الاقتزان كثير الحدود ق(س) فإذا كان م(س) = ق(س) × ق'(س) ، بيّن أن : م(ج) &lt; صفر</p>	٢٠١٣
صغرى ق(٣) = -١٣، ٥ لأسفل [-٢، ٠] ، لأعلى ح- [-٢، ٠]	إذا كان $١(س) = \frac{١}{٣} س^٤ + ٢ س^٣ - ٣ س$ ، فجد : ١- القيم الصغرى والعظمى المحلية للاقتزان ق(س) ٢- فترات تقعر ق(س) لأعلى ولأسفل	٢٠١٣ أكمل
$١(س) = \frac{١}{٤} س^٣ - ٣ س^٢ + ٣ س$	إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة ، جد قاعدة الاقتزان ق(س) إذا علمت أن (٢، -١) نقطة قيمة صغرى محلية أن (٣، ٠) نقطة انعطاف للاقتزان ق(س).	٢٠١٤
ب	<p>إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) فإن نقطة انعطاف منحنى ق(س) هي :</p>  <p>أ) (١، -٢) ب) (١، ق(١)) ج) (٣، ٠) د) (١، -٠)</p>	٢٠١٤

متزايد على $[1, 3]$ ، متناقص حـ $[1, 3]$	إذا كان $١ (س) = ٣س^٢ - ٩س$ فجد:	٢٠١٤ إكمال صفة
لأعلى $[-\infty, ٢]$ ، لأسفل $[٢, \infty)$	١- مجالات التزايد والتناقص للاقتزان ق(س) ٢- مجالات التقعر ونقط الانعطاف للاقتزان ق(س)	
متزايد على $[٠, \frac{\pi}{٣}]$	إذا كان $١ (س) = ٢ + جا^٢ س$ ، $س \in [٠, \frac{\pi}{٣}]$ جد:	٢٠١٤ إكمال غرة
لأعلى $[٠, \frac{\pi}{٤}]$ ، لأسفل $[\frac{\pi}{٤}, \frac{\pi}{٣}]$	١- مجالات التزايد والتناقص للاقتزان ق(س) ٢- مجالات التقعر لأعلى ولأسفل لمنحنى ق(س)	
د	(١، ٠) هي نقطة انعطاف لمنحنى أحد الاقتزانات التالية: أ) $١ (س) = ٢س + ١$ ب) $١ (س) = ١ - س^٤$ ج) $١ (س) = ١ + س^٤$ د) $١ (س) = ١ + س^٣$	٢٠١٤ إكمال غرة
أ	إذا كان لمنحنى الاقتزان ق(س) $٣س^٣ + ٢س - ٩س$ نقطة انعطاف عند $س = -١$ فإن م = أ) ٣ ب) ٦ ج) -٣ د) -٤	٢٠١٥
متزايد $[-\infty, ١]$ ، متناقص $[١, \infty)$	إذا كان ق(س) $٤س^٣ - ٣س^٢ + ٣س$ ، أوجد: ١- مجالات التزايد والتناقص للاقتزان ق(س) ٢- القيم القصوى المحلية للاقتزان ق(س) ٣- مجالات التقعر لأعلى ولأسفل للاقتزان ق(س)	٢٠١٥
عظمى محلية ق(١) = ١		
لأسفل $[-\infty, ٠]$ ، $[\frac{٢}{٣}, \pi]$ لأعلى $[٠, \frac{٢}{٣}]$		

#### رسم المنحنيات

عظمى ق(٠) = ٠، صغرى ق(٢) = -٤ انعطاف (١، -٢)	إذا كان $١ (س) = ٣س^٣ - ٣س^٢$ ، فجد: ١- القيم القصوى المحلية للاقتزان ق(س) ٢- نقطة/نقط الانعطاف ٣- ارسم الشكل العام لمنحنى الاقتزان	٢٠١١ إكمال
عظمى محلية = ٠، صغرى محلية = -٤	إذا كان ق(س) $=(١+س)^٢(٢-س)$ ، فجد: ١- القيم القصوى المحلية للاقتزان ق(س) ٢- فترات التقعر لأعلى ولأسفل للاقتزان ق(س) ٣- ارسم منحنى الاقتزان ق(س)	٢٠١٢

## قوانين تهمك في الموضوعين التاليين

الشكل	المحيط	المساحة	الحجم
المثلث	مجموع أطوال أضلاعه	$\frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$ $\frac{1}{2} \times \text{حاصل ضرب أي ضلعين} \times \text{جيب الزاوية المحصورة}$	
المربع	4ل	ل <sup>2</sup> $\frac{1}{2} \times \text{حاصل ضرب القطرين}$	
المستطيل	2(س+ص)	الطول × العرض	
متوازي الأضلاع	2(س+ص)	القاعدة × الارتفاع حاصل ضرب أي ضلعين متجاورين × جيب الزاوية المحصورة	
المعين	4ل	القاعدة × الارتفاع ل <sup>2</sup> × جيب إحدى زواياه (ل: طول الضلع) $\frac{1}{2} \times \text{حاصل ضرب القطرين}$	
الدائرة	2π نق	π نق <sup>2</sup>	
القطاع الدائري	ل + 2نق (ل: طول القوس)	$\frac{1}{2} \times \text{ل} \times \text{نق}$ $\frac{1}{2} \times \text{هـ} \times \text{نق}$	
الاسطوانة		2π نق ع (الجانبية) 2π نق ع + 2π نق <sup>2</sup> (الكلية)	π نق <sup>2</sup> ع
الكرة		4π نق <sup>2</sup>	$\frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$
المخروط القائم		π نق ل (الجانبية) ل: طول الراسم π نق ل + 2π نق <sup>2</sup> (الكلية)	$\frac{1}{3} \pi \text{ نق}^2 \text{ ع}$
متوازي المستطيلات		2(س+ص+ع) (س ص ع)	س ص ع

## ورقة عمل (١٥)

### تطبيقات على القيم القصوى:

١- قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها ٦٠٠ م. أوجد بعديها لتكون مساحتها أكبر ما يمكن . البعدان { ١٥٠ ، ١٥٠ }

٢- قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ٤٠٠ م<sup>٢</sup> . ما أقل محيط ممكن للقطعة ؟ المحيط = ٨٠ م

٣- عدنان وموجبان مجموعهما ٢٠ . جد العددين بحيث أولاً: مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن العددان ( ١٠ ، ١٠ )

ثانياً: حاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن. العددان ( ٤/٣ ، ٢/٣ )

٤- جد الإحداثي السيني للنقطة التي عندها ميل المماس لمنحنى  $U(s) = \frac{1}{3}s^3 - 3s^2 - 4s$  أقل ما يمكن .  $s=3$

٥- يتحرك جسم في خط مستقيم وفق العلاقة  $U = 2t^3 - 8t^2 + 6t + 30$  ، حيث  $U$  المسافة بالأمتر ،  $t$  الزمن بالثواني.

جد أقل تسارع لهذا الجسم . التسارع =  $-92 \text{ م/ث}^2$

٦- جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث يكون أحد بعديه منطبقاً على محور السينات ورأساه الآخران يقعان على منحنى الاقتزان

$s=2$  ، المساحة = ٣٢ وحدة مربعة  $s=12-2$

٧- جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث يكون أحد بعديه منطبقاً على محور السينات ورأساه الآخران يقعان على منحنى الاقتزان

$s=4$  ، المساحة = ٣٢ وحدة مربعة  $U(s) = 8 - 2s + 4s^2$

٨- أ ب ج د مستطيل يقع رأساه أ ، ب على منحنى  $U(s) = 2s^2$  ، ورأساه ج ، د على منحنى  $H(s) = 36 - 2s$  . جد بعدي

المستطيل لتكون مساحته أكبر ما يمكن .  $s=2$  ، البعدان ٤ ، ٢٤

٩- أ ب ج د مستطيل يقع رأساه ب ، ج على محور السينات منحنى ، والرأس أ في الربع الأول على منحنى  $H(s) = 12 - \frac{s^2}{4}$  والرأس د في

الربع الثاني على منحنى  $U(s) = 12 - 2s$  . جد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل. المساحة = ٤٨ وحدة مربعة

١٠- مثلث متساوي الساقين مرسوم فوق محور السينات بحيث يقع رأسه في نقطة الأصل والرأسان الآخران على منحنى الاقتزان  $U(s) = 27 - 2s$  .

جد أكبر مساحة لهذا المثلث .  $s=3$  ، المساحة = ٥٤ وحدة مربعة

١١- جد أكبر مساحة ممكنة لشبه منحرف يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث تكون إحدى قاعدتيه على محور السينات وجميع رؤوسه على منحنى الاقتزان

$U(s) = 9 - 2s$  ، المساحة = ٣٢ وحدة مربعة  $s=1$



١٢- جد أكبر مساحة لمستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ١٠ سم . المساحة = ٢٠٠ وحدة مربعة

١٣- قطاع دائري محيطه ٢٠ م ، جد نصف قطر دائرته لتكون مساحة القطاع أكبر ما يمكن . نق = ٥

١٤- مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ٨ سم وارتفاعه ١٠ سم ، يراد اقتطاع مستطيل منه بحيث يقع رأسان منه على قاعدة المثلث والرأسان الآخران على ساقى المثلث. جد بعدي المستطيل لتكون مساحته أكبر ما يمكن . ( البعدان ٤ ، ٥ )

١٥- جد معادلة المستقيم المار بالنقطة ( ٢ ، ٣ ) بحيث يصنع مع الخورين في الربع الأول مثلثا مساحته أصغر ما يمكن . ( ٢ ص + ٣ س - ١٢ = ٠ )

١٦- جد ارتفاع الأسطوانة الدائرية القائمة ذات أكبر حجم والتي يمكن رسمها داخل مخروط دائري قائم نصف قطره ٥ سم، وارتفاعه ٩ سم. ( الارتفاع = ٣ سم )

١٧- برهن أن أكبر حجم للأسطوانة الدائرية القائمة يمكن رسمها داخل مخروط دائري قائم يساوي  $\frac{4}{9}$  حجم المخروط .

١٨- جد نصف قطر قاعدة مخروط دائري قائم يمكن رسمه داخل كرة نصف قطرها ٩ سم بحيث يكون حجمه أكبر ما يمكن . ( نصف القطر =  $\sqrt{2}$  سم )

١٩- جد ارتفاع الأسطوانة الدائرية القائمة ذات أكبر حجم التي يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها ٣ سم. ( الارتفاع = ٦ سم )

٢٠- قطعة خشب على شكل اسطوانة دائرية مساحتها الجانبية  $\pi ٤٠٠$  سم<sup>٢</sup> . حفر في هذه القطعة نصف كرة طول قطرها مساو لطول قطر قاعدة الاسطوانة . جد طول قطر قاعدة الأسطوانة الذي يجعل حجم الجزء المتبقي من الأسطوانة أكبر ما يمكن . ( نق = ١٠ سم )

٢١- مستطيل طول قطره ١٠ سم ، إذا دار المستطيل دوره كاملة حول أحد اضلاعه فاحسب أكبر حجم ممكن للأسطوانة الناشئة . الحجم =  $\frac{\pi ٢٠٠}{3}$  سم<sup>٣</sup>

٢٢- لوح من الصفائح على شكل مستطيل محيطه ٣٦ سم، طوله س سم وعرضه ص سم . إذا حوّل هذا اللوح إلى اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ص ومحيط قاعدتها س فجد قيمتي س ، ص اللتين تجعلان حجم الأسطوانة أكبر ما يمكن . ( س = ١٢ ، ص = ٦ )

٢٣- مثلث قائم الزاوية طول وتره ٩ سم وطول كل من ضلعي القائمة س ، ص سم . إذا دار المثلث دورة كاملة حول أحد ضلعي القائمة فما أكبر حجم ممكن للمخروط الناشئ؟ الحجم =  $٥٤ \sqrt{3} \pi$  سم<sup>٣</sup>

٢٤- إذا دارت صفيحة على شكل مثلث متساوي الساقين محيطه ٤٠ سم دورة كاملة حول قاعدتها فما أكبر حجم ممكن للجسم الناشئ؟ الحجم =  $\frac{\pi ٢٠٠٠}{3}$

٢٥- قطاع دائري زاويته المركزية بالتقدير الدائري ه ونصف قطر دائرته نق حوّل إلى مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته س وارتفاعه ع. ما قيمة ه التي تجعل للمخروط الناتج أكبر حجم ممكن؟ ه =  $\pi ٢ \sqrt{\frac{2}{3}}$

٢٦- صفيحة مستطيلة الشكل مساحتها ٥٠ سم<sup>٢</sup> يراد طباعة إعلان عليها فإذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها ١ سم ، وفي كل من الجانبين  $\frac{1}{3}$  سم . جد بعدي الورقة لتكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن . س = ٥ ، ص = ١٠

٢٧- جد النقطة على منحنى  $U(s) = \sqrt{8s}$  التي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة ( ٤ ، ٢ ) ( النقطة ( ٢ ، ٤ )

٢٨- بدأت نقطة مادية الحركة من النقطة ( ٨ ، ٠ ) باتجاه نقطة الأصل بسرعة ٤ سم/ث ، وفي نفس اللحظة بدأت نقطة أخرى الحركة على محور السينات من النقطة ( ٠ ، ١٠ ) على محور الصادات مبتعدة عن نقطة الأصل بسرعة ٢ سم/ث. متى يكون البعد بين النقطتين أقل ما يمكن ؟ ( ن = ٦ ، ٠ )

٢٩- لدى رجل حقل مستطيل يريد إحاطته بسياج ثم قسمته إلى ثلاثة أقسام بسياجين يوزيان أحد أضلاعه، فإذا كان لديه ١٠٠٠ م من السياج فأوجد أكبر مساحة يمكن إحاطتها بالسياج.

$$\text{المساحة} = ٣١٢٥٠ \text{ م}^2$$

٣٠- أ ب ج د شبه منحرف فيه ثلاثة أضلاع متساوية طول كل منها ٢٠ سم. جد طول الضلع الرابع لشبه المنحرف الذي يجعل مساحة شبه المنحرف أكبر ما يمكن.

$$(\text{طول الضلع الرابع} = ٤٠ \text{ سم})$$

٣١- مثلث طولاه ضلعين فيه ٥ سم، ٧ سم والزوايا المحصورة بينهما قياسها هـ. جد قياس هـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

$$هـ = \frac{\pi}{4}$$

٣٢- دائرة قطرها  $\overline{AB}$  طوله ٤ سم، بدأت النقطة ب الحركة على الدائرة من ب باتجاه أ جد قياس  $\angle AB$  التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

$$هـ = \frac{\pi}{4}$$

٣٣- قطاع دائري محيطه ٢٠ م، فجد نصف قطر دائرته بحيث تكون مساحة القطاع أكبر ما يمكن.

$$\text{نق} = ٥ \text{ سم}$$

٣٤- مستقيم يمر بالنقطة ج (١، ٢) ويقطع محور السينات في النقطة أ (س، ٠) ومحور الصادات في ب (٠، ص) حيث  $٠ < ص < ٠$ . جد أقل مساحة ممكنة للمثلث أ ب و حيث و نقطة الأصل.

$$س = ٢، \text{المساحة} = ٤ \text{ سم}^2$$

٣٥- صندوق بلا غطاء على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل حجمه ٣٢ سم<sup>٣</sup>، جد أبعاد الصندوق لتكون كمية المادة المستخدمة في صنعه أقل ما يمكن.

$$\text{الأبعاد} = ٤، ٤، ٢ \text{ سم}$$

٣٦- يراد صنع صندوق من الخشب الرقيق بدون غطاء على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل. جد أكبر حجم ممكن للصندوق بحيث تبلغ تكاليف صناعته ١٤٤ ديناراً علماً بأن تكلفة المتر المربع الواحد من الخشب ٣ دنانير.

$$\text{الحجم} = ٣٢ \text{ سم}^3$$

٣٧- احسب أكبر حجم لاسطوانة دائرية قائمة مغلقة القاعدتين يمكن صنعها من صفيحة معدنية مساحتها ٦٠٠  $\pi$  سم<sup>٢</sup>. الحجم = ٢٠٠٠  $\pi$  سم<sup>٣</sup>.

$$\text{الحجم} = ٢٠٠٠ \pi \text{ سم}^3$$

٣٨- جد أقل كمية من المعدن اللازم لصنع مكبال للزيت على شكل أسطوانة دائرية قائمة مغلقة القاعدتين سعتها ٢٠٠٠  $\pi$  سم<sup>٣</sup>. الكمية = ٦٠٠  $\pi$  سم<sup>٢</sup>.

$$\text{الكمية} = ٦٠٠ \pi \text{ سم}^2$$

٣٩- خزان ماء اسطواني الشكل سعته ٣٠٠٠  $\pi$  م<sup>٣</sup> يكلف المتر المربع من القاعدة ٤ دنانير ومن الجوانب دنانيرين، غطاء الخزان على شكل نصف كرة جوفاء يكلف المتر المربع منها دينار واحد. ما أبعاد الخزان لتكون كلفة صنعه أقل ما يمكن؟

$$\text{نق} = ١٠، ع = ٣٠$$

٤٠- يراد إقامة سياج حول قطعة أرض على شكل مستطيل ينتهي بنصفي دائرة، فإذا كانت تكلفة المتر الواحد من السياج على الجانبين المستقيمين ٤ دنانير وعلى الأجزاء المنحنية ٦ دنانير. ما أكبر مساحة ممكنة يمكن إحاطتها بسياج تكلفته ٤٠٠ دينار؟

$$\text{المساحة} = \frac{١٢٥٠}{\pi} \text{ م}^2$$

٤١- إذا كانت تكلفة (س) من الوحدات التي ينتجها مصنع شهرياً هي (٣س + ٦٥٠) وكان سعر الوحدة الواحدة (٣٠ - ١، ٥ س)، فجد عدد الوحدات (س) اللازم إنتاجها ليكون الربح أكبر ما يمكن.

$$س = ٩$$

٤٢- وجد مصنع أن التكلفة الكلية بالدينار للإنتاج الأسبوعي لغرفة نوم عددها س تقدر بالاقتران لـ (س) = س<sup>٣</sup> - ٣س<sup>٢</sup> - ٨٠س + ٥٠٠.

$$٥٠٠ + ٨٠س - ٣س^2 - س^3$$

فإذا بيعت كل غرفة نوم بسعر ٢٨٠٠ دينار. فما الإنتاج الأسبوعي للمصنع الذي يجعل الربح أكبر ما يمكن؟

$$\text{الإنتاج} = ٣٢ \text{ غرفة}$$

٤٣- يبيع مصنع (س) من سلعة ما بسعر ٣٠ دينار لكل وحدة، فإذا كان الربح اليومي يعطى بالعلاقة ٤٠س - س<sup>٢</sup> - ١٠٠ فجد عدد الوحدات اللازم إنتاجها حتى تكون التكلفة اليومية أقل ما يمكن؟

$$س = ٥$$

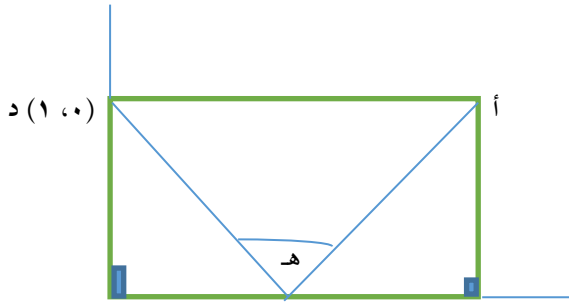
٤٤- اتفقت إحدى المدارس مع شركة سياحية على تسيير رحلة إلى القدس بأن يدفع كل طالب ٦٥ دينار إذا كان عدد الطلاب ١٠٠ طالب، وإذا زاد عدد الطلاب عن ١٠٠ فإن الشركة تخفض نصف دينار عن كل مشترك جديد. جد عدد المشتركين ليكون إيراد الشركة أكبر ما يمكن.

١٦٥ طالب

٤٥- أعد حل السؤال السابق بعد حذف كلمة " جديد "

٤٦- أ ب و د مستطيل (كما هو موضح بالشكل)

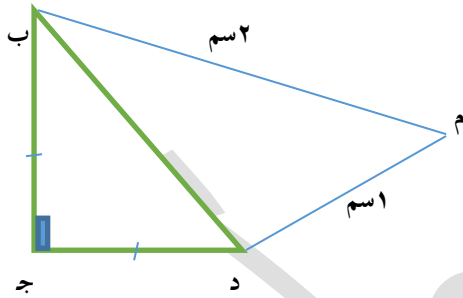
ما طول  $\overline{ج و}$  ليكون قياس ه أكبر ما يمكن ؟



( طول  $\overline{ج و} = ١$  )

ب (٠، ٢) ج و (٠، ٠)

٤٧- في الشكل : ج د = ب ج ، زاوية ج قائمة ، م ب ثابت وطوله = ٢سم ، م د يدور في مستوى الشكل وطوله ثابت = ١سم



جد قياس زاوية ب م د

لتكون مساحة الشكل الرباعي

أكبر ما يمكن .

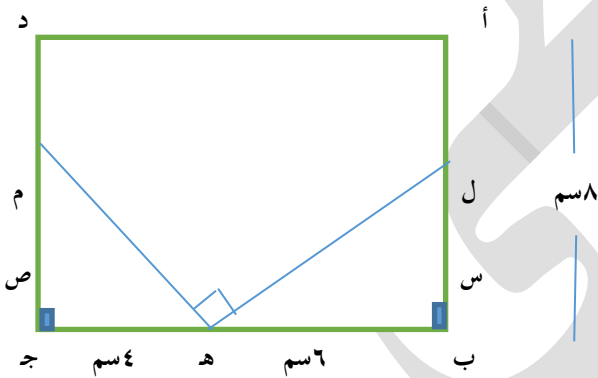
( ١٣٥ ° )

٤٨- أ ب ج د مستطيل ، أ ب = ٨سم ، ب ج = ١٠سم ، ه ب = ٦سم ، ل ب = ٤سم ، م ج = ٤سم ، زاوية ل ه م قائمة (كما بالشكل)

ما قيمة كل من س، ص

لتكون مساحة الشكل أ ل ه م د

أكبر ما يمكن ؟



٤٩- أ ب ج د مستطيل

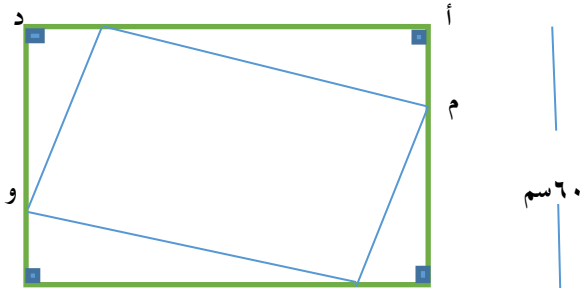
أب=٦٠سم ، ب ج=٨٠سم

م ن و ل متوازي الأضلاع

ب ن=س (كما بالشكل)

ما قيمة س التي تجعل مساحة متوازي الأضلاع

أكبر ما يمكن علما بأن م ب=٢ ب ن؟



ب ن ج  
\_\_\_\_\_ ٨٠سم

(٥ ، ٢٧سم)

٥٠- أ (٠ ، ٤) ، ب (٠ ، ٩) نقطتان ثابتتان ، ج نقطة تتحرك على محور السينات الموجب . جد الإحداثي السيني للنقطة ج الذي يجعل قياس زاوية أ ج ب أكبر ما يمكن .

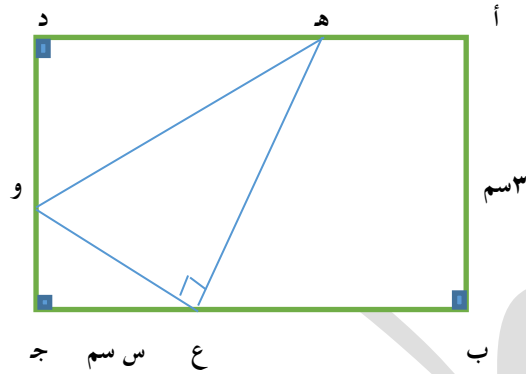
س=٦

٥١- في الشكل: أ ب ج د مستطيل

أب=٣سم ، طويت الزاوية أ د ج وفق الخط وه حتى انطبق الرأس د على المستقيم ب ج

في النقطة ع . ع ج = س سم

جد أكبر مساحة ممكنة للمثلث و ج ع .



( س = ٣ ، المساحة =  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$  )

٥٢- أ ب ج د مستطيل (كما بالشكل)

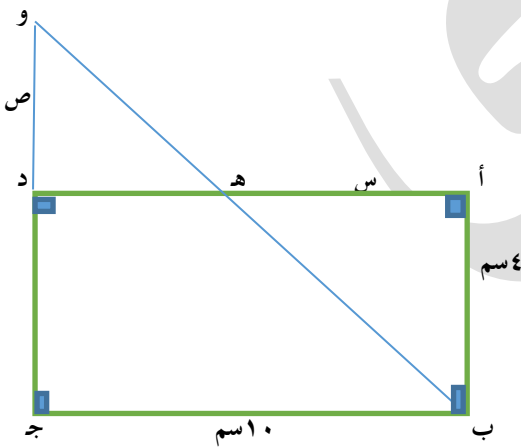
أب=٤سم ، ب ج=١٠سم

مد الضلع ج د على استقامته إلى و

وصل ب و فقطع أ د في ه

أ ه=س ، د و=ص

جد قيمتي س ، ص ليكون مجموع مساحتي المثلثين د ه و ، أ ه ب أصغر ما يمكن.



( س = ٥ ، ص = ٤ (١ -  $\sqrt{2}$ ) )

السنة	السؤال	الجواب
٢٠٠٧	أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ١٠ سم.	٢٠٠
٢٠٠٧ دراسات	مثلث متساوي الساقين محيطه ١٨ سم ، أوجد أطوال أضلاعه عندما تكون مساحته أكبر ما يمكن.	٦، ٦، ٦
٢٠٠٧	<p>معتمدا على الشكل المجاور ، جد بعدي المستطيل ذي المساحة الكبرى الذي يمكن رسمه داخا مثلث قائم الزاوية بحيث ينطبق أحد أضلاع هذا المستطيل على أحد ضلعي القائمة في المثلث ورأساه الآخران على ضلعي المثلث الآخرين.</p> 	ب ، $\frac{1}{3}ب$
إكمال ٢٠٠٨	<p>جد بعدي المستطيل الواقع في الربع الأول والذي مساحته أكبر ما يمكن بحيث تنطبق قاعدته الكبرى على محور السينات ويقع رأساه الآخران على منحنى <math>٩(س) = ٤س - س^٢</math></p>	٢ $\sqrt{٤}$ ، ٤
٢٠٠٩	جد أقصر مسافة بين النقطة (٦، ٠) ومنحنى $٢س - ص^٢ = ١٦$	$\sqrt{٣٤}$
٢٠٠٩ إكمال	جد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطة (٤، ٢) ويصنع مع المحورين الإحداثيين في الربع الأول مثلثا مساحته أصغر ما يمكن .	-٢
٢٠١٠	<p>يراد صنع وعاء معدني على هيئة أسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى سعتها ٨١ <math>\pi</math> سم<sup>٣</sup> ، فإذا كانت تكلفة المواد المستعملة ٣ دنانير لكل سم<sup>٢</sup> من قاعدة الأسطوانة ، ودينارا واحدا لكل سم<sup>٢</sup> من سطحها الجانبي . جد أبعاد الأسطوانة التي تجعل تكاليف صنعها أقل ما يمكن.</p>	<p>نق = ٣</p> <p>ع = ٩</p>
٢٠١١	جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٤، ٣) ويصنع مع المحورين الإحداثيين في الربع الأول مثلثا مساحته أصغر ما يمكن.	$ص = \frac{٤}{٣}س + ٨$
٢٠١١ إكمال	ثني سلك طوله ١٢ سم ليكون مثلثا متساوي الساقين، جد أطوال أضلاع هذا المثلث لتكون مساحته أكبر ما يمكن.	٤، ٤، ٤
٢٠١٢	جد الإحداثي السيني للنقطة الواقعة على منحنى العلاقة: $٢ - ٢ص + ٤س - ٢٣ = ٠$ وتكون أقرب ما يمكن للنقطة (١، ٣) .	س = ٥
٢٠١٣	<p>جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث يقع رأسان من رؤوسه على محور السينات والرأسان الآخران على منحنى الاقتران <math>٩(س) = ٨ - \frac{٢}{٣}س^٢</math></p>	$\frac{٦٤}{٣}$
٢٠١٤	أوجد باستخدام التفاضل أكبر حجم للشكل الناتج من دوران مستطيل محيطه (٦٠) سم دورة كاملة حول أحد أضلاعه	$٤٠٠٠ \pi$ سم <sup>٣</sup>

$\frac{\sqrt{3}}{2}$	جد أقرب نقطة على منحنى $\sqrt{s-1}$ إلى النقطة أ(٢، صفر)	٢٠١٤ إكمال غزة
$\sqrt{1.0}$	أوجد أقرب مسافة بين النقطة (٠، ٢) ومنحنى العلاقة $s^2 - 8 = 0$	٢٠١٥
المربع ٦ سم المستطيل سم ١٢، ٤	سلك طوله ٥٦ سم ، قُسم إلى جزأين صُنِع من أحدهما مربع ومن الآخر مستطيل طوله يساوي ثلاثة أمثال عرضه ما أبعاد كل من المربع والمستطيل ليكون مجموع مساحتهما أقل ما يمكن	٢٠١٥ إكمال



## ورقة عمل (١٦)

### المعدلات الزمنية المرتبطة:

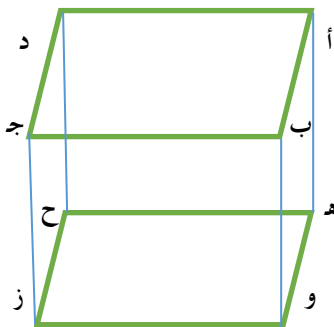
- ١- يسير رجل بمعدل ٤م/د نحو عمود ارتفاعه ٢٠م. ما معدل تغير المسافة بينه وبين قمة العمود عندما يكون على بعد ١٥م من قاعدة العمود؟ (-٢,٤م/د)
- ٢- سلم طوله ٥م يرتكز بطرفه العلوي على حائط عمودي وبطرفه السفلي على أرض أفقية، إذا انزلق الطرف السفلي مبتعدا عن الحائط بمعدل ٢م/ث فجد معدل انخفاض الطرف العلوي عندما يكون الطرف السفلي على بعد ٣م من الحائط. (-١,٥م/ث)
- ٣- سلم طوله (ل) متر يرتكز على حائط رأسي، انزلق الطرف الملامس للأرض مبتعدا عن الحائط بمعدل ١/٥ م/ث. احسب سرعة هبوط أعلى السلم عندما يكون السلم مائلا بزاوية مقدارها ٥٦°. ( $\frac{1}{3\sqrt{5}}$  م/ث)
- ٤- تطير طائفة بسرعة ثابتة في خط مستقيم على ارتفاع ٨ كم بحيث تمر فوق نقطة ثابتة على سطح الأرض، فإذا كان معدل تغير بعد الطائرة عن النقطة ٤ كم/د في اللحظة التي كانت تبعد فيها الطائرة عن النقطة ١٠ كم فاحسب سرعة الطائرة. ( $\frac{2}{3}$  كم/د)
- ٥- سلم طوله ٣٦٠ سم يرتكز بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على أرض أفقية. تحرك الطرف السفلي مبتعدا عن الحائط بمعدل ٩٠ سم/ث فجد سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض عندما يكون الطرف السفلي للسلم على بعد ١٨٠ سم من الحائط. ( $\frac{1}{3\sqrt{2}}$  سم/ث)
- ٦- يرتفع بالون رأسيا للأعلى بمعدل ثابت ٤٢ م/د. رصد مشاهد البالون من نقطة على الأرض تبعد ١٥٠ م عن موقع البالون على الأرض، جد معدل تغير زاوية ارتفاع البالون عندما يكون البالون على ارتفاع ١٥٠ م من سطح الأرض. ( $\frac{7}{5}$ )
- ٧- من قمة برج يرتفع عن سطح بحيرة بمقدار ١٢ م رصد زورق يسير بسرعة ١,٥ م/ث مبتعدا عن قاعدة البرج. جد معدل تغير زاوية انخفاض الزورق عندما يكون الزورق على بعد ٩ م من قاعدة البرج. ( $\frac{2}{5}$ )
- ٨- يقف رجل على رصيف حوض للسفن ويسحب حبالا -أحد طرفيه متصل بقارب - بمعدل ٠,٣ م/ث وطرفه الآخر يمر على بكرة ترتفع ٠,٩ م عن خط سير القارب، جد معدل تغير الزاوية لخصورة بين الحبل وخط سير القارب في اللحظة التي يكون فيها القارب على بعد ١,٢ م من الرصيف. ( $\frac{3}{4}$ )
- ٩- مثلث قائم الزاوية طولاً ضلعي القائمة ٦,٨ وكان الأول يتناقص بمعدل ١ سم/ث والثاني يتزايد بمعدل ٢ سم/ث. جد معدل تغير مساحته بعد ثانيتين. (١)
- ١٠- أقلعت طائرة من أحد المطارات في الساعة السابعة متجهة نحو الشرق بسرعة ٤٠٠ كم/س، وبعد ساعة من إقلاعها أقلعت طائرة أخرى من نفس المطار متجهة نحو الجنوب بسرعة ٦٠٠ كم/س. ما معدل تغير المسافة بين الطائرتين بعد ساعة واحدة من إقلاع الثانية؟ (٦٨٠ كم/س)
- ١١- بدأت نقطة الحركة من نقطة الأصل في الاتجاه الموجب لمحور الصادات بسرعة ٣ سم/ث. ما معدل تغير البعد بينها وبين النقطة (٢، ٥) بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة؟ ( $\frac{3}{5\sqrt{2}}$ )
- ١٢- بدأت النقطة أ الحركة من النقطة (٢، ٠) باتجاه محور السينات الموجب بسرعة ٣ سم/د وفي نفس اللحظة بدأت النقطة ب الحركة من النقطة (٠، ٧) باتجاه نقطة الأصل بسرعة ٢ سم/د. جد معدل تغير البعد بين النقطتين بعد مرور دقيقتين من بدء الحركة. ( $\frac{18}{7\sqrt{2}}$ )
- ١٣- مستطيل طوله ٨ سم وعرضه ٣ سم، يتناقص طوله بمعدل ١ سم/ث ويتزايد عرضه بمعدل ٢ سم/ث. ما معدل تغير مساحته بعد دقيقتين؟ (٥ سم<sup>٢</sup>/ث)

١٤ - مصعدان كهربائيان أ ، ب مستقران في الطابق الأرضي من عمارة والمسافة الأفقية بينهما ٨ م ، بدأ المصعد أ يرتفع بمعدل ٢ م/ث وبعد ثانيتين بدأ ب يرتفع بمعدل ١ م/ث . جد معدل تغير المسافة بين المصعدين بعد ثانيتين من بدء حركة ب .  
( ٠,٦ م/ث )

١٥ - دائرتان متحدان في المركز نصف قطرهما ٣ سم ، ١٨ سم بدأ نصف قطر الصغرى يتزايد بمعدل ٢ سم/د وفي نفس اللحظة بدأ نصف قطر الكبرى يتناقص بمعدل ٣ سم/د . ما معدل تغير المساحة المحصورة بين الدائرتين في اللحظة التي تنعدم فيها هذه المساحة؟  
(  $\pi 90 -$  )

١٦ - بدأت النقطتان ب ، ج الحركة معا من نقطة الأصل بحيث تتحرك ب على محور السينات الموجب بسرعة ٤ سم/ث وتتحرك ج في الربع الأول على منحنى  $ص = س^2$  بحيث يبقى دائما ب ج=و . ما معدل تغير مساحة المثلث و ب ج بعد ثانيتين من بدء الحركة ؟  
( ٩٦ )

١٧ - الشكل المقابل مكعب طول ضلعه ٢٠ سم



انطلقت نملتان في نفس اللحظة الأولى من أ (على أد) نحو د بسرعة ٤ سم/ث

والثانية من هـ (على هـ و) نحو و بسرعة ٣ سم/ث

ما معدل تباعد النملتين بعد ٤ ث من بدء الحركة؟

(  $\frac{5}{\sqrt{2}}$  )

١٨ - مثلث طولاه ضلعين فيه ١ سم، ٢ سم يتغير طول الضلع الثالث بحيث تزايد الزاوية بين الضلعين المعطيين  $\frac{1}{5}^\circ$  /ث . ما معدل تغير طول الضلع الثالث

عندما يكون طوله  $\sqrt{3}$  سم؟  
(  $\frac{1}{5}$  )

١٩ - خطان حديديان الزاوية بينهما  $60^\circ$  ويلتقيان في النقطة م يسير القطار أ على أحدهما مقتربا من م بسرعة ٨٠ كم/س ويسير ب على الخط الآخر مقتربا من م

بسرعة ٥٠ كم/س (عند الساعة التاسعة صباحا). إذا كان أ، ب يبعدان عن م مسافة ٢١٠ كم، ١٨٠ كم على الترتيب فما معدل تغير المسافة بين القطارين عند

الساعة الحادية عشرة صباحا؟

(  $-\frac{710}{14}$  )

٢٠ - يرتفع صاروخ عموديا عن سطح الأرض بمعدل ٢ كم/ث وعندما وصل إلى ارتفاع ١٠ كم عن سطح الأرض انحرف عن مساره واصبح يصنع مع الأفقي زاوية

قياسها  $30^\circ$  محافظا على سرعته . ما معدل تغير المسافة بين الصاروخ ونقطة انطلاقه عندما يكون على بعد  $10\sqrt{3}$  كم من نقطة انطلاقه؟  
(  $\sqrt{3}$  )

٢١ - تحركت نقطتان الأولى أ من (١٠ ، ٠) بسرعة ٤ سم/ث باتجاه نقطة الأصل والثانية ب (في نفس اللحظة) من نقطة الأصل على المستقيم ص-س=٠ في الربع

الأول بسرعة  $2\sqrt{2}$  سم/ث . ما معدل تغير المسافة بين النقطتين بعد ثانيتين من بدء الحركة؟  
( ١ )

٢٢ - أ ب وتر في دائرة نصف قطرها ٢ سم يزداد طوله بمعدل ١ سم/ث . ما معدل تغير مساحة القطاع الدائري الذي يقع فيه الوتر في اللحظة التي يكون فيها قياس

زاوية القطاع  $60^\circ$  ؟  
(  $\frac{2}{3\sqrt{3}}$  )

٢٣ - بدأت نقطة الحركة على دائرة مركزها نقطة الأصل من النقطة (أ ، ٠) بعكس اتجاه عقارب الساعة بحيث يزداد طول قوس الدائرة الذي ترسمه بمعدل ٨ سم/ث

جد معدل ابتعاد النقطة المتحركة عن النقطة (أ ، ٠) عندما يقابل القوس الذي ترسمه زاوية مركزية قياسها  $60^\circ$  .  
(  $4\sqrt{3}$  )

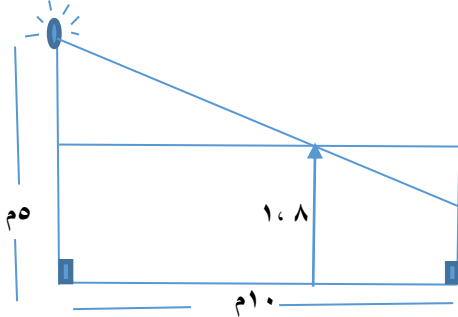
٢٤ - تتحرك نقطة على منحنى  $٩(س) = \sqrt{١+س^2}$  بحيث يتزايد الإحداثي السيني لها بمعدل ٢ وحدة/ث ، ما معدل تغير المسافة بين هذه النقطة

والنقطة (١ ، ٠) عندما يكون الإحداثي السيني للنقطة المتحركة يساوي ٢ ؟  
(  $\sqrt{6}$  )



٢٥- تتحرك نقطة على منحنى العلاقة  $v = s^3$  بحيث يتزايد بعدها عن نقطة الأصل بمعدل ٤ وحدات/ث . ما معدل التغير في الإحداثي السيني للنقطة عند النقطة  $(2, 2\sqrt{2})$  .  
(٣١)

٢٦- رجل طوله ١٨٠ سم يقف أمام مصباح يرتفع عن سطح أرض مستوية بمقدار ٥٤٠ سم ، أخذ الرجل يبتعد عن المصباح بمعدل ٣ م/ث .  
ما معدل ازدياد طول ظل الرجل؟  
(١٥٠ سم/ث)



٢٧- يقع مصباح على بعد ١٠ متر من حائط رأسي على ارتفاع ٥ متر عن أرض أفقية

سار رجل طوله ١٨٠ سم على الأرض بسرعة  $\frac{1}{3}$  م/ث مبتعدا عن المصباح

ما سرعة تحرك ظل رأس الرجل على الحائط

عندما يكون الرجل على بعد ١,٥ م من الحائط؟  
( $\frac{64}{289}$ )

٢٨- بدأت نقطة الحركة من نقطة الأصل على منحنى  $v = s^2$  في الربع الأول . جد معدل تغير مساحة المثلث المكون من المماس للمنحنى ومحور السينات والعمود النازل من نقطة التماس على محور السينات إذا كانت  $\frac{ds}{dt} = 2$  عندما  $s = 2$  .  
(١٢)

٢٩- تتمدد كرة معدنية بالحرارة فيزداد حجمها بمعدل  $\frac{5}{3}$  سم<sup>٣</sup>/ث . جد معدل تغير مساحة سطح الكرة عند  $10 = v$  .  
( $\frac{1}{3}$ )

٣٠- كرة حديدية قطرها ٨ سم مغطاة بطبقة من الجليد فإذا كان الجليد يذوب بمعدل ١٠ سم<sup>٣</sup>/د فأوجد:

أولاً: معدل تغير سمك الجليد عندما يكون سمكه ٢ سم. ( $\frac{5}{\pi 72}$ )  
ثانياً: معدل تغير مساحة السطح الخارجي عند نفس اللحظة .  
( $\frac{1}{3}$ )

٣١- مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول ضلعه بمعدل  $\frac{1}{3}$  سم/د فإذا كان معدل تغير حجمه عند لحظة معينة ١٢ سم<sup>٣</sup>/د فجد:

أولاً: طول ضلع المكعب عند هذه اللحظة . (٢٠)  
ثانياً: معدل تغير المساحة الكلية للمكعب عند نفس اللحظة.  
( $\frac{12}{5}$ )

٣٢- متوازي مستطيلات قاعدته مربعة ، يتزايد طول ضلع القاعدة بمعدل  $\frac{9}{3}$  سم/د ويتناقص ارتفاعه بمعدل ١ سم/د في اللحظة التي يكون فيها طول ضلع

القاعدة ٨ سم والارتفاع ٥ سم ، جد أولاً: معدل تغير حجم متوازي المستطيلات (٨)  
ثانياً: معدل تغير المساحة الكلية له (١٤,٨)

٣٣- حوض سباحة على شكل متوازي مستطيلات بعدا قاعدته ٢٠ م ، ٨ م وعمقه ٢ م ، سُخِّ فيهِ الماء بمعدل ١٠٥ م<sup>٣</sup>/د . جد سرعة ارتفاع الماء. ( $\frac{1}{33}$ )

٣٤- مستطيل مساحته ٥٠ سم<sup>٢</sup> إذا ازداد طولاً ضلعين متوازيين فيه بمعدل ٢ سم/ث وتناقص طولاً الضلعين الآخرين بحيث تظل مساحته ثابتة فجد بعدي المستطيل في اللحظة التي يتوقف فيها المحيط عن التناقص.  
( $5\sqrt{2}$ ,  $5\sqrt{2}$ )

٣٥- مثلث يتناقص ارتفاعه بمعدل  $\frac{3}{3}$  سم/د بينما تتزايد قاعدته بمعدل  $\frac{7}{3}$  سم/د . جد معدل تغير مساحة المثلث عندما يكون طول القاعدة ٨ سم

ويكون الارتفاع ٤ سم .  
( $\frac{1}{5}$ )

٣٦- مثلث متساوي الساقين طول كل من ضلعيه المتساويين ٦ سم فإذا كانت سرعة تغير الزاوية (هـ) المحصورة بين الضلعين المتساويين ٢°/د فجد سرعة تغير مساحة المثلث عندما تصبح  $h = \frac{\pi}{4}$  .  
( $\frac{\pi 3\sqrt{3}}{10}$ )

٣٧- مثلث متساوي الأضلاع تتزايد مساحته بمعدل ٦ سم<sup>٢</sup>/ث ، جد معدل التغير في طول ضلع المثلث عندما يكون طول الضلع ٤ سم. (٣٧)

٣٨- خزان ماء اسطواني قطر قاعدته ٣٠ م يخرج منه الماء بمعدل ٢ م<sup>٣</sup>/د ، جد سرعة انخفاض الماء في الخزان. (٢٥٠)

٣٩- تتحرك النقطة أ(س ، ص) في الربع الأول على منحنى  $\sqrt{s} + 5 = v$  بحيث يزداد الإحداثي السيني لها بمعدل ٦ سم/ث أسقط العمودان أب، أج على محوري السينات والصادات الموجبين على الترتيب . جد معدل تغير مساحة المستطيل أب و ج عند  $s=2$ . (٢٦)

٤٠- أب قطر في دائرة طوله ٢٠ سم ، تتحرك النقطة ج على القوس أب بحيث يتزايد قياس الزاوية ج ب أ بمعدل ٠,٣ /دقيقة. احسب معدل تغير مساحة المثلث أب ج عندما يكون قياس الزاوية ج ب أ يساوي  $\frac{\pi}{3}$ . (٣٠-)

٤١- مربع تتمدد أضلاعه بمعدل ٤ سم/ث ، رسمت دائرة داخل المربع وأخذت تتمدد مع المربع بحيث تبقى تماس أضلاعه . جد معدل التغير في مساحة المنطقة المحصورة بين المربع والدائرة عندما يكون طول ضلع المربع ٢٠ سم. (١٦٠ -  $\pi$ )

٤٢- تتمدد أضلاع مثلث متساوي الأضلاع بمعدل ٢ سم/ث رسمت دائرة داخل المثلث وأخذت تتمدد مع المثلث ( بحيث تبقى تماس أضلاعه) جد معدل تغير مساحة المنطقة المحصورة بين المثلث والدائرة عندما يكون طول ضلع المثلث ١٢ سم. (١٢ -  $\pi$ )

٤٣- ماسورة جوفاء من الحديد على شكل أسطوانة يتغير نصفها قطريها الداخلي والخارجي بحيث يبقى حجم الحديد ثابتا. جد معدل تغير نصف قطرها الخارجي عندما يكون نصف القطر الخارجي ٨ سم بينما الداخلي ٦ سم ويتزايد بمعدل  $\frac{1}{3}$  سم/ث. (٣٨)

٤٤- قطعة من الثلج على شكل أسطوانة دائرية قائمة تذوب بمعدل ٤ سم<sup>٣</sup>/ث بحيث تبقى النسبة بين نصف قطرها إلى ارتفاعها ٣:٢ . ما معدل تغير المساحة الجانبية لها عندما يكون نصف القطر ٦ سم. (٩-)

٤٥- خزان على شكل مخروط قائم نصف قطر قاعدته ٢ م وارتفاعه ٤ م ورأسه لأسفل ، يصب فيه الماء بمعدل ٢ م<sup>٣</sup>/د . جد :

أولاً: معدل ارتفاع الماء في الخزان عندما عمق الماء ١ م. (  $\frac{1}{\pi}$  ) ثانياً: معدل تغير مساحة سطح الماء في تلك اللحظة ( ٤ )

٤٦- وعاء على شكل مخروط دائري قائم نصف قطره ٥ سم ، وارتفاعه ٣ سم ، إذا كان الوعاء فارغاً ورأسه لأسفل وصب فيه الماء بمعدل  $\pi$  سم<sup>٣</sup>/ث فجد معدل تغير ارتفاع السائل بعد مرور ١٦ ث على بدء صب الماء. (  $\frac{1}{4}$  )

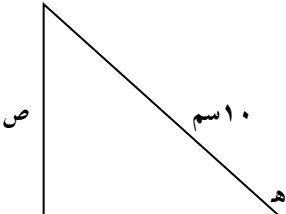
٤٧- مخروط قطر قاعدته ١٢ سم وارتفاعه ١٢ سم ورأسه للأسفل إذا صب فيه سائل بمعدل ١٦ سم<sup>٣</sup>/ث وفي نفس اللحظة يخرج منه السائل بمعدل ٧ سم<sup>٣</sup>/ث جد سرعة ارتفاع السائل عندما يكون عمق السائل ٦ سم. (  $\frac{1}{\pi}$  )

٤٨- مخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ٣٠ سم ، أغلق جزء منه بواسطة قرص دائري رقيق نصف قطره ٣ سم يوازي قاعدته ويمنع وصول أي مادة للجزء السفلي من المخروط . صب فيه سائل بمعدل  $\pi$  سم<sup>٣</sup>/ث ، جد سرعة ارتفاع السائل عندما يكون حجم السائل في الإناء  $\pi$  سم<sup>٣</sup>. (  $\frac{9}{16}$  )

٤٩- يضخ غاز داخل بالون كروي بمعدل ١٢٥ سم<sup>٣</sup>/ث . جد معدل زيادة مساحة سطح البالون عندما يكون طول قطره ١٠ سم. (٥٠)

٥٠- جسر للمشاة يرتفع عن مستوى الشارع بمقدار ٦ م يسير عليه رجل بمعدل ٢٤ م/دقيقة وفي نفس اللحظة مر من تحته رجل آخر يسير بسرعة ٨ م/دقيقة . جد معدل تغير المسافة بين الرجلين بعد دقيقة واحدة من بدء الحركة. (  $\frac{64}{13}$  )

السنة	السؤال	الجواب
٢٠٠٨	من نقطة تبعد (١٠) أمتار عن النقطة (أ)، بدأ أحمد السير على أرض أفقية في خط مستقيم مبتعدا عن (أ) بمعدل ٢م/ث وفي نفس اللحظة انطلق جسم من (أ) لأعلى بسرعة (٥)م/ث، جد معدل تغير المسافة بين أحمد والجسم عندما يكون بُعد أحمد عن (أ) يساوي (١٢)مترا.	$\frac{49}{13}$
٢٠٠٩	من على بعد ٢م إلى يسار قاعدة عمود انطلقت النقطة ب نحو اليسار بسرعة ١م/ث وفي نفس اللحظة ومن قمة العمود ابتدأت النقطة أ الحركة نحو اليمين بسرعة ٢م/ث فإذا كان ارتفاع العمود ١٢م، جد معدل تغير البعد بين النقطتين أ، ب عندما تكون النسبة بين بعد أ عن قمة العمود إلى بعد ب عن قاعدة العمود كنسبة ٣:٢ .	$\frac{15}{13}$
٢٠١٠	تتحرك نقطة على منحنى الاقتزان $\frac{1}{2}(s)$ = $s^3$ بحيث $\frac{ds}{dt} = \frac{2}{s}$ سم/ث، ما المعدل الزمني لتغير ميل المماس للاقتزان ق(س) عندما $s=1$ ؟ (أ) ٣ (ب) ٦ (ج) ١٢ (د) ٢٤	ج
٢٠١٠	تتحرك النقطة (س،ص) على منحنى الاقتزان $\frac{1}{2}(s)$ = $s^3 + s$ بحيث أن $\frac{ds}{dt} = \frac{2}{s}$ سم/ث، جد معدل تغير مساحة المثلث الذي رؤوسه نقطة الأصل والنقطة (٦،٠) والنقطة المتحركة (س،ص) في اللحظة التي يكون فيها الإحداثي السيني للنقطة المتحركة يساوي ٣.	$\frac{3}{14}$
٢٠١٠ إكمال	تطير طائرة على ارتفاع ٣ كم بسرعة ثابتة مقدارها ٠,٢٤ كم/ث في خط مستقيم يمر بالنقطة الواقعة رأسيا فوق شخص يرصدها من سطح الأرض ، جد معدل تغير زاوية ارتفاع الطائرة عندما تكون على بعد ٦ كم من الشخص.	٠,٠٢ د/ث
٢٠١٠	بدأت بقعة زيت دائرية الشكل نصف قطرها ٣ سم ومركزها نقطة التقاء قطري قطعة قماش مربعة الشكل قطرها ٢٠ سم بالانتشار محافظة على شكلها بحيث يتزايد نصف قطرها بمعدل ثابت ٢ سم/ث، وفي نفس اللحظة ومن أحد رؤوس قطعة القماش بدأت بقعة زيت أخرى نصف قطرها ٤ سم بالانتشار محافظة على شكلها بمعدل ثابت ١ سم/ث . جد معدل تغير مساحة المنطقة الخالية من الزيت في قطعة القماش لحظة بدء التقاء محيطي البقعتين.	-٢٢,٥
٢٠١١ إكمال	تتحرك نقطة على منحنى الاقتزان $\frac{1}{2}(s)$ = $s^3$ بحيث $\frac{ds}{dt} = \frac{2}{s}$ سم/ث، ما المعدل الزمني لتغير ميل المماس للاقتزان ق(س) عندما $s=1$ ؟ (أ) ٣ (ب) ٦ (ج) ٢٤ (د) ١٢	د
٢٠١٢	إذا كانت أ(٢،٢)، ب(٢،٧) وكانت النقطة ن(س،ص) تتحرك على منحنى الاقتزان $\frac{1}{2}(s)$ = $s^2 + 2$ ، $s < 0$ بحيث يتغير إحداثيها السيني بمعدل ٣ سم/ث، احسب معدل التغير في مساحة المثلث أ ب ن عندما يكون طول العمود النازل من ن على أ ب يساوي ٤ وحدات.	٣٠
٢٠١٢ إكمال	تتحرك النقطة أ(س،ص) على منحنى الاقتزان $\frac{1}{2}(s)$ = $s^2 + 2$ بحيث يتزايد إحداثيها السيني بمعدل ٣ سم/ث، جد معدل التغير في بعد النقطة أ عن النقطة (٠،١) عندما $s=1$ .	-٢

٥-	 <p>يبيّن الشكل المجاور مثلثا قائم الزاوية طول وتره ١٠ سم . أخذت الزاوية هـ بالتناقص بمعدل ١,٠°/ث ، بحيث يبقى المثلث قائم الزاوية. ما معدل تغير مساحة المثلث عندما <math>\theta = \frac{\pi}{4}</math> ؟</p>	٢٠١٣ إكمال
$\frac{27}{\pi^4}$	<p>يصب الماء في مخروط دائري قائم بمعدل ٢٤٣ دسم<sup>٣</sup>/د ، فإذا كان رأس المخروط إلى أعلى وارتفاعه ٣٠ دسم ونصف قطر قاعدته ١٥ دسم ، فما سرعة ارتفاع الماء في المخروط عندما يكون ارتفاع الماء فيه ١٨ دسم؟</p>	٢٠١٤
$\frac{9-\pi}{8}$	<p>سلم طوله ٥ أمتار متكئ على حائط عمودي ، بدأ أسفل السلم ينزلق على أرض أفقية مبتعدا عن الحائط بمعدل ١,٥ م/ث أوجد معدل انزلاق الطرف العلوي للسلم في اللحظة التي يبعد أسفله عن الحائط ٣ أمتار .</p>	٢٠١٤ إكمال صفة
٣٠-	<p>دائرة قطرها أب طوله ٢٠ سم ، ج نقطة تتحرك على القوس أب بحيث تزداد الزاوية أ ب ج بمعدل ٠,٣ راديان/دقيقة ما معدل تغير مساحة المثلث أ ب ج في اللحظة التي يكون فيها قياس الزاوية أ ب ج يساوي <math>\frac{\pi}{3}</math> ؟</p>	٢٠١٥

مع تمنياتنا بالثوق . . والله ولي التوفيق

